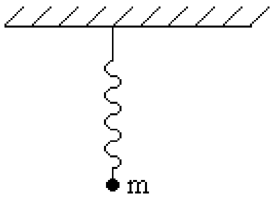
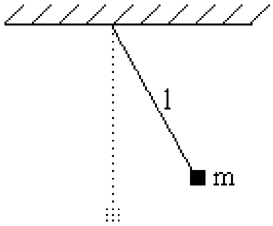
Harmonikus rezgőmozgás
(Vázlat)

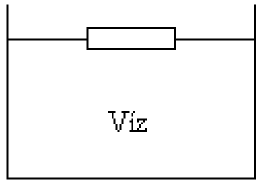
1. A rezgőmozgás fogalma
2. Rezgőmozgás leírását segítő mennyiségek
3. Kapcsolat az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgőmozgás között
4. A harmonikus rezgőmozgás kinematikai egyenletei
5. A harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltétele
6. A harmonikus rezgőmozgás periódusidejének levezetése
7. A rezgőmozgás energetikai leírása
8. A matematikai inga
9. Csillapított rezgések
10. Kényszerrezgés, rezonancia

A rezgőmozgás fogalma

A rugóra függesztett testet, ha egyensúlyi helyzetéből kimozdítjuk, akkor két szélső helyzet között periodikus mozgást végez. Hasonló mozgást végez az l hosszúságú fonálra függesztett test, vagy a víz tetején lévő habszivacs, ha egyensúlyi helyzetéből kimozdítjuk.







Rezgőmozgásról akkor beszélünk, ha egy testet az egyensúlyi helyzetéből kimozdítunk, és ennek köszönhetően a test két szélső helyzet között periodikus mozgást végez.

A rezgőmozgás maximális kitérését vizsgálva két fajta rezgőmozgást különböztetünk meg:

1. Csillapítatlan rezgőmozgás:

Időben állandó a maximális kitérés (idealizált eset).

2. Csillapított rezgőmozgás:

A maximális kitérés időben csökken.

Rezgőmozgás leírását segítő mennyiségek

Periódus: A mozgás egy periódusának nevezzük a pályának azt a szakaszát, amikor a test a pálya egy pontjából elindul, a két szélső helyzetet érinti, és visszatér a kiindulási pontba.

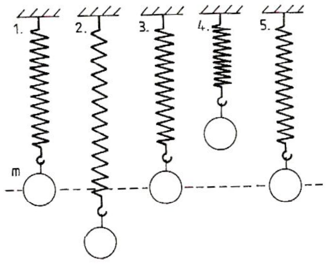
Periódus idő: Egy periódus megtételéhez szükséges idő.
Jele: T [T] = s

Frekvencia: Egy s alatt megtett periódusok száma.
Jele: f [f] = 1/s (Hz)

Amplitúdó: Az egyensúlyi helyzethez viszonyított maximális kitérés.
Jele: A [A] = m

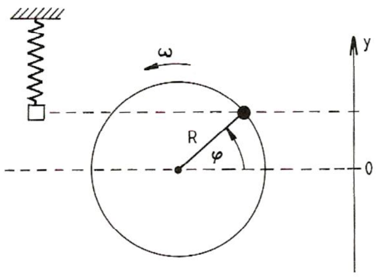
Kapcsolat az egyenletes körmozgás és a harmonikus rezgőmozgás között

Ha egy rugóra függesztett test rezgését vizsgáljuk, és azonos időközönként megfigyeljük a kitérést, akkor azt tapasztaljuk, hogy a kitérés az idő szinuszos függvénye lesz.



Az olyan rezgőmozgást, ahol teljesül, hogy a kitérés az idő szinuszos függvénye **harmonikus rezgőmozgás**nak nevezzük.

Ha az egyenletes körmozgást végző test mozgását a síkjából vizsgáljuk, akkor egy olyan rezgőmozgást látunk, ahol a kitérés az időnek szinuszos függvénye.

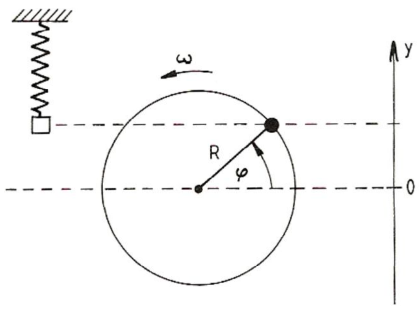


Referencia körnek nevezzük annak az egyenletes körmozgást végző testnek a pályáját, amelynek sugara megegyezik a vizsgált rezgőmozgás amplitúdójával, fordulatszáma a rezgőmozgás frekvenciájával.

A harmonikus rezgőmozgás kinematikai egyenletei

A harmonikus rezgőmozgás kinematikai egyenletei abból a gondolatból vezethetők le, hogy az egyenletes körmozgást végző test mozgását a síkjából nézve harmonikus rezgőmozgásnak látjuk.

Harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő függvénye



Az egyenletes körmozgást végző test pillanatnyi helyzetének függőleges irányú komponense a harmonikus rezgőmozgás kitérésével egyezik meg.

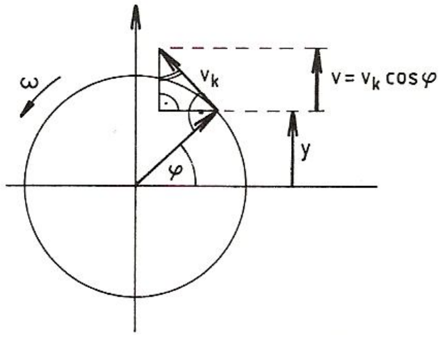
$y = r \cdot \sin\alpha$

Rezgőmozgás esetén: $r = A$

$y = A \cdot \sin\alpha \qquad \alpha = \omega \cdot t$

$$y = A \cdot \sin \omega \cdot t$$
$$y = A \cdot \sin 2\pi \cdot f \cdot t$$
$$y = A \cdot \sin 2\pi/T \cdot t$$

Harmonikus rezgőmozgás sebesség-idő függvénye



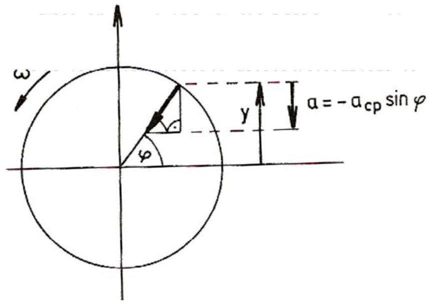
Az egyenletes körmozgást végző test kerületi sebességének függőleges irányú komponense megegyezik a harmonikus rezgőmozgást végző test pillanatnyi sebességével.

$v = v_k \cdot \cos\alpha$

$v = r \cdot \omega \cdot \cos\alpha$

$v = A\,\omega \cdot \cos \omega \cdot t$
$v = A\,\omega \cdot \cos 2\pi \cdot f \cdot t$
$v = A\,\omega \cdot \cos 2\pi/T \cdot t$

Ha $\alpha = 0^\circ$, akkor maximális a sebesség: $v_{max} = A\,\omega$
Ha $\alpha = 180^\circ$, akkor a sebesség: $|v_{max}| = A\,\omega$
Ha $\alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$ $\quad v = 0$
0



ezgőmozgást végző test sebessége maximális, a

Har lás-idő függvénye

Az egyenletes körmozgást végző test centripetális gyorsulásának függőleges irányú komponense megegyezik a harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulásával.

$|a| = a_{cp} \cdot \sin\alpha$
$|a| = r\,\omega^2 \cdot \sin\alpha$
$|a| = A\,\omega^2 \cdot \sin\alpha$

Mivel:
$y = A \cdot \sin\alpha \rightarrow a = -\,y\,\omega^2$

A gyorsulás egyenesen arányos a kitéréssel, de vele ellentétes irányú. Erre utal a mínusz előjel.

$$a= - A\,\omega^2 \cdot \sin\alpha$$
$$a= - A\,\omega^2 \cdot \sin \omega \cdot t$$
$$a= - A\,\omega^2 \cdot \sin 2\pi \cdot f \cdot t$$
$$a= - A\,\omega^2 \cdot \sin 2\pi/T \cdot t$$

A rezgőmozgást végző test gyorsulása akkor maximális, ha

$$|\sin\alpha| = 1 \rightarrow |a_{max}|= A\,\omega^2$$

A rezgőmozgást végző test gyorsulása szélső helyzetekben maximális, és egyensúlyi helyzetben nulla.

Harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltétele

Amikor egy mozgás létrejöttének dinamikai feltételét vizsgáljuk, akkor azt nézzük meg, hogy az adott mozgást milyen erő hozza létre.
A harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltételét is Newton II. törvényéből vezethetjük le.

$$F_e = a \cdot m \qquad a = -y \cdot \omega^2$$
$$F_e = -m \cdot \omega^2 \cdot y \quad m \cdot \omega^2 = D$$

$$F_e = -D \cdot y$$

Harmonikus rezőmozgást olyan eredőerő hoz létre, amely a kitéréssel arányos, de vele ellentétes irányú.

Rugóállandó (direkciós erő)
A rugóállandó számértéke megmutatja, hogy a rugó vagy rugalmas test egységnyi megnyúlását mekkora eredőerő hozza létre.

$$[D] = \frac{|F_e|}{|y|} = \frac{N}{m}$$

A harmonikus rezgőmozgás periódusidejének levezetése

A levezetéskor a rugóállandó összefüggéséből indulunk ki.

$$D = m \cdot \omega^2$$

$$D = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$D = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

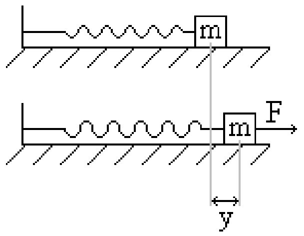
$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{D}$$

$$T = \pm 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

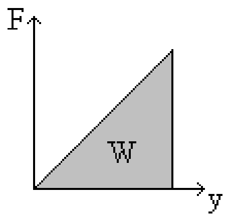
A rezgőmozgás periódusideje függ a mozgást végző test tömegétől és a rugóállandótól, de nem függ a mozgás amplitúdójától.

A rezgőmozgás energetikai leírása



Egy m tömegű testet rugó segítségével falhoz erősítünk. A test és a talaj között nincs súrlódás. A testet egyensúlyi helyzetéből y távolságra kitérítjük. Ehhez erőre van szükség, és az erő által végzett munka a test energiáját növeli.

$|F_r| = D \cdot y \quad \rightarrow$ Az általunk kifejtett erő a kitéréssel arányos.



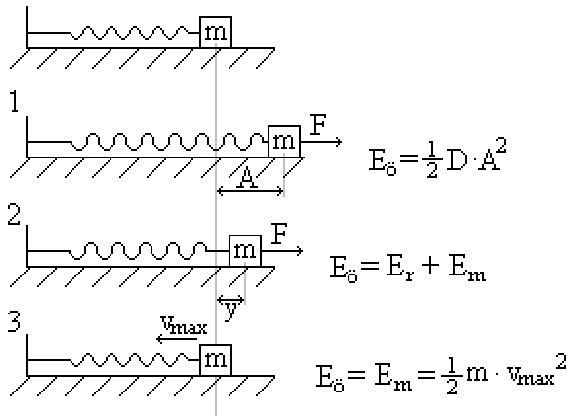
Ha az erőt ábrázoljuk az elmozdulás függvényében, akkor a grafikon alatti terület mérőszáma az általunk végzett munka mérőszámát adja, ami a rugalmas energiával is megegyezik.

$$W = E_r = \frac{F \cdot y}{2} = \frac{D \cdot y \cdot y}{2} = \frac{1}{2} D \cdot y^2$$

A rugalmas energia egyenesen arányos a hosszváltozás négyzetével, az arányossági tényező a rugóállandó fele.

Mechanikai energia megmaradásának törvénye rezgőmozgás esetén

Rugóhoz erősített testet az egyensúlyi helyzetéből amplitúdónyi távolságra kitérítjük, majd magára hagyjuk. Bizonyítható, hogy a pálya különböző pontjaiban a rezgőmozgást végző test összes energiája állandó.

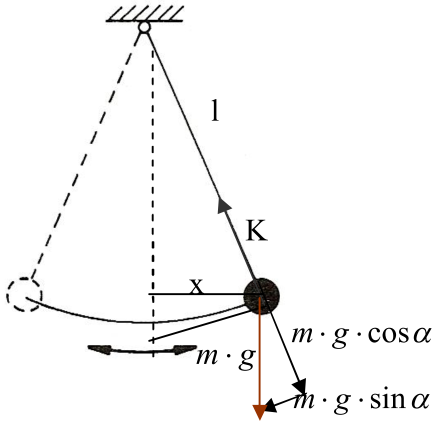


Bizonyítani lehet, hogy az összes energia a pálya bármely pontján állandó.

$$\frac{1}{2} D \cdot A^2 = E_r + E_m = \frac{1}{2} D \cdot y^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} D \cdot A^2 \cdot \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} D \cdot A^2 \cdot \sin^2 + \frac{1}{2} D \cdot A^2 \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} D \cdot A^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{2} D \cdot A^2$$

A matematikai inga



A matematikai inga vagy más néven fonálinga egy l hosszúságú fonálból és egy pontszerű m tömegű testből áll. Ha a fonalat felfüggesztjük, és a pontszerű testet kitérítjük, akkor a test két szélső helyzet között periodikus mozgást végez. Ez a mozgás kis kitérés esetén (közelítőleg 5^0) harmonikus rezgőmozgásként írható le.

A fonálinga mozgása összetett mozgás, mert a test két szélső helyzet között, körív mentén végzi a mozgást (rezgőmozgás és körmozgás).

$$\sin\alpha = \frac{F_1}{mg} \qquad F_1 = mg\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{F_2}{mg} \qquad F_2 = mg\cos\alpha$$

<u>Körmozgáshoz szükséges erő:</u> F_{cp} = K- $mg\cos\alpha$ (a körmozgás nem egyenletes, mert a szög változik)

<u>A harmonikus mozgást</u> $F = mg\sin\alpha$ erőkomponens hozza létre.

$$\sin\alpha = \frac{x}{l} \qquad F_1 = -mg\frac{x}{l}$$

$$F_1 = -\frac{mg}{l}\cdot x$$ ahol x a kitérés (i~x kis szögek esetén)

Az érintő irányú erő komponensről belátható, hogy a kitéréssel arányos, de vele ellentétes irányú, ezért ez az erőkomponens felelős a fonálinga harmonikus mozgásáért.

<u>A fonálinga lengésidejének (periódusidejének) meghatározása</u>

$$\frac{mg}{l} = D$$

Ami a fonálingánál $\frac{mg}{l}$ hányados, az a rugónál a rugóállandó.

$$\frac{mg}{l} = m \cdot \omega^2$$

$$\frac{g}{l} = \frac{4\tau^2}{T^2}$$

$$T^2 = 4\tau^2 \cdot \frac{l}{g}$$

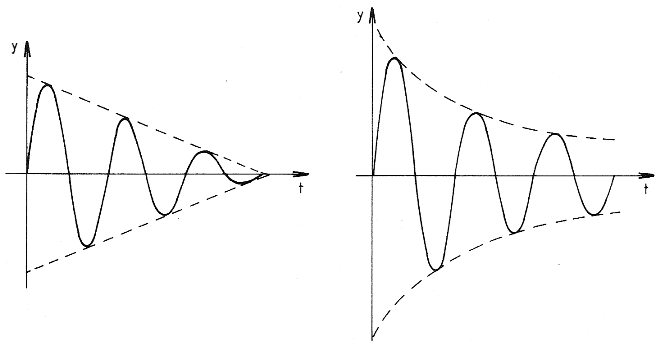
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

A periódusidő a fonál hosszától, és az adott helyen a nehézségi gyorsulástól függ, nem függ a test tömegtől és az amlitúdótól.

Csillapított rezgések

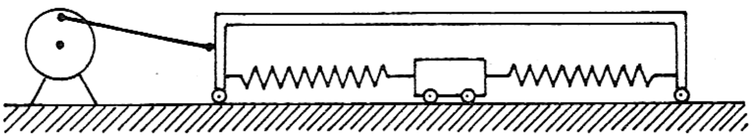
Csillapított rezgésekről akkor beszélünk, ha a rugóerőn kívül más fékezőerő is hat a testre. Ilyenkor az amplitúdó időben csökken, de a periódus ideje nem változik. A rezgőmozgást befolyásoló két fontos fékezőerő:

<u>Súrlódási erő:</u> ilyenkor a csökkenő amplitúdók a kitérés idő grafikonon egyenesre illeszkednek.
<u>Közgellenállási erő:</u> ilyenkor az amplitúdók csökkenése exponenciális.



Kényszerrezgés, rezonancia

Kényszerrezgést akkor végez a test, ha egy periódikusan változó külső erő is hat rá.



Ha a kiskocsit kitérítjük az egyensúlyi helyzetéből, akkor egy saját frekvenciával rezgőmozgást fog végezni. Ezt a frekvenciát csak a kocsi tömege és a rugóállandók határozzák meg. Ha a kereket állandó fordulatszámmal kezdjük el mozgatni, akkor a kiskocsi rövid időn belül ugyanezzel e frekvenciával mozog. Ilyenkor a kereket gerjesztő rendszernek, a rugók között lévő kiskocsit pedig, gerjesztett testnek nevezzük.
A kényszerrezgés speciális formája a rezonancia. Rezonancia akkor következik be, ha a gerjesztő frekvenciája megegyezik a rezgőképes rendszer saját frekvenciájával. Ilyenkor a rezgő rendszer megfelelő ütemben kap energia-adagokat, amely az amplitúdó növekedésében figyelhető meg.