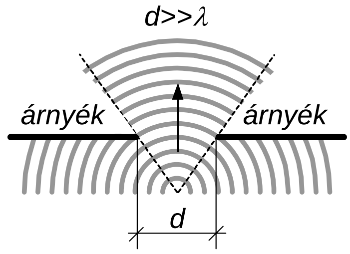
Hullámok elhajlása (diffrakció), a Huygens–Fresnel-elv

A hullámok terjedését eddig olyan esetekben vizsgáltuk, amikor a terjedést korlátozó, vagy módosító felületek (közeghatárok) nagyméretűek voltak, a közegekben pedig – a határoktól eltekintve – a hullámterjedés homogén és izotróp volt. A hullámok terjedését azonban lényegesen befolyásolja, ha az útjukba véges méretű akadályok vagy rések kerülnek.

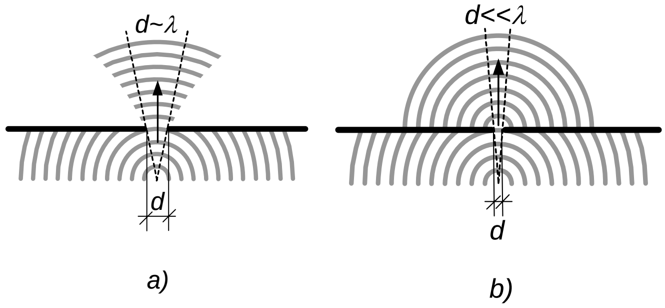
Ha ezeknek a mérete sokkal nagyobb, mint a hullámhossz, akkor még nincs jelentős változás. Ezt szemlélteti a következő kísérlet.

KÍSÉRLET:
Hullámkád egy pontjában létrehozunk egy körhullámot, és egy – a hullámhosszhoz képest – nagyméretű résen bocsátjuk át. A rés után nagyjából az ábrán látható hullámképet látjuk. Ebben az esetben tehát szabályos árnyék keletkezik, a hullám jó közelítéssel egyenes vonalban terjed, az egyenesekkel határolt, geometriai árnyéktérbe nem – vagy alig – hatol be.



A hullámok egyenes vonalú terjedése teszi lehetővé, hogy a hullámterjedést a sugarak bevezetésével sok esetben egyszerű geometriai szerkesztésekkel tudjuk nyomon követni, és egyszerű magyarázatot adjunk számos optikai eszköz működésére (ezzel a geometriai optika foglalkozik).
Vannak azonban olyan esetek, amikor a hullám lényegesen eltér az egyenes vonalú terjedéstől. Ez történik pl. akkor, ha az előbbi kísérletben a rés méretét lecsökkentjük.

KÍSÉRLET:
Az előbbi kísérletben csökkentsük a rés méretét. Amikor a rés mérete közel azonos a hullámhosszal (*a)* ábra), akkor a hullám jelentősen behatol az árnyéktérbe, az egyenes terjedéshez képest „elhajlik”. Még jelentősebb eltérés következik be, ha a rés mérete sokkal kisebb a hullámhossznál (*b)* ábra), hiszen ekkor – mint azt korábban már láttuk – a rés pontforrásként viselkedik.

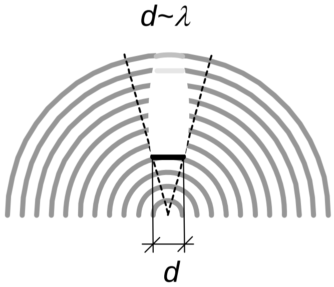


Már a nagyméretű rés esetén is utaltunk arra, hogy az egyenes vonalú terjedés csak jó közelítéssel valósul meg. Pontosabb megfigyelések azt is megmutatják, hogy bármilyen akadály szélénél is bekövetkeznek az egyenes vonalú terjedéstől eltérő jelenségek.

KÍSÉRLET:
Ezt megfigyelhetjük egy hullámkádban, ha egy nagyobb hullámhosszú hullám egy akadály széle mellett halad el (ábra).

Kis méretű akadály esetén a hullám az akadály mindlét szélén behatol az árnyéktérbe.

KÍSÉRLET:
Hullámkádban keltett körhullám útjába a hullámhosszal összemérhető akadályt helyezünk el. A hullámok jól láthatóan behatolnak az akadály mögötti geometriai árnyéktérbe.



További vizsgálatok – amelyekről részletesebben a fényhullámoknál lesz szó – azt mutatják, hogy a hullám intenzitáseloszlása nem olyan egyszerű, mint amiről eddig szó volt. Ez legjobban fényhullámokkal mutatható be, de a jelenség hullámkádban is megfigyelhető.

KÍSÉRLET:
Vízfelületen létrehozott hullám útjába kis méretű rést helyezünk el. Ha résméretet és a hullámhosszt megfelelően választjuk meg, akkor a rés túloldalán a pontforrások interferenciájához hasonló hullámalakzatot látunk. Itt az egyenes terjedéstől való eltérés mellett a résen áthaladt hullámban maximális és minimális amplitúdójú helyeket mutató vonalak figyelhetők meg.

Ehhez hasonló képet kapunk akkor is, ha a hullám egymás mellett elhelyezett rések sorozatán (rácson) halad át.

Az itt bemutatott eseteken kívül is számos tapasztalat mutatja, hogy ha a hullám réseken halad át, vagy véges méretű akadályokba ütközik, akkor az egyenes vonalú terjedéstől jelentős eltérések figyelhetők meg. A hullámnak az egyenes vonalú terjedéstől való eltérését *hullámelhajlásnak* vagy *diffrakciónak-*, az ezzel kapcsolatos jelenségeket *elhajlásjelenségeknek-*, a létrejött hullámalakzatot pedig *elhajlási képnek* vagy *diffrakciós képnek* nevezik.

Az elhajlásjelenségek a Huygens-elvvel már nem értelmezhetők. Ennek alapvető oka az, hogy a Huygens-elv nem veszi figyelembe a terjedő hullám intenzitásviszonyait, így nem tudja értelmezni sem az árnyékjelenséget, sem pedig azt, hogy a hullám részlegesen behatol az árnyéktérbe. Ezt a problémát oldja meg a *Fresnel*[1] által javasolt módosítás, amely szerint az új hullámfrontot nem az elemi hullámok burkolófelületeként értelmezzük, hanem az *elemi hullámok interferenciájából* számítjuk ki. Ez a *Huygens–Fresnel-elv*.
A Huygens–Fresnel-elv tehát nem egyszerűen a geometriai terjedési szabályokat veszi figyelembe, hanem azt is, hogy az interferencia miatt az elemi hullámok a hullámtér egyes tartományaiban egymást erősíthetik vagy gyengíthetik (esetleg kioltják) egymást, vagyis intenzitásváltozások következhetnek be.
A Huygens–Fresnel-elv alapján elvégzett számításokból derül ki, hogy az árnyékjelenség oka az, hogy az elemi hullámok a rés túloldalán, az "árnyéktérben" – a rés méretétől függő mértékben – kioltják egymást. Ezzel egyúttal az árnyéktérbe való behatolás különböző esetei is értelmezhetők.

[1] Augustin Jean FRESNEL (1788-1827) francia fizikus.

Az is megmagyarázható, hogy miért jelennek meg az interferenciára jellemző hullámalakzatok. A Huygens–Fresnel-elv szerint ugyanis a hullámfront minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, és a hullámtér egy adott pontjában az amplitúdót ezek interferenciája adja meg. Egy rés mögött tehát olyan interferenciakép jelenik meg, amely a résben elképzelt végtelen sok pontforrásból kiinduló, koherens hullámok interferenciájának felel meg.

A diffrakció különösen fontos szerepet játszik az optikában, ahol ezt a jelenséget *fényelhajlásnak* nevezik. A diffrakcióra vonatkozó optikai kísérletekkel és az egyszerűbb elhajlásjelenségek értelmezésével az elektromágneses hullámoknál foglalkozunk.

Rugalmas hullámok dinamikai leírása

A hullám leírása akkor teljes, ha a hullámfüggvényt a hullámot létrehozó hatások és a terjedését befolyásoló határfeltételek ismeretében meg tudjuk határozni, vagyis ismerjük a hullámfüggvény meghatározására szolgáló fizikai egyenletet. Emellett a hullám által szállított energia meghatározása is fontos feladat.
Ezeknek a problémáknak a megoldásához a különböző zavarterjedési mechanizmusok esetén más és más eszközöket és alaptörvényeket kell felhasználnunk, ezért a rugalmas hullámokkal és az elektromágneses hullámokkal külön foglalkozunk. A tárgyalást a rugalmas hullámokkal kezdjük.

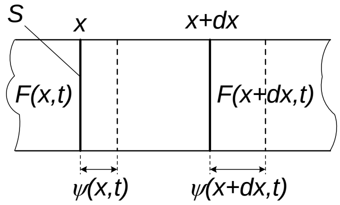
A hullámegyenlet

Első célunk az, hogy egy olyan fizikai egyenletet találjunk, amely alkalmas a hullámfüggvény meghatározására. Ezt az egyenletet *hullámegyenletnek* nevezik.
Rugalmas hullámok esetén a hullámegyenlet felírásánál abból indulhatunk ki, hogy a hullám keltésekor erőt fejtünk ki a közeg egy kis térfogatelemére, ezért a hullámegyenletet a hullámban elmozduló közeg egy kis térfogatelemére felírt mozgásegyenlet segítségével kaphatjuk meg.

Hullámegyenlet egydimenziós, longitudinális rugalmas hullámok esetén

A közeg elemi darabjára felírt mozgásegyenletben természetesen nem szerepel a hullámfüggvény, ezért a feladat az, hogy a mozgásegyenletben szereplő, helytől és időtől függő mennyiségeket a hullámfüggvénnyel fejezzük ki. Ekkor a hullámfüggvényre vonatkozó differenciálegyenletet kapunk.
Először egy S keresztmetszetű rugalmas rúdban x-irányban terjedő egydimenziós longitudinális hullámra végezzük el a számolást. A mozgásegyenlet egy dm tömegű térfogatelemre (ábra)

$$dF_x = dm \cdot a_x .$$



Ebből úgy lesz hullámegyenlet, hogy a rúd elemi darabjára ható dF_x erőt és a gyorsulást kapcsolatba hozzuk a ψ hullámfüggvénnyel.
Első lépésként határozzuk meg adott x koordinátájú keresztmetszetre a t időpillanatban fellépő erőt, amely a rúd hosszirányú deformációjának következménye. Ehhez alkalmazzuk a Hooke-törvényt, amely egy rugalmas test megnyújtásánál vagy összenyomásánál a testre ható F erőt összefüggésbe hozza az $\varepsilon = \frac{d\ell}{\ell}$ deformációval:

$$F = SE\varepsilon$$

(E a Young-modulus).
Esetünkben a deformáció a kiválasztott térfogatelem relatív hosszváltozása, ami viszonylag egyszerűen kifejezhető a hullámfüggvénnyel. Egy adott t időpillanatban az ábrán látható térfogatelem két végének relatív elmozdulását éppen a hullámfüggvény x- és $x+dx$ helyeken felvett értékeinek a különbsége adja meg, vagyis $d\ell = \psi(x+dx,t) - \psi(x,t)$. A térfogatelem eredeti hossza $\ell = dx$. Így az elemi térfogat ε deformációját az

$$\varepsilon = \frac{d\ell}{\ell} = \frac{\psi(x+dx,t) - \psi(x,t)}{dx}$$

kifejezés adja meg. Ez tulajdonképpen a $\psi(x,t)$ függvény x szerinti differenciálhányadosa.
Mivel itt egy kétváltozós függvényt csak az egyik változója szerint differenciálunk (és közben a másik változót állandónak tekintjük), ezt a differenciálhányadost parciális deriváltnak nevezik, és jelölésére a szokásos *„d”* szimbólum helyett a „∂” szimbólumot használják. Ezzel a jelöléssel a deformáció:

$$\varepsilon = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}.$$

A Hooke-törvény szerint az erő és a deformáció arányos egymással, vagyis

$$F_x(x,t) = SE\varepsilon(x,t) = SE\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}.$$

Ez az erő adott t időpillanatban a hely függvénye, így a rúd egy dx hosszúságú elemi darabjára ható eredő erő ebben a pillanatban

$$dF_x = F(x+dx,t) - F(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dx.$$

Az erő helyfüggését megadó összefüggés felhasználásával ebből azt kapjuk, hogy

$$dF_x = SE\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dx.$$

Ezzel a mozgásegyenlet baloldalát sikerült a hullámfüggvénnyel kifejeznünk.
A gyorsulás a helykoordináta (itt a hullámfüggvény) második idNew deriváltja, azaz

$$a_x = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2},$$

így a mozgásegyenlet jobboldalán is megjelent a hullámfüggvény.
Fejezzük ki még a vizsgált térfogatelem tömegét a ρ sűrűséggel:

$$dm = Sdx\rho.$$

A fenti összefüggések felhasználásával $dF_x = dm \cdot a_x$ mozgásegyenlet a hullámfüggvénnyel kifejezve az

$$\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakot ölti.
Ez a hullámterjedést leíró *hullámegyenlet* egy rugalmas *rúdban terjedő longitudinális hullám* esetén.

Hullámegyenlet gázoszlopban terjedő longitudinális hullám esetén

Az alapelv ugyanaz, mint a rúdban terjedő longitudinális hullámoknál, vagyis a gázoszlop egy elemi darabjára felírjuk a mozgásegyenletet, majd a gyorsulást és az erőt kifejezzük a hullámfüggvénnyel.
A mozgásegyenlet

$$dF_x = dm \cdot a_x,$$

ahol dF_x a kiválasztott térfogatelemre ható erő, a_x a térfogatelem gyorsulása, dm pedig a tömege.
Itt az erő az x-tengely adott helyén létrejött nyomásesésből származik, amire a t időpillanatban az

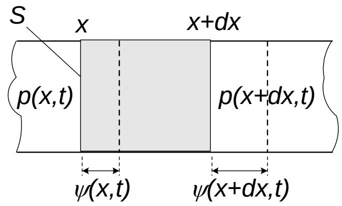
$$F(x,t) = -Sdp(x,t)$$

összefüggés érvényes.
A rugalmasságtanból tudjuk, hogy egy gáz összenyomására a

$$dp = -K\frac{dV}{V}$$

összefüggés érvényes. Mivel $V = Sdx$, és $dV = Sd\psi = S\frac{\partial \psi}{\partial x}dx$, azt kapjuk, hogy

$$dp(x,t) = -K\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$



Egy x helyen t időpillanatban fellépő erő ennek alapján

$$F(x,t) = SK\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Egy kiválasztott térfogatelemre ható eredő erőt az erőnek a kiválasztott hosszon történő

$$dF_x = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dx = SK\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}dx$$

megváltozása adja meg.
A gyorsulás most is

$$a_x = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2},$$

és

$$dm = Sdx\rho_0,$$

ahol ρ_0 a gáz átlagos sűrűsége.
A fenti összefüggésekkel a mozgásegyenlet az

$$SK\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}dx = Sdx\rho_0\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

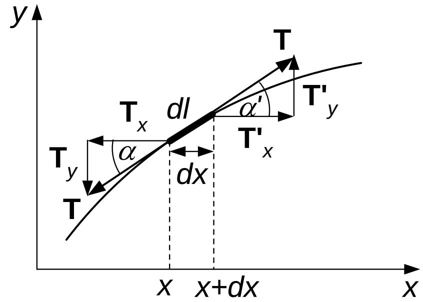
alakot ölti.
Egyszerűsítések után ebből egy *gázoszlopban terjedő longitudinális* hullámra a

$$\frac{K}{\rho_0}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2}$$

hullámegyenletet kapjuk.

Hullámegyenlet rugalmas húrban terjedő, transzverzális hullámokra

Egy x-tengelyen elhelyezkedő rugalmas húr a rezgései közben az eredeti helyzetéből arra merőlegesen kitér (ábra), és a húr mentén transzverzális hullám terjed. Az eközben létrejött y-irányú kitérés hely és időfüggését az $y = \psi(x,t)$ hullámfüggvénnyel jellemezzük.



A hullámegyenletet most is egy elemi $d\ell$ hosszúságú húrszakaszra felírt mozgásegyenletből kaphatjuk meg.
A számolás során egyszerűsítő feltevéseket teszünk: elhanyagoljuk a húrszakasz x-irányú elmozdulását, és feltesszük, hogy a húrszakasz kitérése kicsi, vagyis a kitérést jellemző szögek (α, α') is kicsik (az ábra az áttekinthetőség érdekében nagyon torz).
A húr megfeszített állapotban van, a húr érintője irányába mutató feszítő erőt az ábrán **T**-vel jelöltük.

A *dm* tömegű elemi szakaszra felírt mozgásegyenlet *y*-irányú összetevője:

$$dF_y = dma_y$$

Most F_y -t és a_y -t kell kifejezni ψ -vel.

Az erő *y*-komponense:

$$dF_y = T'_y + T_y = T\sin\alpha' - T\sin\alpha\,.$$

Mivel α, α' kicsi: $\sin\alpha \approx tg\alpha$ és $\sin\alpha' \approx tg\alpha'$, így

$$dF_y \approx T(tg\alpha' - tg\alpha) = Td(tg\alpha) = T\frac{\partial(tg\alpha)}{\partial x}dx\,.$$

De tudjuk, hogy

$$tg\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ezért

$$\frac{\partial(tg\alpha)}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\,.$$

Ezzel az erő kifejezése így alakul

$$dF_y = T\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx\,.$$

A mozgásegyenletben szereplő többi mennyiségre felírhatjuk, hogy

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

$$dm = \rho dlS \approx \rho dxS$$

(ρ a húr anyagának sűrűsége, *S* a húr keresztmetszete).

Ezeket a mozgásegyenletbe behelyettesítve, megkapjuk annak hullámfüggvénnyel kifejezett alakját:

$$\frac{T}{\rho S}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}\,.$$

Ez a *hullámegyenlet* megfeszített *húrban terjedő transzverzális hullámokra*.

Az egydimenziós hullámegyenlet általános alakja

Láttuk, hogy többféle hullámterjedési esetre ugyanolyan alakú hullámegyenletet kaptunk: ezek a különböző esetekben csak az egyenletek baloldalán szereplő, anyagjellemzőket és geometriai adatokat tartalmazó állandókban különböznek egymástól. Mindezek alapján sejthető, hogy itt általános törvényszerűségről van szó. Ha az egyenletek baloldalán megjelenő állandót *B*-vel jelöljük, akkor a hullámegyenlet a

$$B\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

alakba írható, ahol

- rúdban terjedő longitudinális hullámnál $B = \dfrac{E}{\rho}$,
- gázoszlopban terjedő longitudinális hullámnál $B = \dfrac{K}{\rho_0}$ és
- húrban terjedő transzverzális hullámnál $B = \dfrac{T}{\rho S}$.

Nézzük meg, hogy mi a fizikai jelentése ennek az állandónak. Ezt az egyenlet megoldásával, vagyis a hullámfüggvény meghatározásával deríthetnénk ki (ekkor az állandó feltehetőleg megjelenik a hullámfüggvényben). Az egyenletet – kellő matematikai ismeretek híján – egyelőre nem tudjuk megoldani, de tudjuk, hogy a rúdban elvileg terjedhet harmonikus síkhullám, ezért az egyenletnek biztosan megoldása a harmonikus síkhullámot leíró

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha)$$

hullámfüggvény is.
Helyettesítsük be ezt a függvényt a hullámegyenletbe, és nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett lehet megoldás. A deriválásokat elvégezve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$-Bk^2\cos(\omega t - kx + \alpha) = -\omega^2\cos(\omega t - kx + \alpha)\,.$$

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\left(Bk^2 - \omega^2\right)\cos(\omega t - kx + \alpha) = 0\,.$$

Ennek az egyenletnek bármilyen x- és t értékek mellett érvényesnek kell lennie, ami csak úgy teljesülhet, hogy a hely-és időfüggő rész együtthatója nulla:

$$Bk^2 - \omega^2 = 0\,.$$

Felhasználva a $k = \dfrac{\omega}{v}$ összefüggést, azt kapjuk, hogy a B állandó közvetlen összefüggésben van a *hullám terjedési sebességével*:

$$v = \sqrt{B}\,.$$

Az *egydimenziós hullámegyenlet általános alakban* tehát az alábbi módon írható fel:

$$v^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}\,.$$

Az egyes konkrét esetekben csak annyi a különbség, hogy a terjedési sebesség kifejezése más, amit a hullámegyenlet levezetése során kapunk meg. A fentiek alapján a terjedési sebesség különböző terjedési körülmények között az alábbi összefüggésekkel adható meg:

longitudinális hullám rugalmas rúdban: $v = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$,

longitudinális hullám (nyomás- és sűrűséghullám) gázban: $v = \sqrt{\dfrac{K}{\rho_0}}$,

transzverzális hullám húrban: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\rho S}}$.

A terjedési sebességet bármilyen más esetben a fentiekhez hasonló módon, a hullámegyenlet konkrét esetre történő levezetésével kaphatnánk meg. Így például rugalmas rúdban terjedő nyírási hullámra a $v = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ kifejezést kapjuk (G a nyírási modulus).
Gázokban és folyadékokban gyakorlatilag csak longitudinális hullámok terjednek. Szilárd anyagokban longitudinális és transzverzális hullámok is terjednek, és terjedési sebességük eltérő: általában a longitudinális hullámok terjednek gyorsabban.

Megjegyezzük, hogy a hullámegyenlet általános alakja nem csak rugalmas hullámokra érvényes, hanem például az elektromágneses hullámokra is, csak ott a hullámfüggvény nem mechanikai jellegű változást, hanem az elektromos- és mágneses erőtér változását adja meg. Későbbi tanulmányaik során, amikor az elektromágneses hullám hullámegyenletét levezetik, akkor a fenti „*B*" állandóra azt kapják, hogy $B = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}$, ahol ε_0 a vákuum permittivitása, ε_r a teret kitöltő anyag relatív permittivitása, μ_0 a vákuum mágneses permeabilitása, μ_r a teret kitöltő anyag relatív mágneses permeabilitása. Az elektromágneses hullám (pl. a fény) terjedési sebessége tehát $c = \sqrt{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$. A vákuumban terjedő fény terjedési sebessége ennek megfelelően $c = \sqrt{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ (vákuumban $\varepsilon_r = 1$ és $\mu_r = 1$). Behelyettesítve az $\varepsilon_0 = 8.854 * 10^{-12}\ As/(Vm)$ és $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Vs/Am$ állandókat, a vákuumbeli fényterjedés sebességének ismert értékét kapjuk: $c = 2{,}9979 \cdot 10^8\ m/s \approx 3 \cdot 10^8\ m/s$.

*************** *************** ***************

Térbeli hullámegyenlet

A hullámok az esetek döntő többségében nem egy dimenzióban, hanem térben terjednek. Ilyenkor a hullámfüggvény helyfüggését a helyzetvektorral adhatjuk meg: $\psi = \psi(\mathbf{r},t)$. A térbeli hullámegyenletet formálisan viszonylag egyszerűen megkaphatjuk egy harmonikus síkhullám

$$\psi(\mathbf{r},t) = A\cos(\omega t - \mathbf{kr})$$

hullámfüggvényének segítségével.

Mivel az egydimenziós esetből tudjuk, hogy a hullámegyenletben a hullámfüggvény második parciális deriváltjai szerepelnek, számítsuk ki először a hely szerinti deriváltakat a fenti hullámfüggvény esetén. Ha figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z$, az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} = -k_x^2 \psi(\mathbf{r},t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} = -k_y^2 \psi(\mathbf{r},t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial z^2} = -k_z^2 \psi(\mathbf{r},t).$$

Ezeket az egyenleteket összeadva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial z^2} = -k^2 \psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\omega^2}{v^2}\psi(\mathbf{r},t)$$

(itt felhasználtuk a $k = \frac{\omega}{v}$ összefüggést).

Másrészt a hullámfüggvény idő szerinti második deriváltja:

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(\mathbf{r},t).$$

Az utóbbi két egyenletből azt kapjuk, hogy

$$v^2\left(\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}.$$

Ha alkalmazzuk a matematikában szokásos $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\Delta$ jelölést, akkor az egyszerűbb

$$v^2\Delta\psi(\mathbf{r},t)=\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}$$

alakot kapjuk.
Kimutatható, hogy ez az egyenlet nem csak a „levezetésnél” feltételezett harmonikus hullámokra igaz, hanem ez a hullámegyenlet általánosan érvényes alakja.

*************** *************** ***************

A hullámegyenlet alkalmazása: az állóhullám-egyenlet

Korábban megvizsgáltuk egy hullámforrásból kiinduló és a véges közeg határáról visszavert hullámok interferenciáját. Láttuk, hogy bizonyos feltételek teljesülésekor (pl. egy kötélben indított hullámnál meghatározott frekvenciákon) sajátos, a haladó hullámtól különböző, állandósult hullámalakzatok jöhetnek létre, amelyekben a hullámtér egész tartományai azonos fázisban rezegnek, csak a rezgés amplitúdója változik helyről-helyre. Az ilyen hullámalakzatokat neveztük állóhullámoknak. Kézenfekvőnek látszik, hogy az általános hullámegyenlet a hullámok bármilyen fajtájának, így az állóhullámoknak a leírására is alkalmas.

A hullámfüggvény megtalálásához ismernünk kell a függvénynek a közeg határán érvényes alakját (peremfeltétel), és ismernünk kell a hullámfüggvényt egy kezdeti időpillanatban (kezdeti feltétel). A hullámegyenlet általános megoldásának megtalálása adott kezdeti- és peremfeltételek esetén általában bonyolult feladat, ezért itt csak azt tűzzük ki célul, hogy megtaláljuk azokat a megoldásokat, amelyek a korábban kísérletileg is megtalált állóhullámokat írják le.

Harmonikus hullámokkal kapcsolatos korábbi tapasztalataink szerint az állóhullámot helyfüggő amplitúdó és a közegnek nagyobb térrészre kiterjedő, azonos időfüggésű, azonos fázisú rezgése jellemzi, és azt találtuk, hogy hullámfüggvénye egy helyfüggő amplitúdó és egy harmonikus rezgést leíró időfüggő tényező szorzataként írható fel:

$$\psi(x,t)=\varphi(x)\cdot\cos(\omega t+\alpha)\,.$$

Most ismét a differenciálegyenletek „megoldásánál” korábban többször alkalmazott eljárást követjük: a differenciálegyenletbe behelyettesítjük a „kitalált megoldást”, és megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek esetén lesz a próbafüggvényünk megoldás.
Ha a fenti hullámfüggvényt behelyettesítjük a

$$v^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}$$

hullámegyenletbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$v^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cos(\omega t+\alpha)=-\varphi(x)\omega^2\cos(\omega t+\alpha)\,.$$

Ez az egyenlet rendezéssel és a $k=\frac{\omega}{v}$ összefüggés felhasználásával a

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+k^2\varphi(x)\right)\cos(\omega t+\alpha)=0$$

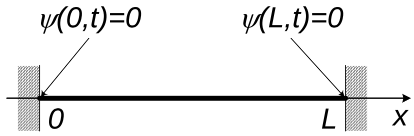
alakba írható. Az egyenletnek bármely időpillanatban teljesülni kell, ami csak úgy lehetséges, hogy

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+k^2\varphi(x)=0\,.$$

Ez a differenciálegyenlet megadja az állóhullám amplitúdójának $\varphi(x)$ helyfüggését, és egydimenziós *állóhullám-egyenletnek* nevezik.
Ha a $\varphi(x)$ függvényt konkrét esetekben meghatározzuk, akkor az állóhullám hullámfüggvényét is felírhatjuk az adott esetben:

$$\psi(x,t)=\varphi(x)\cdot cos(\omega t+\alpha)\,.$$

Egyszerű példaként próbáljuk meghatározni az amplitúdó $\varphi(x)$ helyfüggését egy mindkét végén rögzített, L hosszúságú rugalmas húrban vagy kötélben (ábra) terjedő transzverzális *harmonikus hullámra*.



A $\varphi(x)$ függvényt

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+k^2\varphi(x)=0$$

állóhullám-egyenlet segítségével határozzuk meg.
Mivel az egyenlet formailag teljesen azonos a harmonikus rezgőmozgás egyenletével, megoldása is ugyanolyan, csak most a változó nem t, hanem x:

$$\varphi(x)=A\,sin(kx+\beta)\,.$$

Ezzel az állóhullám időfüggését is megadó hullámfüggvény a

$$\psi(x,t)=A\,sin(kx+\beta)cos(\omega t+\alpha)$$

alakot ölti.

A konkrét esetben érvényes állóhullám-megoldást akkor kapjuk meg, ha figyelembe vesszük a határfeltételeket.
A két végén rögzített kötél vagy húr esetén egyrészt bármely időpillanatban fennáll, hogy $\psi(0,t)=0$. Ez azt jelenti, hogy $\varphi(0)=0$, így a $\varphi(x)=A\,sin(kx+\beta)$ alakban felírt amplitúdó-függvény csak a $\beta=0$ esetben alkalmazható, tehát csak a

$$\varphi(x)=A\,sin(kx)$$

alak megengedett.
Másrészt a kötél vagy húr másik vége is rögzített, tehát $\psi(L,t)=0$, ami azt jelenti, hogy

$$\varphi(L)=A\,sin(kL)=0\,,$$

illetve

$$sin(kL)=0\,.$$

Ez ugyanaz a feltétel, mint amit korábbi megfontolásainkból kaptunk, és a következtetések is ugyanazok. Állóhullám egy mindkét végén rögzített kötélen vagy húron csak akkor jön létre, ha a hullámszám a $kL=n\pi$ feltételnek megfelelő értékek valamelyikét veszi fel, azaz

$$k_n=n\frac{\pi}{L}$$

(n egész szám).
Ezzel a hullámegyenlet n-től függő állóhullá-megoldása:

$$\psi_n(x,t)=A\,sin(n\frac{\pi}{L}x)cos(\omega t+\alpha)\,.$$

Mint korábban is láttuk, a határfeltételek miatt a húron kialakuló hullámok frekvenciája és hullámhossza sem tetszőleges, hanem

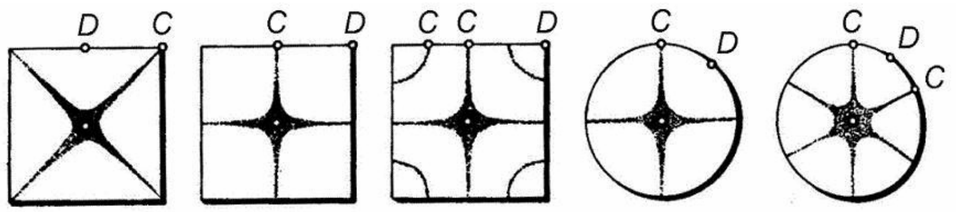
$$\omega_n = k_n c = n\frac{\pi}{L}c \qquad \text{illetve} \qquad \lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

Mint már az állóhullámok korábbi tárgyalásánál is említettük, a fenti, egyetlen n értékhez tartozó megoldás csak igen speciális *kezdeti feltételek* mellett valósítható meg. Általában egy húr gerjesztésekor bonyolult hullám alakul ki, amely különböző frekvenciájú harmonikus hullámok szuperpozíciója, így az $n = 1$ értékhez tartozó alapfrekvencia mellett – rendszerint kisebb intenzitással – egyéb lehetséges frekvenciák (felharmonikusok) is megjelennek. Ezt mutatja például az, hogy egy húr hangja erősen függ attól, hogy milyen eszközzel szólaltatjuk meg és a rezgést a húr melyik pontján hozzuk létre.

A fentihez hasonló módon tárgyalhatók egyéb peremfeltételek is (pl. egyik végén szabad kötél, mindkét végén szabad rezgő pálca, zárt és nyitott síp (levegőoszlop), stb.

A két- vagy háromdimenziós hullámegyenlettel síkon vagy térben terjedő hullámok által létrehozott állóhullámok is tárgyalhatók. Számolásokat itt nem végzünk, de bemutatunk néhány síkbeli állóhullám képet.

KÍSÉRLET:
Közepén befogott négyzet- és kör alakú, vékony fémlemezekben (ábra) hegedűhúrral transzverzális rezgéseket hozunk létre. Ennek következtében állóhullámok (Chladni-ábrák) alakulnak ki, amelyeknek kimutatására finom port használunk. A port a hullám gerjesztése előtt egyenletesen rászórjuk a lapokra, majd a hegedűvonót az ábrán látható D pontokban a lemezre merőlegesen végighúzzuk a lemezen. Közben ujjunkkal a lemez egy vagy két pontját megérintjük (az ábrán a C-vel jelölt helyek). A porszemcsék azokon a helyeken gyűlnek össze, ahol a legkisebb a rezgés amplitúdója, tehát kirajzolják az állóhullám csomóvonalait (az ábrán a sötét tartományok). A gerjesztés helyén mindig duzzadóhely van, az érintési helyeken csomópont. Látható hogy az érintés helyének (rögzített pont) változtatásával a csomóvonalak helyzetét változtatni tudjuk.



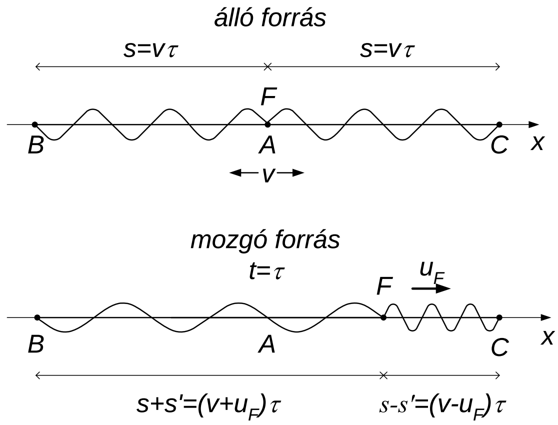
Ezek a kísérletek jól mutatják, hogy az állóhullámok konkrét alakját alapvetően meghatározza a rezgetés helye és az, hogy az ujjunkkal milyen peremfeltételeket alakítunk ki.

Doppler-effektus

Tapasztalatból tudjuk, hogy ha egy jármű nagy sebességgel közeledik felénk, és elhalad mellettünk, akkor az általa kibocsátott hang magasságát távolodáskor hirtelen mélyebbnek észleljük. A jelenség egyszerű kísérlettel sokkal meggyőzőbben is bemutatható.

KÍSÉRLET:
Függőleges tengely körül forgatható vízszintes karra egy sípot rögzítünk, úgy, hogy körbeforgatásakor a síp szája a körpálya érintője irányába mutat. Ha a kart és vele a sípot megforgatjuk, akkor a pálya érintőjének irányába mutató síp a rajta átáramló levegő hatására megszólal. Jól megfigyelhető, hogy amikor a síp keringése közben közeledik felénk, akkor a hangját sokkal magasabbnak halljuk, mint amikor távolodik tőlünk.

Az észlelt hangmagasságnak, általánosabban egy hullám észlelt frekvenciájának a megfigyelő vagy a hullámforrás mozgásállapotától való függését *Doppler-effektusnak*[1] nevezik.



Elsőként vizsgáljuk meg, azt az esetet, amikor az f_0 frekvenciájú *hullámforrás* a hullámot közvetítő *közeghez képest* u_F sebességgel *mozog*. A hullám terjedési sebessége nyugvó közegben v, hullámhossza $\lambda_0 = \dfrac{v}{f_0}$.

Ha a forrás (az ábrán az A pontban), a $t=0$ időpillanatban kibocsát egy hullámot, akkor a hullámfront az ettől számított τ idő alatt mindkét irányban v sebességgel mozog, és $s = v\tau$ távolságra jut el (az ábrán a B illetve C pontokig), függetlenül attól, hogy a forrás áll vagy mozog. Ezen a távolságon kialakul $N = \dfrac{s}{\lambda_0} = \dfrac{s}{vT} = \dfrac{\tau}{T} = f_0\tau$ számú teljes periódus (egy pillanatfelvételen ennyi teljes szinusz-periódust látunk).

Ha a forrás az x-tengely irányában mozog, akkor τ idő alatt $s' = u_F\tau$ távolságot tesz meg, tehát az x-tengely irányában a τ időtartam végén az N számú periódus az $s - s' = (v - u_F)\tau$ hosszúságú szakaszon figyelhető meg (alsó ábra). Szemléletesen szólva, a hullámhossz ebben az irányban „összenyomódik". A C pontnál álló megfigyelő által észlelt hullámhossz ekkor $\lambda_C = \dfrac{s-s'}{N} = \dfrac{(v-u_F)\tau}{f_0\tau} = \dfrac{v-u_F}{f_0} < \lambda_0$. A B pontban álló megfigyelő által észlelt hullámhossz viszont nagyobb lesz, mint az álló forrás esetén mért λ_0, hiszen ettől a helytől a forrás távolodik, az N számú periódus az $s + s' = (v + u_F)\tau$ szakaszra széthúzódik, és megfigyelt értéke $\lambda_B = \dfrac{v+u_F}{f_0} > \lambda_0$ lesz.

Ha megállapodunk abban, hogy a megfigyelő felé mozgó forrás sebessége pozitív ($u_F > 0$), és a távolodó forrás sebessége negatív ($u_F < 0$), akkor a két összefüggés összevonható a

[1] Christian Johann DOPPLER (1803-1853) osztrák fizikus.

$$\lambda' = \frac{v - u_F}{f_0}$$

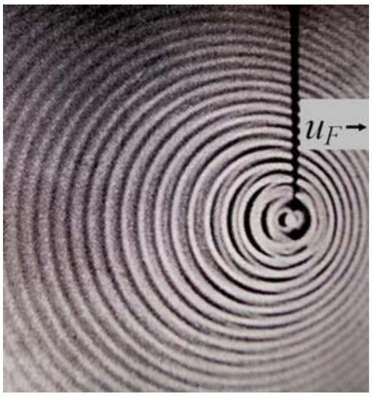
alakba.

A mozgó forrásból érkező hullám esetén a megfigyelő az $f' = \frac{v}{\lambda'}$ összefüggésnek megfelelő, megváltozott frekvenciát észlel:

$$f' = \frac{v}{v - u_F} f_0 .$$

Vagyis a tapasztalattal egyezően, közeledő forrásnál ($u_F > 0$) nagyobb-, távolodó forrásnál ($u_F < 0$) kisebb frekvenciát kapunk, mint a nyugvó forrással mért f_0.

A számolás alapját képező „hullámhossz-összenyomódás” és „hullámhossz-megnyúlás” valóságosan is bemutatható vízhullámok segítségével. Ha a víz felületén mozgatható forrással keltünk körhullámokat (például egy mozgó csőből a felületre szaggatottan kiáramló levegővel), akkor – a várakozásnak megfelelően – a képen látható hullámalakzatot láthatjuk.



A második kérdés az, hogy hogyan befolyásolja az észlelt frekvenciát a *megfigyelőnek a közeghez viszonyított mozgása*. Ha a megfigyelő mozog, akkor számára a hullám terjedési sebessége más, mint ha nyugalomban lenne. Ha például a *C* pontban lévő megfigyelő a nyugalomban lévő forrás felé (tehát a hullám terjedési irányával szemben) mozog u_M sebességgel, akkor a hullám terjedési sebességét $v' = v + u_M$ -nek méri, és ennek megfelelően

$$f'' = \frac{v + u_M}{\lambda_0} = \frac{v + u_M}{v} f_0$$

frekvenciát észlel. Ellenkező irányú mozgás esetén az észlelt frekvencia:

$$f'' = \frac{v - u_M}{\lambda_0} = \frac{v - u_M}{v} f_0 .$$

Ha a forráshoz közeledő megfigyelő sebességét tekintjük pozitívnak ($u_M > 0$), és az ellenkező irányban mozgóét negatívnak ($u_M < 0$), akkor a két összefüggést összevonhatjuk az

$$f'' == \frac{v + u_M}{v} f_0$$

alakban.

A számolás során feltételeztük, hogy a megfigyelő sebessége a hullámterjedés sebességével párhuzamos.

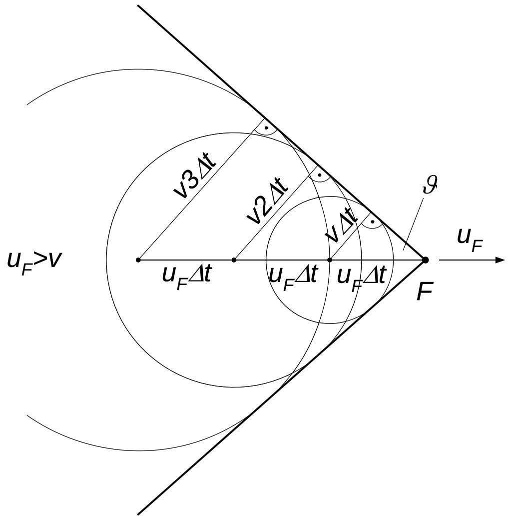
Ha a forrás is mozog, akkor λ helyébe a mozgó forrásnál kapott hullámhosszt kell beírnunk a fenti összefüggésbe, vagyis

$$f = \frac{v + u_M}{\lambda'} .$$

Ebből a $\lambda' = \frac{v - u_F}{f_0}$ kifejezés beírása után azt kapjuk, hogy

$$f = \frac{v + u_M}{v - u_F} f_0 ,$$

ahol $u_M > 0$, ha a megfigyelő a forrás felé mozog, és $u_F > 0$, ha a forrás a megfigyelő felé mozog. Ellenkező irányú mozgások esetén a megfelelő sebesség előjelet vált.
Az összefüggéseket azzal a feltevéssel kaptuk, hogy a forrás és a megfigyelő sebessége párhuzamos egymással és a hullám terjedési sebességével. Ha ez nem így van, akkor az összefüggésbe a feltételnek megfelelő sebességkomponenseket kell beírni.
További megszorítás, hogy a frekvencia nem lehet negatív, vagyis távolodó megfigyelő esetén $|u_M| < v$ (ellenkező esetben a megfigyelő lehagyja a hullámot és nem észleli azt), és távolodó forrás esetén $|u_F| < v$ (ellenkező esetben a forrás lehagyja a hullámot).



Bár a fenti összefüggés nem érvényes, ha $|u_F| > v$, gyakorlatilag nagyon fontos az az eset amikor egy folyadékban vagy gázban egy hullámforrásként működő test a hullámok terjedési sebességénél gyorsabban mozog. Ez a helyzet áll elő például a hang terjedési sebességénél nagyobb sebességgel haladó (szuperszonikus) repülőgépek esetén.
Ha a hullámforrás sebessége nagyobb, mint a hullámterjedés sebessége, akkor a forrás lehagyja a hullámot, tehát előtte nem alakul ki hullám, csak mögötte. Az ábrán egy ilyen estben kialakuló hullámkép látható, ahol feltüntettük a mozgó forrás által létrehozott hullámfrontok helyzetét Δt időközökben.
Látható, hogy a forrás mögött egy kúp alakú hullámfront jön létre, amelyet *Mach-kúpnak*[1] neveznek. A Mach-kúp legkönnyebben sima felületű vízben a vízhullámoknál gyorsabban haladó hajó mögött figyelhető meg.
Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy a Mach kúp szögének (2ϑ) felére a

$$\sin\vartheta = \frac{v}{u_F}$$

összefüggés érvényes, ahol v a hullám terjedési sebessége, $u_F > v$ pedig a forrás sebességének nagysága.
A két sebesség viszonya fontos szerepet játszik a szuperszonikus repülésben, ezért erre bevezették az $M = \frac{u_F}{v}$ jellemzőt, amit *Mach-számnak* neveznek. A Mach-szám tehát azt adja meg, hogy a mozgó forrás (pl. repülőgép) a hullám terjedési sebességének (pl. hangsebesség) hányszorosával halad.
Mivel a hullámfront két oldalán jelentős nyomáskülönbség alakulhat ki, az ilyen hullám az áthaladása során lökésszerű hatást fejt ki (lökéshullám).

[1] Ernst MACH (1838-1916) osztrák fizikus.