

Hullámok visszaverődése és törése

A hullámterjedés vizsgálatánál eddig azt tételeztük fel, hogy a hullám homogén közegben, állandó sebességgel terjed. Ha a hullám egy közeg határához ér, akkor a tapasztalat szerint onnan részben visszaverődik, részben pedig behatol a szomszédos közegbe, és terjedésében mindkét esetben változások állhatnak be.

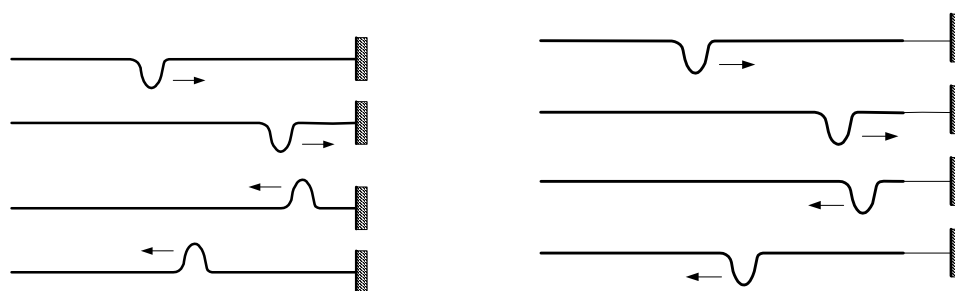
Visszaverődésnél például megváltozhat a hullám fázisa, új közegbe történő behatolásnál pedig általában megváltozik a hullám terjedési sebessége, és ezzel együtt a hullámhossza, elektromágneses hullámoknál mindkét esetben megváltozhat a hullám polarizációs állapota is. A visszaverődés és törés során a különböző típusú (rugalmas, elektromágneses) hullámok különbözőképpen viselkednek, de vannak olyan jelenségek, amelyek mindenféle hullám esetén fellépnek. Itt elsősorban ezekkel a közös jelenségekkel foglalkozunk, az egyes hullámfajtákra jellemző speciális problémákat a megfelelő helyen tárgyaljuk.

A visszaverődés és törés alapjelenségeinek bemutatására – szemléletességük miatt – elsősorban kifeszített, rugalmas kötél-, illetve vízfelületen terjedő rugalmas hullámokat használunk.

Először végezzünk el két kísérletet rugalmas kötélén terjedő hullámokkal.

KÍSÉRLETEK:

- Rugalmas kötél egyik végét rögzítsük a falhoz, úgy hogy ne tudjon elmozdulni, feszítsük ki, és a másik végétől indítsunk el egy pulzust (baloldali ábra). Jól megfigyelhető, hogy amikor a pulzus a kötél és a fal határához érkezik, onnan visszaverődik, de a kitérés iránya ellenkezőre változik. Ez azt jelenti, hogy a rögzített végről történő visszaverődésnél a hullám fázisában π nagyságú ugrás következik be.
- Módosítsuk a kötél végének rögzítését úgy, hogy szabadon elmozdulhasson. Ezt – amint a jobboldali ábrán is látszik – a fal és a rugalmas kötél közé beiktatott vékony, rugalmatlan zsinórral érhetjük el. Most a kétféle kötél határáról történő visszaverődés közben a zavar iránya nem változik meg, a szabad végről történő visszaverődésnél nincs fázisugrás.



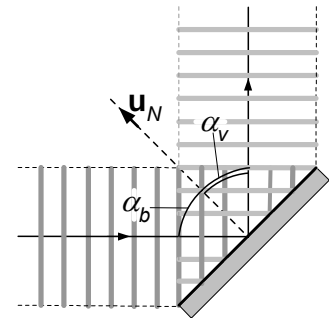
A rögzített végen bekövetkező fázisugrás oka az, hogy a falhoz érkező zavarnak a falnál el kell tűnnie, és ez csak úgy lehetséges, hogy a falnál elinduló ellentétes kitérés kompenzálja az eredeti kitérést.

Visszaverődésnél nem csak rugalmas hullámoknál léphet fel fázisugrás. A jelenség a elektromágneses hullámok esetén is megfigyelhető.

Kétdimenziós terjedésnél bekövetkező törési és visszaverődési jelenségek jól demonstrálhatók víz hullámokkal.

KÍSÉRLET:

Vízfelületet egy egyenes pálcával periodikusan ütögetve, egyenes hullámot hozunk létre, és a hullám útjába ferdén elhelyezünk egy egyenes akadályt, amelyen a hullám nem tud áthatolni (ábra). A hullám az akadályról jól láthatóan visszaverődik, mégpedig úgy, hogy az ábrán bejelölt α_b beesési szög megegyezik az α_v visszaverődési szöggel (az \mathbf{u}_N vektor az akadályra merőleges irányt, a *beesési merőlegest* jelöli).



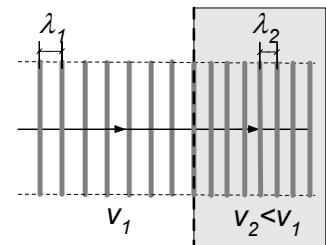
Ha az előző kísérletnél a hullám útjába a terjedésére merőleges akadályt helyezünk el, a hullám akkor is visszaverődik. Ennek tiszta szemléltetése azonban víz hullámokkal nehéz, mert a visszaverődő hullámok összetalálkoznak a beeső hullámokkal, és kölcsönhatásuk miatt a kialakult kép bonyolulttá válik (a hullámok találkozásánál fellépő jelenségekkel később foglalkozunk). A problémát úgy lehet kiküszöbölni, hogy csak egyetlen rövid pulzus terjedését vizsgáljuk.

Víz hullámokkal modellezhető az az eset is, amikor a hullám egyik közegből a másikba megy át. Ezt az teszi lehetővé, hogy a víz hullámok terjedési sebessége függ a víz mélységétől. Ha a hullámkád egyik részének aljára üveglapot teszünk, és ezzel a vízmélységet lecsökkentjük, akkor ez a rész a hullámok számára más terjedési sebességet, tehát egy „másik közeget” jelent.

A tapasztalat szerint a sekélyebb vízben a sebesség-, és ennek megfelelően a hullámhossz is kisebb (a rezgésidő a közegtől nem függ, így a $\lambda = vT$ összefüggés szerint a terjedési sebesség és a hullámhossz egymással arányos).

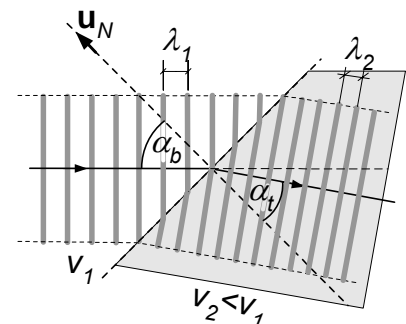
KÍSÉRLET:

Hullámkád egyik felében (az ábrán a jobboldali rész) a vízmélységet lecsökkentjük, így két különböző közeget hozunk létre, amelyeket egyenes határvonal választ el. A közeghatárra merőlegesen beeső egyenes hullám iránya a határvonalon való áthaladásnál nem változik meg, de a hullámhossz lecsökken.



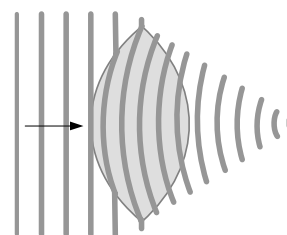
KÍSÉRLET:

Az előző kísérletet végezzük el úgy, hogy a hullám terjedési iránya nem merőleges a közeghatárra (ábra). Az új közegbe való belépésnél most is megváltozik a hullámhossz, de emellett az azonos fázisú helyeket megadó egyenesek helyzete is módosul (és ennek megfelelően az erre merőleges terjedési irány is más lesz). A vizsgált esetben az α_t törési szög kisebb, mint az α_b beesési szög.



KÍSÉRLET:

Ha a hullámkád aljába egy domború lencse alakú üveglapot teszünk (ábra), akkor az így létrehozott „lencse” a ráeső síkhullámot egy pontban (a fókuszpontban) gyűjti össze. Ez a kísérlet lényegében az optikából ismert gyűjtőlencse vízhullám-modellje.



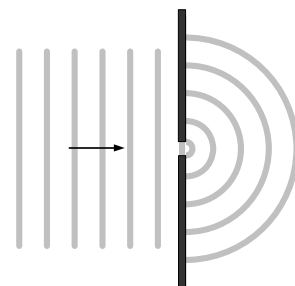
Nehezebben valósítható meg az a kísérlet, amivel az optikából ismert gömbtükör modellezhető, mert a hengeres akadályról visszaverődő hullámok összetalálkoznak a beérkező hullámokkal, és ez a képet bonyolulttá teszi. Itt is segít, ha csak egyetlen pulzust vizsgálunk.

A Huygens-elv, a törés és visszaverődés értelmezése

A visszaverődésnél és törésnél bekövetkező jelenségek megmagyarázhatók egy egyszerű modell- és a belőle következő szerkesztés segítségével, amelyet Huygens¹ dolgozott ki. A modell alapötletét az a tény adta, hogy egy pontszerű zavar gömbhullám (két dimenzióban körhullám) alakjában terjed. Mivel pedig egy hullámfront minden pontjában ugyanaz a zavar jön létre, mint a hullámforrásban, a hullámfront minden pontja elemi gömbhullámok forrásaként fogható fel. Ezt a feltevést megerősíti az alábbi kísérlet.

KÍSÉRLET:

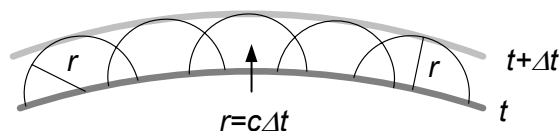
Vízfelületen létrehozott egyenes hullámok útjába olyan akadályt teszünk amelyen egy – a hullámhosszhoz képest – kis rés van, és a hullám csak ezen tud áthaladni. Az akadály túloldalán ekkor a résből kiinduló körhullámot látunk (ábra).



Ez a kísérlet azt mutatja, hogy a hullámfront kellően kicsi (pontszerű) szakasza valóban elemi gömbhullámot (a kísérletben körhullámot) kelt. Fontos megfigyelni, hogy a körhullám csak a hullámterjedés irányában jön létre, visszafelé induló körhullámot nem látunk.

A hullámterjedésnek ezen a tapasztalaton alapuló modelljét a *Huygens-elv* foglalja össze, amely szerint egy hullámfront minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, és a mindenkor új hullámfrontot az *elemi gömbhullámok burkolófelülete* adja. A burkolófelület megrajzolásánál a gömbfelületeknek a hullám eredeti terjedési irányába eső részét kell figyelembe venni.

A mellékelt ábrán az látható, hogy a t időpillanatban érvényes hullámfrontból hogyan lehet az elemi gömbhullámok (körhullámok) segítségével megszerkeszteni a $t + \Delta t$ időpillanatban érvényes hullámfrontot.



Példaként nézzük meg, hogy a Huygens-elv segítségével hogyan lehet számszerűen leírni a visszaverődés és törés szabályszerűségeit, amelyeket a fenti kísérletekben tapasztaltunk.

A visszaverődést az alábbi ábra *a)* részén láthatjuk, ahol egy felületre, a felület normálisával α_0 szög bezáró irányban egy síkhullám érkezik. Ezt abban a pillanatban ábrázoltuk, amikor a hullámfront egy pontja (*A*) éppen eléri a felületet. Az ábrán Δt idő múlva (amikor a hullámfront *B* pontja is elérte a felületet) megszerkesztettük a visszavert hullámfrontját a Huygens-elv segítségével. A hullám haladási iránya a visszaverődés után a

¹ Christiaan HUYGENS (1629-1695) holland fizikus.

felület normálisával α_v szöget zár be. Az ábráról leolvasható, hogy a beeső és visszavert hullám haladási iránya szimmetrikus a beesési merőlegesre, vagyis

$$\alpha_b = \alpha_v.$$

A visszaverődés itt tárgyalt törvényén alapul az optikában használt tükrök működése.

A *b)* ábrán az 1. közegben a felületre beeső hullám átmegy a 2. közegbe, ahol

haladási irányát a felület normálisával bezárt α_t *törési szöggel* adjuk meg. A két közegben a hullám terjedési sebessége eltérő: v_1 és v_2 . Az új hullámfrontot most a 2. közegben szerkesztettük meg. Az ábrából kiderül, hogy az új közegbe behatoló (a határfelületen átmenő) hullám törésére érvényes a

$$\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

összefüggés. Az így bevezetett n_{21} mennyiség a 2. közegnek az 1. közegre vonatkozó törésmutatója. Ezen a törvényen alapul számos optikai eszköz (pl. lencsék, prizma) működése.

A visszaverődés és törés törvényeinek megfogalmazásánál hasznos a hullám haladási irányát jellemző *sugarak* bevezetése. A sugár az a vonal amely mentén a hullám által szállított energia terjed. Ez izotróp közegben az azonos fázisú síkokra merőleges vonal, amely homogén közegben egyenes, inhomogén közegben megtört vagy görbe vonal. Így például homogén, izotróp közegben terjedő síkhullámban a sugarak az azonos fázisú síkokra merőleges, egymással párhuzamos egyenesek, gömbhullámban pedig a forrásból kiinduló sugárirányú egyenesek. A hullámnak egy véges felületen átmenő részét *sugárnyalábnak* nevezik (ez valóban a sugarak egy nyalábja).

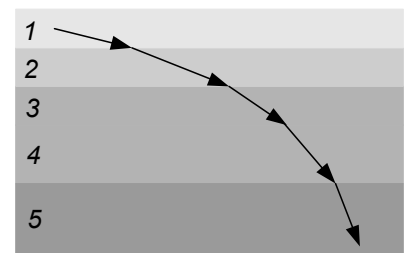
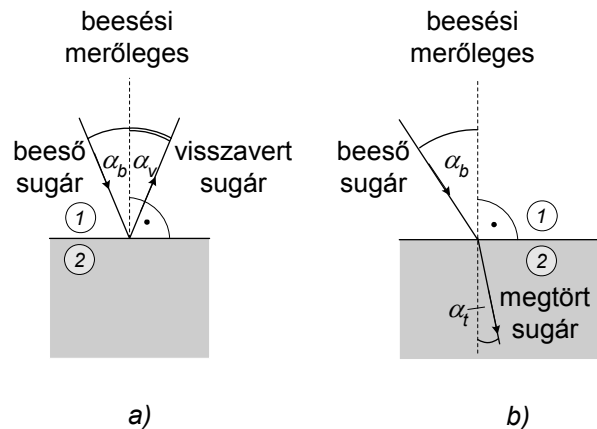
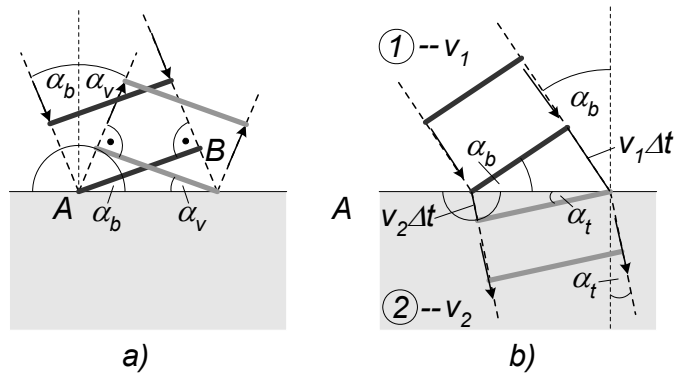
A visszaverődés és törés fent megállapított szabálya a sugarak segítségével is megfogalmazható. A visszaverődés törvénye ebben a megfogalmazásban úgy hangzik, hogy egy határoló felületre beeső sugár α_b beesési szöge (*a)* ábra)

megegyezik az α_v visszaverődési szöggel, és a beesési sugár a beesési merőlegessel és a visszavert sugárral egy síkban van. A törés törvénye pedig úgy fogalmazható meg, hogy a határfelületre beeső sugár α_b beesési szöge (*b)* ábra) és a határfelületen átmenő sugár α_t

törési szöge között a már tárgyalt $\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = n_{21}$ összefüggés

áll fenn, a beesési sugár a beesési merőlegessel és a megtört sugárral egy síkban van.

Ezek a törvények nagy mértékben megkönnyítik a törésen és visszaverődésen alapuló optikai eszközök (pl. prizmák, tükrök, lencsék) működésének megértését és tervezését.



Ha a közeg inhomogén, akkor a törésmutató változása miatt a sugarak iránya változik. Réteges közegben az irányváltozás többszörösen megtört sugarakat eredményez (ábra), folytonosan változó közegben a sugarak folyamatosan görbülő vonalak.

Visszaverődés és törés leírása a Fermat-elv segítségével

A visszaverődés és törés törvénye megkapható az ún. *Fermat-elv* segítségével, amely szerint két pont között egy hullámban felvett sugár mindig olyan útvonalon halad, amelyen az egyik pontból a másikba a *legrövidebb idő alatt* jut el.

Ez matematikailag az ábra jelöléseivel a következőképpen fogalmazható meg.

Az A és B pontok közötti útvonalon kiválasztott ds szakasz befutásához szükséges idő

$$dt = \frac{ds}{v},$$

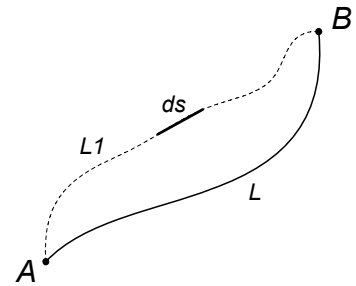
ahol v a hullám terjedési sebessége ezen a szakaszon. Az A és B közötti út befutásának ideje az $L1$ pályán

$$\tau_{AB}^{L1} = \int_A^B \frac{1}{v} ds$$

(integrálni azért kell, mert a sebesség függhet a helytől).

A Fermat-elv szerint a hullám azon az L úton halad, amelyre

$$\tau_{AB}^L = \int_A^B \frac{1}{v} ds = \text{minimum}.$$



Ez az eddigi problémákhoz képest újszerű feladat: nem egy integrált kell meghatározni, hanem egy útvonalat, amelynél az integrál minimális (matematikailag ez egy ún. variációs számítási feladat).

Az elv az optikában a fényút meghatározására használható, és más módon szokták megfogalmazni. Ha egy választott referencia közegben a hullám terjedési sebessége v_0 , akkor a vizsgált közeg abszolút törésmutatója

$n = \frac{v_0}{v}$ így $\frac{1}{v} = \frac{n}{v_0}$. Ezzel a futási időre a

$$dt = \frac{1}{v_0} n ds$$

kifejezést kapjuk. Az itt szereplő $n ds$ mennyiséget optikai úthossznak nevezik, és ezzel az A és B pontok közötti futási idő egy L pályán

$$\tau_{AB}^L = \frac{1}{v_0} \int_A^B n ds.$$

Mivel v_0 állandó, a Fermat-elv a

$$\tau_{AB}^L = \int_A^B n ds = \text{minimum}$$

alakba írható, vagyis a hullám úgy halad, hogy az optikai úthossza a lehető legkisebb legyen.

Hullámterjedés homogén közegben

Az elv alapján könnyen belátható, hogy homogén közegben a hullám egyenes vonalban terjed, hiszen ekkor

$$\tau_{AB}^L = \int_A^B \frac{1}{v} ds = \frac{1}{v} \int_A^B ds = \text{minimum} .$$

Ekkor tehát az A és B pontokat összekötő vonal hosszának kell minimálisnak lenni, ez a vonal pedig a két pontot összekötő egyenes.

Hullámterjedés közeghatáron történő áthaladásnál

Könnyen levezethető a Huygens-elvvel korábban már megkapott törési törvény is. Két különböző közegben lévő A és B pontok között a hullám haladási ideje az ábra jelöléseivel az alábbi módon írható fel

$$\tau_{AB} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} .$$

Az x -koordinátával kifejezve

$$\tau_{AB} = \frac{\sqrt{a^2 + (x - x_A)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (x_B - x)^2}}{v_2} .$$

A feladat a valódi útnak megfelelő x koordináta és abból az α_b beesési- illetve α_t törési szög meghatározása.

A Fermat-elv szerint a valódi úton τ_{AB} minimális, vagyis

$$\frac{d\tau_{AB}}{dx} = 0 .$$

A differenciálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\tau_{AB}}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x - x_A}{\sqrt{a^2 + (x - x_A)^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{x_B - x}{\sqrt{b^2 + (x_B - x)^2}} = 0 .$$

Felhasználva, hogy

$$\sin \alpha_b = \frac{x - x_A}{\sqrt{a^2 + (x - x_A)^2}} \quad \text{és} \quad \sin \alpha_t = \frac{x_B - x}{\sqrt{b^2 + (x_B - x)^2}} ,$$

végül valóban az ismert

$$\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = \frac{v_1}{v_2}$$

törési törvényt kapjuk.

Hullámterjedés közeghatárról történő visszaverődésnél

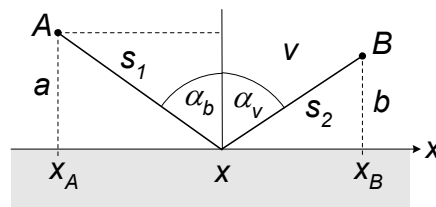
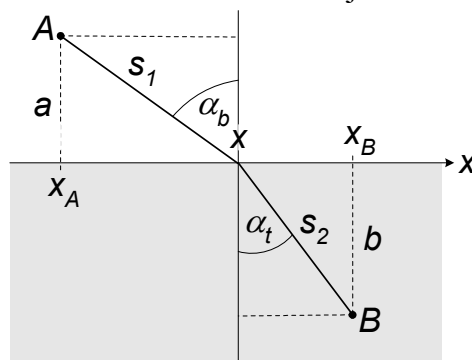
A visszaverődésre vonatkozó törvény a mellékelt ábra alapján teljesen hasonló módon kapható meg, ha az α_t törési szöveget az α_v visszaverődési szöggel helyettesítjük, és figyelembe vesszük, hogy a hullám a visszaverődés után is ugyanabban a közegben terjed, vagyis $v_1 = v_2 = v$.

Ekkor a

$$\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = 1$$

összefüggést kapjuk, amiből következik, hogy

$$\alpha_b = \alpha_v .$$



A visszaverődési és törési törvény levezetése a hullámfüggvény segítségével

A visszaverődés és törés törvényét már levezettük a Huygens-elv és a Fermat-elv segítségével. Most bemutatjuk, hogy hogyan lehet tárgyalni a közeghatárhoz érkező hullám viselkedését a hullámfüggvény segítségével.

Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy az 1 és 2 közeget elválasztó határfelület az xz -síkba-, a beeső hullám \mathbf{k}_b hullámszám-vektora pedig az xy -síkba essen (ábra). Az xy -síkot *beesési síknak* nevezik.

A beérkező hullámot harmonikus síkhullámnak tételezzük fel, amelynek hullámfüggvénye

$$\psi_b(\mathbf{r}, t) = A_b \cos(\omega t - \mathbf{k}_b \mathbf{r}).$$

A tapasztalat szerint, ha egy harmonikus síkhullám megérkezik a két közeget elválasztó határfelületre, akkor a beeső hullám mellett keletkezik egy visszavert- és egy áteresztett (megtört) síkhullám is, amelyeknek hullámfüggvénye

$$\psi_v(\mathbf{r}, t) = A_v \cos(\omega t - \mathbf{k}_v \mathbf{r})$$

illetve

$$\psi_t(\mathbf{r}, t) = A_t \cos(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r}).$$

Itt \mathbf{k}_v és \mathbf{k}_t a visszavert- és az átmenő hullám hullámszám-vektora.

Mivel a közeghatár két oldalán terjedő hullámok a felületen azonos változást okoznak, a hullámfüggvényekre a felületen fennáll, hogy

$$\psi_b(\mathbf{r}, t) + \psi_v(\mathbf{r}, t) = \psi_t(\mathbf{r}, t).$$

Mivel a zavarok a felület minden pontján, minden pillanatban azonosak, a hullámok fázisa itt nem különbözhet egymástól, vagyis

$$\omega t - \mathbf{k}_b \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k}_v \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r}.$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbf{k}_b \mathbf{r} = \mathbf{k}_v \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \mathbf{r}.$$

Az itt szereplő vektorok komponensei a következők:

$\mathbf{r}(x, 0, z)$, mert a határfelületen vagyunk, és ez az xz síkban van,

$\mathbf{k}_b(k_{bx}, k_{by}, 0)$, mert a koordináta-rendszer választása miatt az xy síkban van,

$\mathbf{k}_v(k_{vx}, k_{vy}, k_{vz})$, mert ennek irányát nem tudjuk,

$\mathbf{k}_t(k_{tx}, k_{ty}, k_{tz})$, mert ennek irányát sem tudjuk.

A fázisok egyenlőségéből két független egyenletet kapunk:

$$\mathbf{k}_b \mathbf{r} = \mathbf{k}_v \mathbf{r} \quad \text{és} \quad \mathbf{k}_b \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \mathbf{r}.$$

Behelyettesítve a vektorok komponenseit, az alábbi összefüggéseket kapjuk

$$k_{bx}x = k_{vx}x + k_{vz}z$$

$$k_{bx}x = k_{tx}x + k_{tz}z,$$

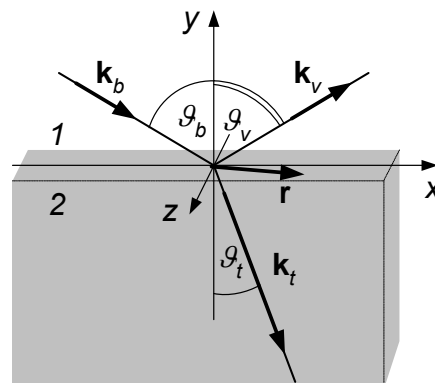
átrendezés után pedig

$$(k_{bx} - k_{vx})x - k_{vz}z = 0$$

$$(k_{bx} - k_{tx})x - k_{tz}z = 0.$$

Mivel x és z tetszőleges, ezek az egyenletek csak úgy állhatnak fenn, ha x és z együtthatói nullák. Ebből egyrészt az következik, hogy

$$k_{vz} = k_{tz} = 0,$$



tehát a visszavert és átmenő hullámok hullámszám-vektorai (\mathbf{k}_v és \mathbf{k}_t) az xy síkban vannak. Másrészt

$$k_{bx} = k_{vx}$$

$$k_{bx} = k_{tx}$$

Utóbbi két egyenlet a

$$k_b \sin \vartheta_b = k_v \sin \vartheta_v$$

$$k_b \sin \vartheta_b = k_t \sin \vartheta_t$$

alakba is átírható.

Mivel a beeső- és a visszavert hullám is az I közegben terjed, hullámszám vektoraik megegyeznek ($k_b = k_v = \frac{\omega}{v_1}$), ezért az első egyenlet azt jelenti, hogy $\sin \vartheta_b = \sin \vartheta_v$, tehát megkapjuk a visszaverődés ismert

$$\vartheta_b = \vartheta_v$$

törvényét.

A második egyenletből pedig a $k_b = \frac{\omega}{v_1}$, $k_t = \frac{\omega}{v_2}$ összefüggések felhasználásával a szintén a jól ismert törési törvényt kapjuk:

$$\frac{\sin \vartheta_b}{\sin \vartheta_t} = \frac{k''}{k} = \frac{v_1}{v_2}$$

Az ismert összefüggések mellett ebből a levezetéséből az is kiderül, hogy ha a hullám terjedését a hullámszám-vektorokkal párhuzamos *sugarakkal* írjuk le, akkor a fenti eredményt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a beeső, a visszavert és áteresztett sugár is a beesési síkban van.

Intenzitásviszonyok határfelületről történő visszaverődésnél és határfelületen történő áthaladásnál

A törésre és visszaverődésre vonatkozó fenti megfontolásokból az is következik, hogy a határfelületen a beeső-, visszavert- és áteresztett hullámok amplitúdóira fennáll, hogy

$$A_b + A_v = A_t$$

Ahhoz, hogy az amplitúdókat meg tudjuk határozni, a határfelületen való áthaladásnál további fizikai összefüggésre van szükségünk. Felhasználhatjuk az energiamegmaradás tételét, amely szerint a beeső intenzitás (I_b) megegyezik a visszavert (I_v) és az áteresztett (I_t) intenzitások összegével:

$$I_b = I_v + I_t$$

Behelyettesítve az intenzitásokra érvényes

$$I_b = \frac{1}{2} \rho_1 A_b^2 \omega^2 v_1$$

$$I_b = \frac{1}{2} \rho_1 A_v^2 \omega^2 v_1$$

$$I_b = \frac{1}{2} \rho_2 A_t^2 \omega^2 v_2$$

kifejezéseket, az alábbi egyenletet kapjuk

$$\rho_1 v_1 (A_b^2 - A_v^2) = \rho_2 v_2 A_t^2$$

Ez az

$$A_b + A_v = A_t$$

egyenlettel együtt lehetőséget ad az ismeretlen A_v és A_t amplitúdók meghatározására. A két közeg sűrűségét (ρ_1, ρ_2), a hullámok terjedési sebességét a két közegben (v_1, v_2) és a beeső hullám amplitúdóját (A_b) ismertnek tételezzük fel.

A két egyenletből pl. A_v -re másodfokú egyenletet kapunk, amelyből a visszavert amplitúdó:

$$A_v = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A_b.$$

Ennek felhasználásával az áteresztett hullám amplitúdójára azt kapjuk, hogy

$$A_t = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2} A_b.$$

A hanghullámok vizsgálatánál hasznos egy közeg *hullám-impedanciájának* vagy *akusztikai keménységének* bevezetése, amelynek definíciója:

$$z = \rho v.$$

Az elnevezés onnan származik, hogy ez a mennyiség a hullámterjedésnél formálisan a váltóáramú áramkörökben használt impedanciához hasonló szerepet játszik. Ezzel az amplitúdók:

$$A_v = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

$$A_t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}.$$

A hullámterjedésnél fontos lehet a hullám által szállított energia visszavert illetve átment hányadának ismerete, amit az R *reflexiós-* illetve a T *transzmissziós tényezővel* szokás megadni. Ezeket az intenzitásokkal definiálják:

$$R = \frac{I_v}{I_b} = \frac{\frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 v_1 A_v^2}{\frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 v_1 A_b^2} = \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2}$$

$$T = \frac{I_t}{I_b} = \frac{I_b - I_v}{I_b} = 1 - \frac{I_v}{I_b} = 1 - R = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}.$$

Ezekből a kifejezésekből látható, hogy a $z_1 \ll z_2$ illetve $z_1 \gg z_2$ esetekben $T \approx 0$ és $R \approx 1$, vagyis a hullám gyakorlatilag nem hatol be a második közegbe, hanem visszaverődik onnan. Ez az eset áll elő például, ha egy hanghullám levegő és szilárd anyag határához érkezik, hiszen az akusztikai keménységek nagyságrendje:

$z_{\text{szilárd}} \approx 10^7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$, $z_{\text{gáz}} \approx 10^2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$). Ha azt akarjuk, hogy a hang behatoljon a másik közegbe, egy

átmeneti folyadékra célszerű alkalmazni $z_{\text{folyadék}} \approx 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$.

Ha a két közeg akusztikai ellenállása közel azonos ($z_1 \approx z_2$), akkor a hullám majdnem teljesen áthalad a határon, és gyakorlatilag nincs visszavert hullám.

Hullámok találkozása, interferencia

Ha a tér egy pontjában két hullám van jelen, akkor hatásuk ott valamilyen módon összegződik. A hullámok összeadódását *interferenciának* nevezik.

Ha a szuperpozíció elve érvényes (és szélsőséges esetektől eltekintve általában érvényes), akkor adott helyen (\mathbf{r}), a hullámok által okozott változás minden időpillanatban (t) a két hullám által külön-külön okozott változások összege, vagyis a két hullámfüggvény egyszerűen összeadható:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t).$$

Ezt a feltevést elfogadva, most az interferencia néhány egyszerű esetével foglalkozunk: megvizsgáljuk pontszerű forrásokban keltett gömbhullámok (két dimenzióban körhullámok)- és rugalmas kötélben terjedő, egydimenziós hullámok interferenciáját.

Egy-egy pontforrásban keltett két gömbhullám interferenciája

Általános következtetések levonására is alkalmas példaként vizsgáljuk meg két pontforrásból induló, azonos ω körfrekvenciájú, harmonikus gömbhullám (vagy körhullám) interferenciáját.

Az amplitúdó térbeli eloszlása, az interferenciakép

Tegyük fel, hogy az ábrán látható O_1 és O_2 forrásokban létrehozott két rezgés amplitúdója különböző, és köztük φ fáziskülönbség van, így a rezgések időfüggését az

$$f_1(t) = A_1 \cos \omega t$$

$$f_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

függvényekkel adhatjuk meg.

Ha feltételezzük, hogy a vizsgált térrészben a hullámok amplitúdójának csökkenése még nem számottevő, akkor a két hullám hullámfüggvénye

$$\psi_1(r_1, t) = A_1 \cos(\omega t - kr_1)$$

$$\psi_2(r_2, t) = A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \varphi)$$

alakban írható fel. Az interferencia eredményét egy tetszőlegesen választott P pontban számítjuk ki.

Az eredő hullám a P pontban a szuperpozíció elve szerint:

$$\psi(P, t) = \psi_1(r_1, t) + \psi_2(r_2, t).$$

Ez áttekinthetőbb alakban írható fel, ha felhasználjuk a rezgések összegzésénél a forgóvektoros módszerrel kapott összefüggést:

$$A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

ahol

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

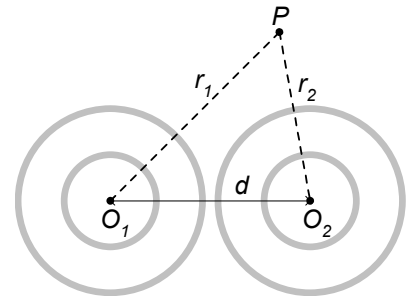
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

Most az $\alpha_1 = -kr_1$ és $\alpha_2 = -kr_2 + \varphi$ fázisszögek adott helyen állandók, így α is az.

Ezzel az eredő hullám:

$$\psi(P, t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)} \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

A P pontban tehát ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés jön létre (a kifejezés második tényezője), amelynek amplitúdója (az első tényező) a helytől függ:



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)} = A(P) = A(r_1, r_2).$$

Az amplitúdó maximális lesz akkor, ha a négyzetgyök alatti kifejezés maximális, vagyis ha $\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi) = +1$. Ekkor $A_{max} = A_1 + A_2$, vagyis a két hullám amplitúdója összeadódik. A koszinusz függvény tulajdonságaiból következik, hogy maximális amplitúdó ott alakul ki, ahol

$$kr_1 - kr_2 + \varphi = \pm n2\pi,$$

vagyis a két hullám által a találkozásukig megtett utak $\Delta s_{max} = r_1 - r_2$ különbsége:

$$\Delta s_{max} = \pm n\lambda - \frac{\varphi}{2\pi} \lambda \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Hasonlóan belátható, hogy a minimális amplitúdó $A_{min} = A_1 - A_2$, amely azokon a helyeken jön létre, ahol a hullámok közötti útkülönbség

$$\Delta s_{min} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{\pi} \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Ha a hullámok között nincs fáziskülönbség ($\varphi=0$), akkor a két feltétel egyszerűbben megfogalmazható:

maximális amplitúdó ott jön létre, ahol a két hullám Δs útkülönbsége a *hullámhossz* egész számú többszöröse: $\Delta s_{max} = \pm n\lambda$

minimális amplitúdó pedig ott, ahol az útkülönbség a *félhullámhossz* páratlan számú többszöröse: $\Delta s_{min} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}$.

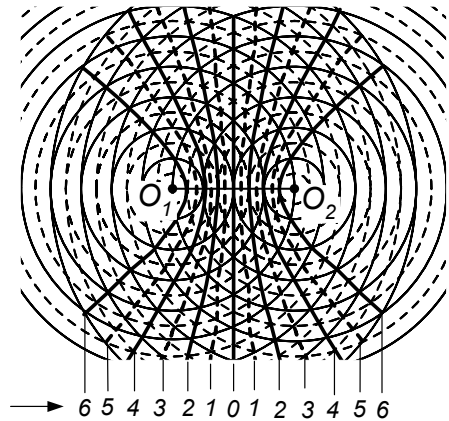
Ha a φ fáziskülönbség időben állandó, akkor a fenti egyenletekből azt kapjuk, hogy a maximális és minimális amplitúdójú (intenzitású) helyek síkban terjedő hullámoknál egy-egy időben állandó helyzetű hiperbola-seregen helyezkednek el, hiszen az $r_1 - r_2 = \text{állandó}$ összefüggés hiperbola egyenlete.

Az ábrán a $\varphi = 0$ eset látható. A két forrásból kiinduló körhullámok maximális amplitúdójú vonalait folytonos körök, a minimális amplitúdójú helyeket szaggatott vonallal rajzolt körök mutatják. Vastag vonalak jelzik az $|r_1 - r_2| = m\frac{\lambda}{2}$ feltételnek megfelelő

hiperbolákat. A maximális amplitúdójú helyek az $m = 0, 2, 4, 6$ értékeknek megfelelő folytonos vonalakon találhatóak. A két hullám útkülönbsége ezeken a helyeken a hullámhossz egész számú többszöröse. A minimális amplitúdójú helyek az $m = 1, 3, 5$ értékeknek megfelelő szaggatott vonalakon helyezkednek el. Itt az útkülönbség a félhullámhossz páratlan számú többszöröse.

Ha $\varphi \neq 0$, de állandó, akkor is hiperbolákat kapunk, csak ezek az ábrán látható hiperbolákhoz képest eltolt helyzetűek lesznek.

Térbeli terjedés (gömbhullámok) esetén a maximális és minimális amplitúdójú helyek forgási hiperboloidokon helyezkednek el, amelyeket a fenti hiperboláknak az $O_1 - O_2$ egyenes körül történő forgatásával kapunk meg.



Intenzitáseloszlás a forrásoktól távol

Az intenzitáseloszlás egyszerűen kiszámítható, ha a pontforrásoktól nagy távolságban, a forrásokat összekötő egyenessel párhuzamos egyenes (az ábrán az x -tengely) mentén vizsgáljuk, és az interferenciát csak kis x -tartományban vizsgáljuk (a ϑ szög kicsi). Ekkor a mellékelt szematikus ábra jelöléseivel azt kapjuk, hogy

$$\sin \vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = \frac{x}{D}$$

illetve

$$\sin \vartheta \approx \frac{r_1 - r_2}{d}.$$

Ebből az

$$x \approx \frac{r_1 - r_2}{d} D$$

közelítő összefüggést kapjuk.

A maximumhelyek x -koordinátái eszerint

$$x_n^{\max} \approx \pm n \frac{\lambda}{d} D,$$

a minimumhelyeké pedig

$$x_n^{\min} \approx \pm (2n + 1) \frac{\lambda}{2d} D.$$

Ezek az összefüggések akkor használhatók, ha x és d sokkal kisebb, mint D , vagyis a források egymástól mért távolsága kicsi, a megfigyelés helye a forrásoktól távol van, és az interferenciát csak az O centrum közelében vizsgáljuk.

Az $r_1 - r_2 \approx a \sin \vartheta$ összefüggést felhasználva az intenzitás szögfüggése az

$$I = 2I_0(1 + \cos(kr_1 - kr_2)) = 2I_0(1 + \cos(kd \sin \vartheta)) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi d \sin \vartheta}{\lambda} \right) \right)$$

alakba írható.

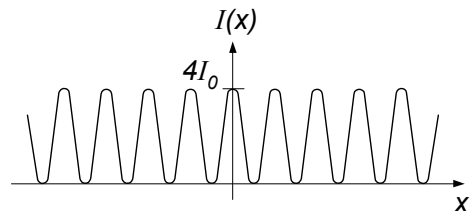
Ez tovább egyszerűsíthető, ha felhasználjuk az $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ trigonometriai összefüggést:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi a \sin \vartheta}{\lambda} \right).$$

Az $x \approx \frac{r_1 - r_2}{d} D \approx D \sin \vartheta$ összefüggés segítségével az intenzitás helyfüggésére is kaphatunk egy egyszerűbb kifejezést:

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{D\lambda} x \right).$$

Az intenzitás tehát az ernyőn periodikusan változik, maximális értéke az összetevő hullámok intenzitásának 4-szerese (ábra).



Ha az interferenciaképen megmérjük a maximális amplitúdójú helyek Δx távolságát akkor meghatározhatjuk a két forrásban keltett hullámok hullámhosszát. Erre a

$$\Delta x = x_{n+1}^{\max} - x_n^{\max} = \frac{\lambda D}{d}$$

összefüggés ad lehetőséget, amiből a hullámhosszra azt kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{d\Delta x}{D}.$$

Ha tehát ismerjük a források egymástól mért d távolságát és a megfigyelés síkjának a forrásoktól mért D távolságát, akkor a Δx távolság mérésével a hullámhossz meghatározható. Ez a lehetőség különösen fontos az optikában, ahol a hullámhossz közvetlen megfigyeléssel nem határozható meg. Az ábrán szematikusan azt is feltüntettük, hogy ha a két hullámforrást összekötő egyenessel párhuzamosan haladunk, akkor az amplitúdó jellegzetes – maximumok és minimumok sorozatából álló – helyfüggést mutat.

A két pontforrásból induló körhullámok interferenciája vízhullám kísérletekkel jól szemléltethető.

KÍSÉRLET:

Vízfelület két pontjában egyidejűleg azonos fázisú rezgéseket keltünk, és megfigyeljük a keletkező körhullámok interferenciáját (ábra). Az interferenciaképen jól láthatók azok a vonalak, amelyeken a maximális- és minimális amplitúdójú helyek találhatóak (a középre berajzolt függőleges vonal maximumhelyeket jelöl ki).



A hullámok interferenciájánál kialakuló jellegzetes, állandósult amplitúdó-helyfüggést *interferenciaképek* nevezik. Állandósult interferenciakép azonban csak akkor alakul ki, ha a hullámok közötti fáziskülönbség időben nem változik. Az állandó fáziskülönbségű – tehát állandósult interferenciaképet létrehozó – hullámokat *koherens hullámoknak* nevezik. Interferencia természetesen akkor is létrejön, ha az interferáló hullámok fáziskülönbsége

nem állandó, de ekkor többnyire az interferenciakép is olyan gyorsan változik, hogy nem figyelhető meg.

Az eredő hullám amplitúdójának helyfüggésére vonatkozó egyenletet négyzetre emelve, az $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi)$ összefüggést kapjuk. Korábban már volt róla szó, hogy a hullám által szállított energia áramsűrűsége, az I intenzitás, az amplitúdó négyzetével arányos, vagyis a találkozó hullámokra és az eredő hullámra fennállnak az alábbi összefüggések:

$$I_1 = CA_1^2, \quad I_2 = CA_2^2, \quad I = CA^2.$$

Ezeket az összefüggéseket figyelembe véve, az amplitúdóra vonatkozó egyenletből az intenzitásokra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi).$$

Az interferenciánál tehát az eredő hullám I intenzitása nem egyszerűen az interferáló hullámok I_1 és I_2 intenzitásainak összege, hanem megjelenik egy – a helytől és a hullámok fáziskülönbségétől függő – *interferencia-tag*.

Ha a φ fáziskülönbség időben változik, azaz $\varphi = \varphi(t)$, akkor adott helyen (r_1, r_2) a találkozó hullámok eredő intenzitása is függni fog az időtől

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos(kr_1 - kr_2 + \varphi(t)) = I(r_1, r_2, t).$$

Ha tehát a hullámok nem koherensek, akkor az intenzitás-eloszlás időben változó lesz, vagyis nem alakul ki állandósult interferenciakép.

Ha a fáziskülönbség minden szabályszerűség nélkül, véletlenszerűen, és a megfigyelő (vagy a mérőeszköz) reakcióidejéhez képest gyorsan változik, akkor a megfigyelő az átlagos intenzitást észleli. Mivel ekkor az interferencia-tagban szereplő $\cos(kr_1 - kr_2 + \varphi(t))$ időbeli átlaga nulla, a megfigyelt intenzitás a két hullám intenzitásának összege lesz: $I = I_1 + I_2$. Ilyenkor interferenciakép helyett egyenletes intenzitás-eloszlást észlelünk. (Ez az oka annak, hogy két közönséges lámpa fényének interferenciáját nem észleljük: a lámpák fényében a hullámok fáziskülönbsége véletlenszerűen változik, két ilyen lámpa nem koherens fényforrás.)

A két pontforrásban keltett gömbhullámok interferenciájával kapcsolatban még egy kérdést érdemes tisztázni. Eddig nem foglalkoztunk azzal, hogy hogyan befolyásolja az interferenciát a hullámforrások egymástól mért d távolsága. Nyilvánvaló, hogy a két hullám útkülönbsége nem lehet nagyobb, mint a d távolság. Ebből következik, hogy d csökkenésével egyre kevesebb olyan hiperbola lesz, amelyen teljesül az $|r_1 - r_2| = m \frac{\lambda}{2}$ feltétel, vagyis csökken a maximális- és minimális amplitúdójú helyeket megadó hiperbolák száma. Ez az interferenciaképet megváltoztatja.

Ha elérjük a $\frac{\lambda}{2} < d < \lambda$ értéket, akkor a fenti feltételnek már csak három útkülönbség felel meg: a $-\frac{\lambda}{2}$, a 0 és a $+\frac{\lambda}{2}$, vagyis középen lesz egy maximumhelyeket összekötő egyenes és két minimumhelyeket összekötő hiperbola. Ha a források távolságát tovább csökkentjük, és elérjük a $d < \frac{\lambda}{2}$ értéket, akkor ez a két minimum-hiperbola is eltűnik, mert a gyengítés feltétele sehol nem teljesül.

A távolság további csökkenésénél a hullámtér bármely pontján egyre kisebb lesz a hullámok útkülönbsége, és a jellegzetes interferencia nem észlelhető: a két pontforrás olyan hullámot hoz létre, mintha csak egyetlen forrás volna.

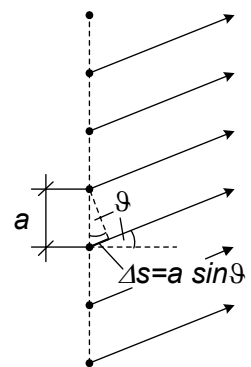
Pontforrás-sor által keltett hullámok interferenciája

Sok pontforrásból induló, azonos frekvenciájú és amplitúdójú gömbhullámok interferenciáját abban az egyszerű esetben vizsgáljuk, amikor a pontforrások egy egyenes mentén egymástól azonos a távolságban helyezkednek el (ábra), nincs közöttük fáziskülönbség, és az interferenciát a forrásoktól nagyon nagy (elvileg végtelen) távolságban vizsgáljuk.

Ilyenkor az egyes pontokból kiinduló hullámok akkor erősítik egymást, ha az útkülönbségük a hullámhossz egész számú többszöröse. Az ábrából látható, hogy ez olyan irányokban teljesül, amelyekre fennáll, hogy

$$\Delta s_n = a \sin \vartheta_n = n\lambda,$$

Azaz
$$\sin \vartheta_n = n \frac{\lambda}{a}.$$



Mivel a hullámok amplitúdója azonos, a maximális amplitúdó – a két pontforrás esetéhez hasonlóan – az egyes amplitúdók összege lesz. Ha N számú, A amplitúdójú pontforrás van,

akkor $A_{max} = NA$ (Ennek megfelelően a maximális amplitúdójú irányokban az intenzitás $I_{max} = N^2 I$ ahol I az egyes forrásokból érkező hullámok intenzitása).

A maximális amplitúdójú irányok között minimális (esetünkben nulla) amplitúdójú irányok találhatók, így a pontforrásokat összekötő egyenessel párhuzamosan haladva – a két pontforrás esetéhez hasonlóan – az amplitúdó periodikus térbeli változását tapasztaljuk.

A mellékelt ábrán a különböző

$$n = \frac{a \sin \vartheta}{\lambda}$$

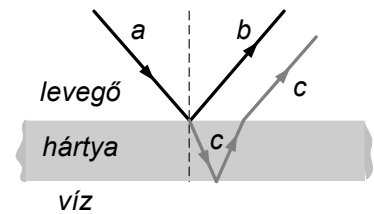
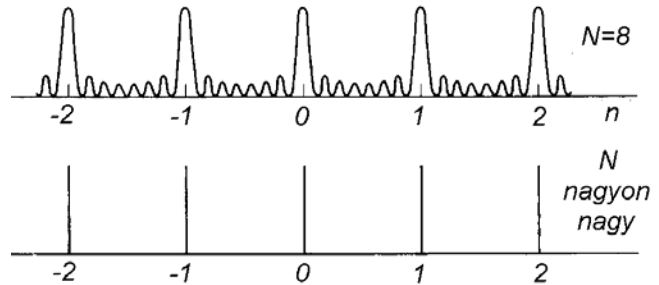
értékekhez tartozó

maximális intenzitások láthatók

különböző számú (N) pontforrás esetén.

Az $N=8$ -nak megfelelő ábra a fenti számítással nem egyezik. Ennek az az oka, hogy az eredő hullám amplitúdóját nem számítottuk ki, így csak a főmaximumok helyét tudtuk meghatározni. Ha a hullámokat valóban összegezzük (pl. a forgóvektoros módszerrel), akkor kiderül, hogy a főmaximumok között jóval kisebb amplitúdójú mellékmaximumok is vannak. Ezek intenzitása a források számának növelésével csökken: igen nagy számú forrás esetén a fenti ábra alsó részén látható, mellékmaximumok nélküli eloszlást kapjuk.

Az interferencia látványos megnyilvánulása az, hogy vékony hártáyról (pl. olajréteg a víz felületén) visszaverődő fényben színes csíkokat látunk. Ezt a hártya két oldaláról visszaverődő fényhullámok interferenciája okozza (ábra): a hártýáról a szemünkbe érkező b és c fényhullámok között útkülönbség van, ami függ attól, hogy milyen szög alatt nézünk a hártýára. Egy adott szög esetén az erősítés feltétele (az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse) csak egy bizonyos hullámhosszra (színre) teljesül, így ebből az irányból ezt a színt látjuk. A hártya különböző pontjairól – tehát különböző szög alatt – a szemünkbe érkező fénynél az erősítés feltétele különböző hullámhosszokra teljesül, ezért látunk különböző színű sávokat.



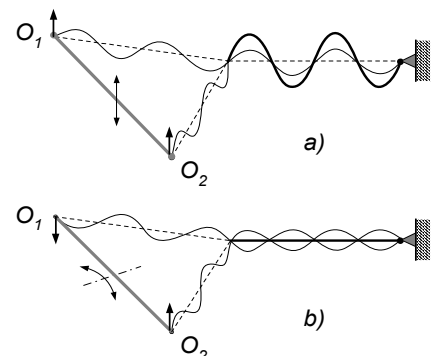
Egy egyenes mentén egy irányban terjedő két harmonikus síkhullám interferenciája

A hullámok interferenciájának gyakori esete az, amikor az összetalálkozó két síkhullám ugyanazon egyenes mentén terjed. Vizsgáljuk meg az interferenciát abban az egyszerű esetben, amikor a közeg homogén, és a hullámok frekvenciája (és hullámhossza) azonos. Példaként ismét egy rugalmas kötélén terjedő transzverzális hullám szolgál.

KÍSÉRLET:

Egy Y alakban kiképezett rugalmas kötél szarát rögzítjük (ábra), és két azonos hosszúságú ágának O_1 és O_2 végén rezgetéssel hullámokat keltünk. A hullámok az ágak végigfutva közös szakaszon haladnak tovább, és összegződnek.

Ha az Y két végét az összekötő rúd segítségével azonos fázisban rezgetjük (a) ábra), akkor a közös szakaszon az amplitúdók összeadódnak, ellenkező fázisban történő rezgetésnél (b) ábra) a közös részen a hullámok kioltják egymást. Az ábrán az eredő hullámot vastag vonal jelzi.

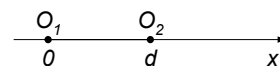


A kísérletről látszik, hogy a hullámok interferenciája egyaránt vezethet a hullám amplitúdójának növekedéséhez és csökkenéséhez (sőt eltűnéséhez)¹. Az a tény, hogy két hullám összeadása a hullám megszűnését eredményezheti, a hullámok jellegzetes tulajdonsága.

A megfigyelt erősítés azzal magyarázható, hogy az azonos fázisú források esetén a két azonos utat befutott hullám azonos fázisban találkozik, így a rezgések a közös részen mindenütt azonos fázisban zajlanak, és erősítik egymást, a rezgési amplitúdók mindenütt összeadódnak. A gyengítés oka az, hogy az ellenkező fázisú forrásból jövő hullámok ellenkező fázisban találkoznak, így a rezgések mindenütt ellenkező fázisúak, és gyengítik (azonos amplitúdó esetén kioltják) egymást.

Az interferenciának ezt az esetét egyszerűen tárgyalhatjuk, ha a két pontforrásra vonatkozó számítás speciális estének tekintjük, és az interferenciát csak a két pontforrást összekötő egyenes mentén vizsgáljuk.

Ha az x -tengelyt az $O_1 - O_2$ egyenesen vesszük fel, és a nulla pont az O_1 forrás helyén van (ábra), akkor a két pontforrásra vonatkozó egyenletekből az $r_1 = x$, $r_2 = x - d$ helyettesítéssel kapjuk a síkhullámokra vonatkozó eredményt.



Eszerint az erősítés feltétele:

$$d = \pm n\lambda - \frac{\varphi}{2\pi} \lambda \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

a gyengítésé pedig

$$d = \pm(2n + 1)\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{\pi} \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Érdekes két speciális eset megvizsgálni:

ha a hullámok között *nincs útkülönbség* (mint a korábban leírt kísérletben), akkor $d = 0$, tehát a hullámok akkor erősítik egymást, ha fáziskülönbségük $\varphi = \pm n2\pi$ (a kísérletben $n = \varphi = 0$ volt), és akkor gyengítik egymást ha $\varphi = \pm(2n + 1)\pi$ (a kísérletben $\varphi = \pi$ volt),

ha a hullámok között *nincs fáziskülönbség*, akkor $\varphi = 0$, tehát a hullámok akkor erősítik egymást, ha az útkülönbségük $d = n\lambda$, és akkor gyengítik egymást, ha $d = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$.

Közeghatár felé haladó- és visszaverődő síkhullámok interferenciája, állóhullámok

Eddig feltételeztük, hogy az egymással kölcsönhatásba lépő hullámok olyan nagy méretű közegben terjednek, hogy a közeghatárról való visszaverődés elhanyagolható. Ez a valóságban általában nem így van (emlékezzünk az előző pontban ismertetett kísérletre, ahol ebből bonyodalmak származtak). Mivel ez elvileg és gyakorlatilag egyaránt fontos eset, most megvizsgáljuk egy határfelület felé haladó- és az onnan visszaverődő síkhullámok találkozásánál fellépő interferenciát.

A kialakuló hullámkép nagyon jól szemléltethető rugalmas kötélen terjedő hullámokkal.

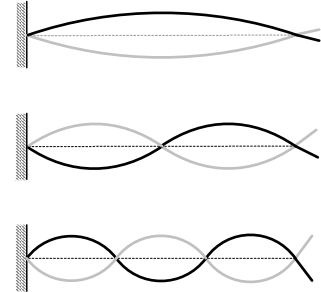
¹ Mint korábbi kötélmű-kísérleteinknél is előfordult, a rögzített végről történő visszaverődés miatt itt is állóhullámok jönnek létre, amelyekkel később foglalkozunk. Ez azonban a levont következtetéseket nem befolyásolja.

KÍSÉRLET:

Rugalmas kötel egyik végét rögzítjük, másik végét megfogjuk, és lassú rezgésbe hozzuk. Ekkor a kötélvég felé haladó és onnan visszaverődő hullámok interferenciája általában rendszertelen hullámzást eredményez.

Ha a rezgetés frekvenciáját növeljük, akkor bizonyos frekvenciáknál sajátos hullámalakzatok jönnek létre. Vannak helyek amelyeknek a kitérése mindig nulla, ezek a *csomópontok*. A közöttük elhelyezkedő kötélszakaszokon mindenegyik pont ugyanolyan fázisban rezeg, de az amplitúdó a hely függvényében változik. Nincs rezgés a csomópontokban, és maximális amplitúdójú rezgés van a csomópontok közötti szakaszok felezőpontjában, ezeket *duzzadóhelyeknek* nevezik.

Az ábrán feltüntettünk néhány jellegzetes hullámalakzatot.



A kísérletben kialakult hullámalakzat sajátossága az, hogy – szemben a zavartalanul terjedő hullámmal – az azonos fázisú helyek nem mozognak, a kötel úgy viselkedik, mintha nem is terjedne benne hullám. Ezt a hullámalakzatot ezért *állóhullámnak* nevezik. (Az eddig tárgyalt hullámokat megkülönböztetésül gyakran *haladó hullámoknak* hívják.)

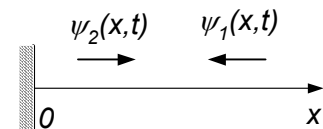
A jelenséget a közegethatár felé haladó és onnan visszavert hullámok interferenciájának vizsgálatával értelmezhetjük.

Tegyük fel, hogy a kötélen egy harmonikus síkhullám ($\psi_1(x,t)$) az x -tengellyel szemben, a *rögzített kötélvég* felé mozog, és visszaverődése következtében létrejön egy másik ($\psi_2(x,t)$) hullám, amely az x -tengely irányában halad (ábra). A két hullám hullámfüggvényei:

$$\psi_1(x,t) = A_1 \sin(\omega t + kx)$$

$$\psi_2(x,t) = A_2 \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Az eredő hullám a szuperpozíció elve alapján



$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) = A_1 \sin(\omega t + kx) + A_2 \sin(\omega t - kx + \alpha).$$

Tudjuk, hogy a közegethatárnál (rögzített vég) a hullám terjedésére vonatkozóan teljesülni kell bizonyos feltételeknek, amelyeket általában *határfeltételeknek* vagy *peremfeltételeknek* neveznek. Ebben az esetben a peremfeltétel azt jelenti, hogy az $x=0$ helyen rögzített vég van, nincs kitérés, tehát $\psi(0,t) = 0$. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $\alpha = \pi$, és $A_1 = A_2$, tehát a rögzített végről a hullám változatlan amplitúdóval, de ellenkező fázisban verődik vissza, ahogy azt a kísérleteink is mutatták. Ezzel az eredő hullám kifejezése így alakul

$$\psi(x,t) = A_1 (\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx + \pi)) = A_1 (\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)).$$

Felhasználva a $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$\psi(x,t) = 2 A_1 \sin kx \cos \omega t.$$

Ennek a függvénynek az argumentumában nem jelenik meg a hullámokra jellemző „ $\omega t - kx$ ” kifejezés, tehát itt nem egy szokásos (haladó) hullám jön létre, hanem a kísérleteknél már említett állóhullám. Ez tulajdonképpen a közegnek egy rezgése, ahol a közeg egyes részei azonos fázisban rezegnek, de a rezgés φ amplitúdója a hely függvénye:

$$\psi(x, t) = \varphi(x) \cos \omega t,$$

ahol

$$\varphi(x) = 2A_1 \sin kx = A \sin kx$$

(itt bevezettük a $2A_1 = A$ jelölést).

Mivel véges hosszúságú kötélről van szó, foglalkoznunk kell a kötélmásik végének hatásával is, hiszen a hullám onnan is visszaverődik.

Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor a kötélmindkét vége rögzített. A kötélmásik végének rögzítése újabb peremfeltételt jelent, ami L hosszúságú kötélnél

$$\psi(L, t) = A \sin kL \cos \omega t = 0,$$

mégpedig minden időpillanatban. Ez csak úgy teljesülhet, ha az időfüggő rész együtthatója, vagyis az amplitúdó nulla:

$$\varphi(L) = A \sin kL = 0.$$

Adott hosszúságú kötélm esetén ez a feltétel csak a hullámszám megfelelő megválasztásával teljesíthető. Ez azt jelenti, hogy a mindkét végén rögzített rugalmas kötélen vagy egy rugalmas húrban olyan hullámszámú állóhullámok alakulhatnak ki, amelyekre fennáll a

$$kL = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

illetve

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

feltétel. Itt a különböző n értékeknek megfelelő hullámszámokat k_n -el jelöltük.

Ezzel az amplitúdó helyfüggését megadó összefüggés így alakul

$$\varphi_n(x) = 2A \sin n\pi \frac{x}{L}.$$

Ezt a függvényt mutatja különböző n értékek esetén a mellékelt ábra. Látható, hogy a számolásból valóban a kísérleteknek megfelelő alakzatokat kapunk.

Az állóhullám-feltétel a $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ összefüggés

felhasználásával a hullámhosszal is kifejezhető:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

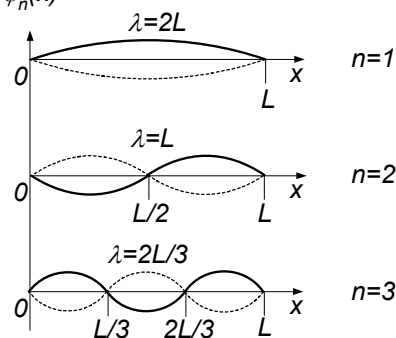
Ez azt jelenti, hogy ha egy kifeszített, két végén rögzített kötélm-ben létrehozunk egy zavart, akkor abban ilyen hullámhosszú állóhullámok alakulhatnak ki.

A feltétel még egy alakban megfogalmazható, hiszen a hullámszám (hullámhossz) a rezgés körfrekvenciájával is összefüggésbe hozható: $k = \frac{\omega}{v}$ (v a fázissebesség). Így a lehetséges frekvenciákra azt kapjuk, hogy

$$\omega_n = n \frac{\pi v}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Ha tehát az említett kísérletben a kötelet lengetjük, vagyis benne kényszerrezgést hozunk létre, akkor állandósult hullámalakzat csak olyankor jön létre, ha a kötélmvégét a fenti feltételnek megfelelő frekvenciával mozgatjuk. Ezzel magyarázható, hogy a kísérletben csak bizonyos frekvenciáknál alakul ki a jellegzetes állóhullám alakzat.

A jelenség tulajdonképpen egy *rezonancia*. Ezzel kapcsolatban emlékeztetünk arra, hogy több szabadsági fokú rendszer csatolt rezgései esetén a rendszernek annyi *normálfrekvenciája* van, amennyi a szabadsági fokok száma. A fenti összefüggés a két végén rögzített kötélm normálfrekvenciáit adja meg. Amikor a rezgetéskor eltaláljuk az egyik normálfrekvenciát,



akkor rezonanciaszerűen kialakul a megfelelő állóhullám alakzat. Ezek a normálfrekvenciák tehát egyben a rendszer *rezonanciafrekvenciái* is.

A fenti körfrekvenciák felhasználásával felírhatjuk az állóhullámok hullámfüggvényeit:

$$\psi_n(x, t) = 2A \sin n\pi \frac{x}{L} \cos \omega_n t .$$

Az $n=1$ értékhez tartozó frekvenciát *alapfrekvenciának*, az $n>1$ értéknek megfelelő frekvenciákat *felharmonikusoknak* nevezik.

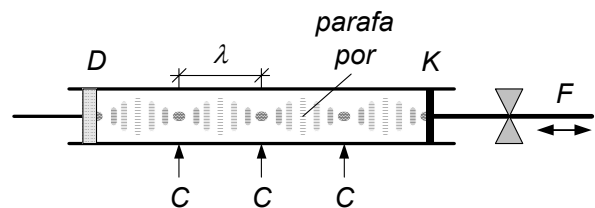
Az elmondottak értelemszerű változtatásokkal érvényesek a húros hangszerekben használt hurok transzverzális rezgéseire és a mindkét végükön zárt légoszloppal működő sípokban létrejött longitudinális hullámokra is. Az $n=1$ értéknek megfelelő frekvenciájú hangot itt *alaphangnak* nevezik.

Légoszlopban létrejött állóhullámok jól demonstrálhatók a *Kundt-féle cső* segítségével.

KÍSÉRLET:

Vízszintes helyzetű üvegcső aljára kevés parafa port szórunk, majd egyik végét mozgatható dugattyúval (D) zárjuk le, másik végébe pedig egy fém pálcára (F) erősített könnyű korongot (K) helyezünk (ábra). A fém pálcában dörzsöléssel longitudinális hullámokat keltünk, amelyek az üvegcsőben lévő légoszlopra áterjednek. Ezt a parafa szemcsék mozgása mutatja. Ha a D dugattyút mozgatjuk, akkor találhatunk olyan helyzeteket, amikor a parafa szemcsék szabályos (periodikus) elrendezést mutatnak (ábra). Az ábrán C -vel jelölt helyeken a szemcsék összegyűlnek, a közbülső helyeken pedig szétszóródnak.

A kialakult kép magyarázata az, hogy a D dugattyú bizonyos helyzeteinél teljesül az állóhullám-feltétel, és a gázoszlopban longitudinális állóhullámok jönnek létre. Ekkor a nagy amplitúdójú rezgési helyeken (rezgési duzzadóhelyek) a parafa szemcsék szétszóródnak, a rezgési csomópontokban (C) pedig összegyűlnek.



Rugalmas kötel, húr vagy légoszlopok rezgéseinél a valóságos helyzet általában eléggé bonyolult. Egy zavart elindítva, általában az összes lehetséges frekvencián létrejön rezgés, de ezek közül az alapfrekvenciának megfelelő állóhullám marad meg a legnagyobb amplitúdóval. Emellett azonban kisebb amplitúdóval jelen vannak a felharmonikusok is. A különböző konstrukciójú húros és fúvós hangszerek hangjában más és más a felharmonikusok intenzitása, amit a fülünk hangszíntérésként érzékel. Ezért tudjuk megkülönböztetni egymástól a különböző hangszerek hangját, még akkor is, ha azonos hangmagasságú (frekvenciájú) alaphangon szólnak.

Hasonló gondolatmenettel határozhatjuk meg *egyik végén szabad* rugalmas kötel vagy pálcá-, továbbá egyik végén nyitott légoszlop rezgéseinél kialakuló állóhullámokat.

A hullám amplitúdója itt sem változik meg ($A_1 = A_2 = A$), továbbá $\alpha = 0$ (a szabad végről a hullám változatlan amplitúdóval és változatlan fázissal verődik vissza), így az eredő hullám

$$\psi(x, t) = A(\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx)),$$

amiből trigonometriai átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\psi(x, t) = 2A \cos kx \sin \omega t .$$

Ha a másik vég most is rögzített, akkor az amplitúdóra vonatkozó másik peremfeltétel most is

$$\varphi(x) = 2A \cos kL = 0,$$

vagyis

$$kL = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

A lehetséges hullámszámokra, hullámhosszakra és körfrekvenciákra ebből azt kapjuk, hogy

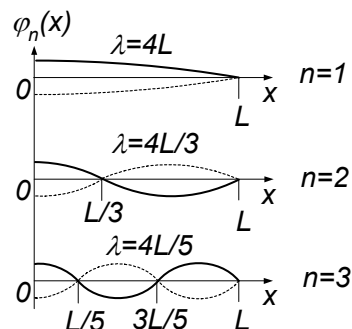
$$k_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2L}, \quad \lambda_n = \frac{4L}{(2n - 1)}, \quad \omega_n = (2n - 1) \frac{v\pi}{2L}.$$

Az egyes n értékeknek megfelelő amplitúdófüggvények most tehát a

$$\varphi_n(x) = 2A \cos\left((2n - 1) \frac{\pi x}{2L}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

függvényekkel adhatók meg.

Ezek a függvények láthatók a mellékelt ábrán különböző n értékek esetén.



Mindkét végén szabad pálca vagy mindkét végén nyitott gázoszlop esetén a második peremnél is maximális amplitúdó jön létre, vagyis

$$\cos kL = \pm 1, \quad kL = n\pi.$$

Ez megegyezik a két rögzített vég esetén kapott feltétellel, vagyis például a lehetséges hullámhosszakra itt is azt kapjuk, hogy

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

A kialakult állóhullám azonban különbözik a két végen rögzített esettől, mert most mindkét végén maximális az amplitúdó, amint az a mellékelt ábrán látható.

