

**Integrált szemléletű feladatbank
a természettudományos tehetséggondozáshoz
középiskolában**

Készült a TÁMOP 4.1.2/1/B projekt támogatásával

A feladatbank kidolgozásában közreműködők:

Baranyai József	–	biológia
Horányi Gábor	–	fizika
Réti Mónika	–	kémia I.
Szalay Luca	–	kémia II.
Zsiros Péter	–	matematika

A szerkesztésben közreműködtek:

dr. Iker János
Réti Mónika
Szihay Mónika
Media Oktatási és Szolgáltatási Kkt.

Készült 250 példányban
EKF nyomda

Felelős kiadó: dr. Iker János
A kötetet gondozta: Media Oktatási és Szolgáltatási Kkt.

Szombathely, 2011.

Integrált szemléletű feladatbank
a természettudományos tehetséggondozáshoz
középiskolában

TÁMOP-4.1.2-08/1/B-2009-0006

Pedagógiai szolgáltató és kutató hálózat kialakítása a pedagógusképzésben a nyugat-dunántúli régióban

Tartalom

Biológia	9. oldal
Fizika	87. oldal
Kémia I.	183. oldal
Kémia II.	225. oldal
Matematika	273. oldal

Bevezető

A TÁMOP 4.1.2/B projekt keretében a Nyugat-magyarországi Egyetem Regionális Pedagógiai Szolgáltató és Kutató Központja – a projekt általános céljaihoz kapcsolódva – kiemelten fontosnak tartja a pedagógusképzés megújítását, összekapcsolva a közoktatásban dolgozó pedagógusok munkájának szakmai, módszertani támogatásával.

A program keretében a képzők képzése és a partnerintézményekben a mentorok felkészítése mellett fontosnak tartottuk a kutatásfejlesztést.

Ennek keretében a mérés-értékelés, a minőségbiztosítás mellett a továbbképzési rendszer megújítását és elektronikus tehetséggondozó rendszer kialakítását, hozzá kapcsolva integrált szemléletű tehetséggondozó feladatbank kifejlesztését végeztük el.

Az integrált szemlélet egyszerre jelenti az egyes tantárgyak feladataiban megjelenő más tantárgybeli ismereteket, tevékenységeket; egyben a tudományos problémák és a gyakorlati élet szoros kapcsolatát. A színes problémák és tartalom érvényesíti a tudományos gondolkodás értékeit, igazodik a természettudományi diszciplínák tudásrendszerének szerveződéséhez, és felvillantja a gazdag kapcsolódási lehetőségeket a mindennapi élet különböző területeihez.

A feladatok önmagukban is élvezetes tanulási problémák megoldási lehetőségét kínálják a tehetséges diákoknak, és egyben jó módszertani mintául szolgálnak a tehetséggondozásban dolgozó tanároknak.

A szerzőkkel együtt remélem, hogy a feladatbank alkalmazása sokkal több tehetséges tanulóval megszeretteti a természettudományokat, és a nemzeti célokkal összhangban sokan választják a természettudományi és műszaki felsőoktatásban való tanulást.

A feladatbank alkalmazása mellett javaslom a honlapunkon (<http://slc.pszk.nyme.hu/>) a moodle keretrendszerű elektronikus tehetséggondozó rendszer használatát.

A feladatbank használatához jó munkát, sikereket kívánok!

dr. Iker János

Biológia

Bevezető

Kedves Olvasó!

Miközben ezt a szöveget olvasod, a képeken bemutatott idegsejtek sokasága dolgozza fel az látott információt, míg végre észleled és megérted! Ha még a szemedet és az ujjaidat is mozgatod a sorok olvasása közben, rengeteg, a képen látható piramis alakú sejtet aktivizálsz szintén az agykérgedben!

Ne hidd, hogy van szürkeállományod, az csak bizonyos, nem élő metszeteken szürke! Kicsit paradox felhívás, hogy használd a szürkeállományodat. Viszont idegsejtjeidet, agykérgedet, az agykéregnek azt a részét (neocortex), amely az embert kiemelkedően problémamegoldóvá tette azt most nagyon is használhatod.

Bizonyára érdekel:

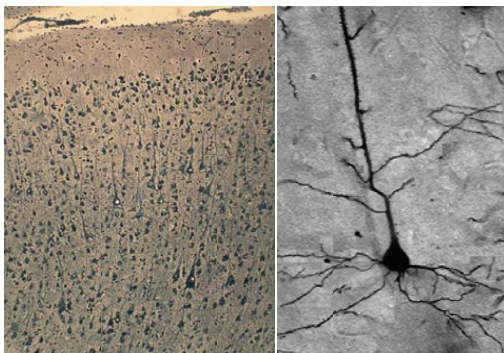
Miért nem esik össze a tüdő, ha kilélegzünk?

Miért csökken a belélegezhető oxigén mennyisége a magasság emelkedésével?

Miért lehet ödémás valaki, ha fehérjehiányos a táplálkozása?

Mért repedhet meg könnyen az ere, ha kicsit tágult az egyik szakasza?

Mennyi sugárterhelés ér naponta, évente, életed folyamán?



Ha megoldod a feladatokat, a válaszokat is megkapod! Ha kérdésed van, elakadtál, akkor segítünk a honlapon keresztül!

Jó munkát! Éljen a neocortex!

Néhány érdekes adat:

Miközben ezt az oldalt végigolvastad, szíved kb. 12 liter vért továbbított, kb. 10 liter levegő cserélődött ki a tüdődben. Érdekeséggé tegyük, hogy egy átlagos 60 éves felnőtt élet-tartam során a szív mintegy 200.000 m³ vért pumpál a keringésbe, 5–6.000 m³ és kb. 80.000 hektoliter oxigén kerül felhasználásra a szövetek sejtjeiben az anyagcsere céljaira. Közben elfogyasztott hozzávetőleg 17,5 tonna szénhidrátot, 2,5 tonna fehérjét, 3 tonna zsírt, 75 tonna vizet...

1. rész: Nyomásviszonyok vízben, földön, levegőben és az űrben

I. Űrutazás

Érdekes

„Az űrutazás hajnala óta érdekli az embereket a kérdés, hogyan viselkedne az emberi test az űr vákuumának kitéve, lehetséges-e egy ilyen élményt túlélni, és ha igen, mennyi ideig. Egy szerencsétlen balesetnek köszönhetően azt már jó közelítéssel tudjuk, hogy mennyi ideig képes életben maradni egy vákuumnak kitett emberi szervezet. 1971-ben egy meghibásodott szelep miatt meghalt három orosz űrhajós, akik a Szojuz 11 űrkapszulájukkal éppen a légkörbe való visszatérésre készültek. A vizsgálatok utólag kiderítették, hogy a 168 kilométer magasan meghibásodott kapszula 11 perc 40 másodpercen keresztül volt kitéve az extrém körülményeknek, amíg be nem lépett az atmoszférába. Ez idő alatt a belső légnyomás nullára zuhant le. A három űrhajós 30-40 másodpercen belül meghalt...”

<http://www.newscientist.com>

A. Mi a nyomás mértékegysége az SI-ben?

- A. N
- B. pa
- C. Pa
- D. pascal
- E. Hgmm

B. A pontozott vonalakra két mértékegység jelét kell írnod, hogy az egyenlőség igaz maradjon!

1000 = 7,5.....

Gondolkodj, ne tippelj!

Melyik nagyobb a kettő közül?

3.

- A. a légnyomás értéke a tüdőben a belégzés végének pillanatában
- B. a légnyomás értéke a tüdőben a kilégzés kezdetének pillanatában

4.

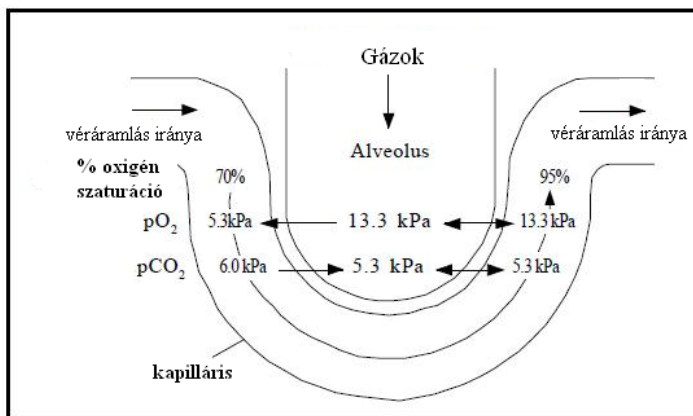
- A. az aortában mérhető nyomásérték a bal kamra összehúzódásakor
- B. az aortában mérhető nyomás a bal pitvar összehúzódásakor

A parciális nyomás az a nyomás, amit az adott komponens fejtene ki, ha az egyedül tölténé be a rendelkezésre álló teljes térfogatot az adott hőmérsékleten. Értéke egyenlő a teljes nyomásnak és annak a hányadnak a szorzatával, amit az illető gáz a teljes gázmennyiségből képvisel. Például a száraz levegőben az O₂ 21 %. Tehát a parciális nyomása $0,21 \cdot 760 \text{ Hgmm}$ vagyis 160 Hgmm.

Fejezd be az alábbi mondatot!

5. Érthető módon a levegő páratartalma ezt az értéket

A gázok parciális nyomásviszonyait az alveolusok (léghólyagocskák) szintjén az alábbi ábra mutatja. Ezt az ábrát a későbbi feladatok megoldásához is használd fel! A vízgőz parciális nyomása 6,2 kPa testhőmérsékleten.



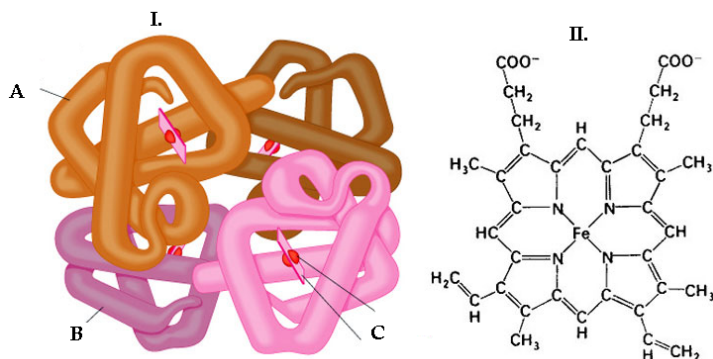
Az oxigén parciális nyomása* a tüdőben 13,3 kPa, a sejtek szintjén 5,3 kPa. A szén-dioxid parciális nyomása a tüdőben 5,3 kPa, a sejtek szintjén 6 kPa.

*Az oxigénnek és a szén-dioxidnak a sejtek szintjén nincs parciális nyomása, mivel oldott állapotban vannak. A kijelentés helyesen úgy kell értelmezni, hogy a sejtben oldott anyag a megadott parciális nyomású gázzal tartana egyensúlyt, ha a sejtet külső gázkezelettel hoznánk érintkezésbe.

6. Miért nagyobb a különbség az oxigénre vonatkozóan, mint a szén-dioxidra?

- A. mert az oxigén nem oldódik fizikailag a vérplazmában az szén-dioxid igen
- B. mert az oxigén nem oldódik kémiai a vérplazmában az szén-dioxid igen
- C. mert a szén-dioxidnak nagyobb a diffúziós kapacitása
- D. mert az oxigén kötődik a hemoglobinhoz a szén-dioxid pedig nem
- E. mert a hőmérséklet befolyásolja a gázok áramlását

Tekintsd meg az alábbi ábrát! Mutatja, hogy a felnőtt emberre jellemző hemoglobin 2-2 fehérjeláncból áll és mindegyik fehérjelánc tartalmaz porfirin vázat (tetrapirrol gyűrűt), amelyben vas van.



A részletekre is figyelj!

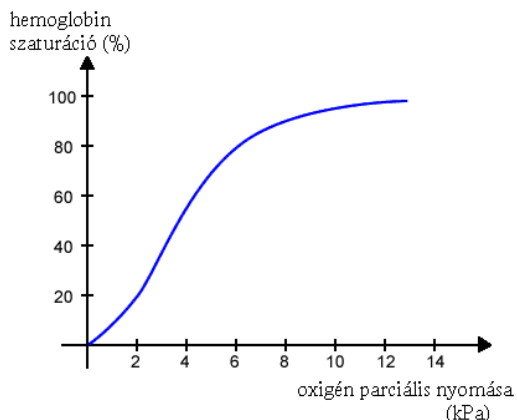
7. „Az I. ábra” melyik részletének felel meg a II.? Add meg az ábra betűjelét!

8. Ezek alapján hány oxigénmolekulát tud megkötni maximum egy hemoglobinmolekula?

9. Az ábrán az egyik jelölés hibás: melyik és miért?

Tekintsd meg az alábbi ábrát! A szaturáció kifejezés telítettséget jelent. Például a vér oxigén szaturációja az oxigenizált hemoglobin aránya a teljes hemoglobin mennyiséghez képest.

1. ábra



Írj le egy következményét annak, hogy...

10. A hemoglobin oxigén szaturációs görbéje nem lineáris görbe

Dönts el az alábbi ábrára vonatkozó állítás igazságtartamát! Igaz vagy hamis?

11. Ha a hemoglobin oxigén szaturációs görbéje balra tolódik (pl. a most a 4 kPa-hoz tartozó pont a 2 kPa-os nyomáshoz tolódik), akkor a hemoglobin könnyebben veszi fel az oxigént

12. **Írj egy igaz állítást** az ábrára vonatkozóan! A feladat megoldásához fel kell használnod a már említett adatot: az oxigén parciális nyomása a tüdőben 13,3 kPa, a sejtek szintjén 5,3 kPa.

13. **Az ábra alapján magyarázd meg**, hogy miért nagyobb a vér hemoglobin koncentrációja a magasabb tengerszint feletti magasságban élőknél?

14. **Az ábra alapján magyarázd meg**, hogy miért nagyobb a vörösvértestszáma a dohányosoknak?

II. Mélyen – Keszonbetegség

Tekintsünk egy 80 kg tömegű bűvárt, aki 30 méter mélységben dolgozik a vízfelszín alatt. Légköri levegőt juttatnak le neki. A szellőzés hatékony, a bűvárban az alveoláris (tüdőhólyagocskákban jelen lévő) gázok parciális nyomásai pO_2 100 Hgmm és 40 Hgmm a pCO_2 illetve a vízgőz parciális nyomása testhőmérsékleten az alveoláris levegőben 47 Hgmm vagy 6,25 kPa. A nyomás a tenger felszínén 101,3 kPa vagy 760 Hgmm. A tengervíz sűrűsége 1033 kg m^{-3} .

15. Hányszorosára nőtt a nyomás 30 méter mélységben a tengerszinthez képest? Mennyi a nyomás értéke?

- A. nem változott
- B. háromszorosára nőtt
- C. négyszeresére nőtt
- D. kilencszeresére nőtt
- E. harmincszorosára nőtt

A nyomás értéke.....

Nézz rá az 5. feladatra ismét!

16. Hányszorosára nőtt meg a N_2 parciális nyomása a tüdő-léghólyagocskákban? Mennyi a parciális nyomás értéke a tengerszinten és 30 méter mélyen?

17. Henry-Dalton törvény írja le a következőt: Egy gáz oldhatósága (c) egy folyadékban adott hőmérsékleten egyenesen arányos a gáznak a folyadék feletti parciális nyomásával (p). ahol K a gáz minőségétől és hőmérsékletétől függő anyagi állandó. Ha a gáz oldásakor kémiai reakció nem megy végbe, akkor: $c = K \cdot p$

Hogyan változik a gázok fizikai oldhatósága a parciális nyomás növekedésével?

- A. Lineáris az összefüggés, de a nyomásnövekedéssel csökken
- B. Lineáris az összefüggés, a nyomásnövekedéssel nő
- C. Exponenciálisan nő
- D. Exponenciálisan csökken
- E. A nyomástól nem függ csak a hőmérséklettől

18. Mi történhetne, milyen élettani hatással járhatna, ha hirtelen jönne fel a bűvár 30 méter mélységből?

III. Magasan – hipoxia

A nehézségi erőterben levő gázban a nyomáseloszlást és a sűrűségeloszlást a barometrikus magasságformula írja le. A formula itt leírt alakjában a levegő *egységnyi térfogatban* vagy *adott térfogatban* található molekuláinak száma szerepel, mely szerint a levegő molekuláinak száma (N), a potenciális energiájuktól a következőképpen függ:

$$N_z = N_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

, ahol z a tengerszinttől mért távolság, m az egy molekula tömege, g a magasságtól függetlennek tekintett, tengerszinti nehézségi gyorsulás, k a Boltzmann állandó és T az abszolút hőmérséklet.

19. Igaz vagy hamis

A tengerszintre vonatkoztatott relatív molekulaszám csak az exponenciális tagtól függ

Számolj! Használd a függvénytáblázatot!

20. Hány darab oxigénmolekulát tudsz belélegezni?

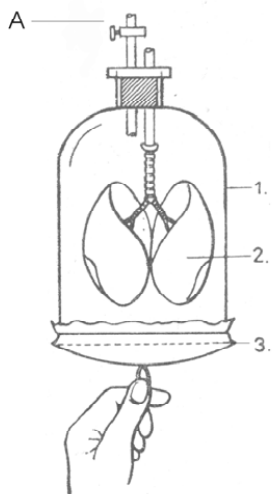
Vegyük a levegő relatív molekulatömegét 29-nek. Határozzuk meg a barometrikus magasság-formula felhasználásával, hogy mennyi lesz a belélegzett levegőben a részecskék száma 10 km-es és 168 km-es magasságban a tengerszint magasságában levő részecskeszámhoz viszonyítva. A belégzési levegő térfogata 0,5 liter. Számoljunk végig 273 K-el (noha tudjuk, hogy a hőmérséklet értéke is változik a magassággal).

21. Milyen, a nyomásváltozással kapcsolatba hozható élettani változások vezethettek az űrhajósok halálához? Írj legalább kettőt!

IV. Légzésünk problémái

IV. 1. Donders modell – Amikor a levegő halálos lehet

Tekintsd meg az alábbi tüdőmodellt bemutató ábrát, majd oldd meg a feladatokat!



1. Melyik szervnek felel meg a 3. számmal jelölt gumihártya?

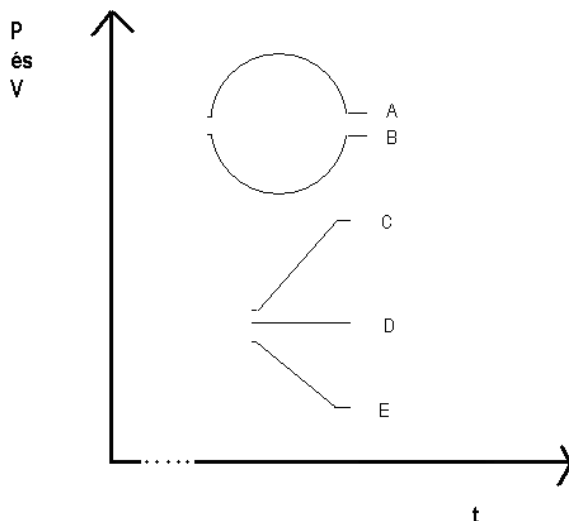
2. Az alábbiak közül melyiknek felelhetne meg a nyitott A-jelű cső (az ábrán baloldali cső)?

A. nyelőcső B. légcső C. sérülés

3. Ha az A-jelű cső nyitva van mozog-e a tüdő a modellben? Válaszod indokold!

4. A jobb oldali görbék közül melyik mutatja helyesen a nyomás változását a 2. számmal jelölt szervben, miközben a gumimembránt lefelé mozgatjuk (a légzési ritmusnak megfelelően) és az A cső zárt?

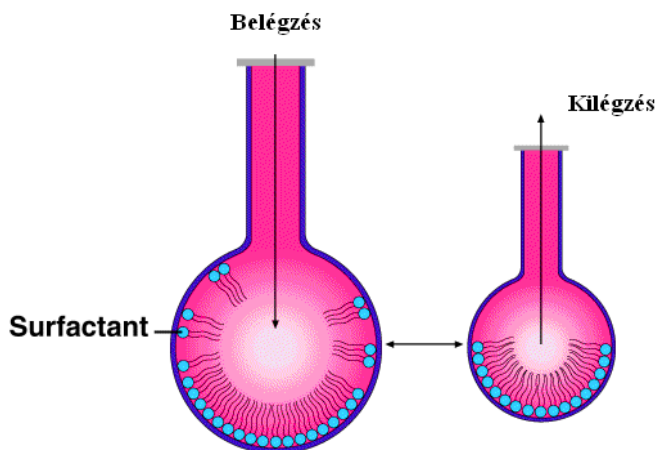
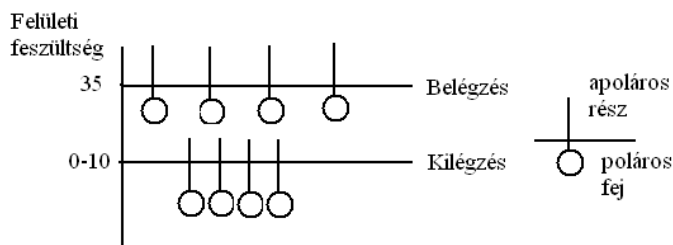
5. Az előző feladatban szereplő görbék közül melyik mutatja helyesen a nyomás változását az üveghenger belsejében, miközben a gumimembránt lefelé mozgatjuk és az A cső zárt?



IV. B. Surfactant (felületaktív anyag)

Ahhoz, hogy egy újszülött viszonylag könnyen tudjon lélegezni, az szükséges, hogy a tüdők légshólyagjai levegóvel telve nyitva tudjanak maradni. Normális esetben a tüdők - zsírokból és fehérjékból álló - felületaktív anyagot, más néven surfactantot termelnek. A felületaktív anyag amely a légshólyagok belső felszínét béleli, a felület vízzel való nedvesedését befolyásolja. Csökkenti a felületi feszültséget, azért a felület jobban nedvesedik. Azáltal, hogy csökkenti a felületi feszültséget, lehetővé teszi, hogy a légshólyagocskák (alveolusok) a teljes légzési ciklus alatt nyitva maradjanak. A felületaktív anyag általában a 34. terhességi héttől termelődik olyan mennyiségben, hogy megszületéskor az újszülöttnak nagy valószínűséggel nem lesz légzési zavara.

Tekintsd meg az ábrákat, majd oldd meg a feladatokat!



6. Az ábrák alapján hogyan szabályozza a felületi feszültséget a surfactant eloszlása a kilégzés és belégzés során? (3 pont)

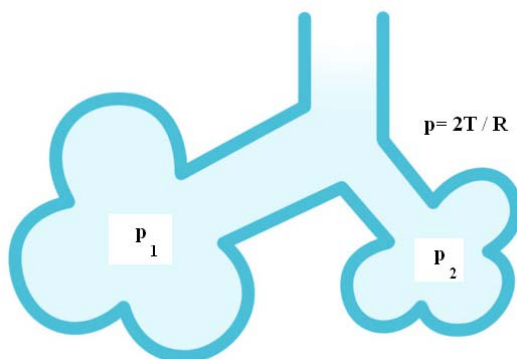
- A. a felületi feszültség közel egyenesen arányos a koncentrációjukkal
- B. a felületi feszültség közel fordítottan arányos a koncentrációjukkal
- C. kilégzéskor egymáshoz közelednek, belégzéskor egymástól távolodnak a surfactant molekulák
- D. kilégzéskor egymástól távolodnak, belégzéskor egymáshoz közelednek a surfactant molekulák
- E. kilégzés közben csökken a felületi feszültség

7. Az ábrákat és Laplace-törvényét felhasználva támaszd alá a 6. feladatra adott megoldásodat!

Laplace törvény: $p = 2T / R$, ahol p az üreg falát feszítő nyomás, T felületi feszültség, R lég-hólyagocska sugara. Az ábrán a p_1 a nagyobb térfogatú, míg p_2 a kisebb térfogatú lég-hólyagocska falát feszítő nyomás. Segítségül még az alábbi törteket is láthatod, amelyeknek a megfelelő felhasználása segíthet a megoldásban:

$$4 = \frac{32}{8}$$

$$8 = \frac{16}{2}$$



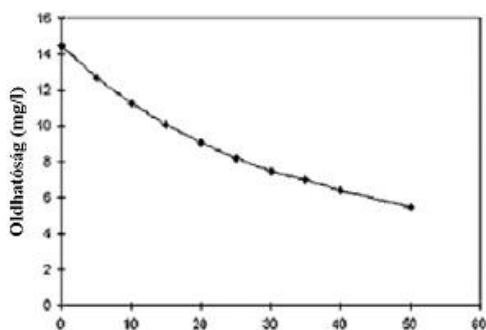
A vízben oldható oxigén mennyiségét alapvetően három tényező határozza meg: a víz hőmérséklete, sótartalma illetve az oxigén parciális nyomása.

Szövegkiegészítés

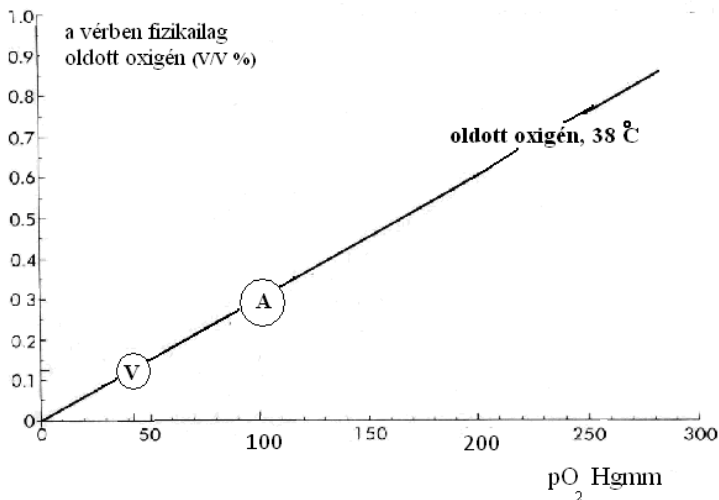
A „nő” és a „csökken” szavakat kell értelemszerűen beírnod a pontozott helyekre!

Az oldható oxigén mennyisége... **8**... a hőmérséklet csökkenésével (a hideg víz több oxigént képes felvenni). Az oldható oxigén mennyisége... **9**... a víz sótartalmának csökkenésével (az édesvíz több oxigént képes feloldani, mint a tengervíz). Az oldható oxigén mennyisége... **10**... a légköri nyomás csökkenésével (a víz által felvett oxigén mennyisége kisebb nagyobb tengerszint feletti magasságon).

A grafikon az oxigén-oldhatóságot szemlélteti a... **11**... függvényében.



Az oxigén vízben való fizikai oldhatósága légköri nyomáson olyan kicsi, hogy az emberi légzőszerv által megfelelő mennyiségű oxigént onnan nem tud felvenni a keringési rendszerébe. Az alábbi ábra az oxigén vérben való fizikai oldhatóságát mutatja be az oxigén parciális nyomásának a függvényében. Az „A” betű az artériás, a „V” betű a vénás vér adott nyomásértéken lévő vérgáz értékeit jelöli.



Forrás: http://www.pharmacology2000.com/physics/Chemistry_Physics/physics21.htm

12. Magyarázd meg, miért pont 100 Hgmm-es értékre adtuk meg az artériás vérben az oxigén fizikai oldhatóságát!

13. Hgmm-ként mennyivel nő tehát az oxigén-fizikai oldhatósága?

A teljes telítettség mellett minden gramm hemoglobin 1,34 ml O₂-tartalmaz. A hemoglobin koncentráció normálisan 150 g/l érték körül van jelen a vérben.

14. Hányszorosára növeli a hemoglobin jelenléte a vér oxigénszállító kapacitását?

15. A legkisebb O₂ koncentráció, mely szükséges a vízi élethez kb. 0,13 mM (4,2 mg/l). Ha a tó 20 °C-os, teljesül ez a feltétel? ($K(\text{O}_2, 20\text{ °C}) = 1,3\text{ mM}/101\text{ kPa}$ (vagyis 101 kPa parciális nyomás mellett 1,3 mM koncentráció mérhető).

Az említett okok miatt olyan folyadékot kellett keresni a kutatóknak, amelyben az oxigén oldhatósága az adott nyomásértéken nagyobb. Az elképzelés a '60-as évek közepére vezethető vissza, amikor dr. Kylstra fiziológusnak szembe ötlött a tény, hogy a sóoldatok telítődni tudnak oxigénnel megfelelő nyomáson. Egerekkel kísérletezett, sóoldatot lélegeztetett velük, de arra jutott, hogy a keverékben igen hamar felgyülemlik egy gáz, ami nagyobb mennyiségben mérgezést okoz.

16. Melyik gázra gondolt Kylstra? (Válaszod indokold!)

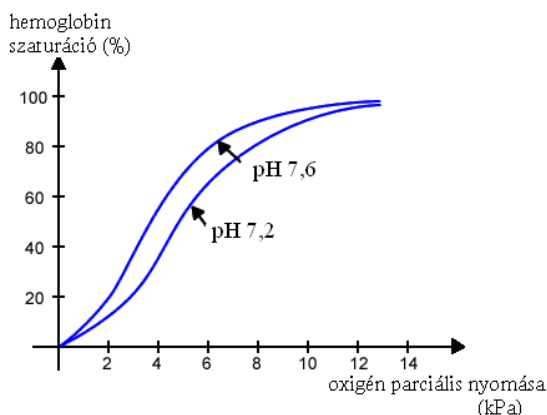
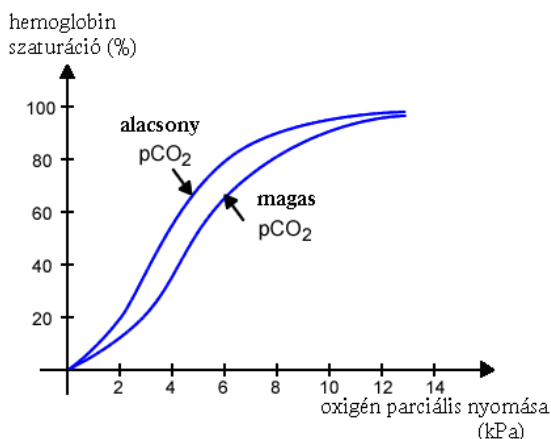
Későbbi kísérletezései során, 1969-ben, Leland Clark rájött arra, hogy az oxigén és a már említett felgyülemelő, mérgező gáz nagyon jól oldódik fluorokarbon oldatokban, mint például a freon. Feltételezván, hogy ez az anyag a tüdőre nincs káros hatással, Clark rájött arra, hogy ezek a fluorokarbon oldatok segíteni tudják az állatok légzését. A **folyadéklégzés** tehát a légzés egy olyan formája, melyben egy levegőt lélegző élőlény oxigénben gazdag folyadékot (általában perfluorkarbondot, rövidítve PFC-t) lélegzik be. Orvosi kezelésben alkalmazzák, jövőben szerepe lehet a búvárokodásban, esetleg az űrutazásoknál is. Az újszülöttek, ha nem képesek elég surfactant termelni, tüdejük nem lesz képes elvégezni a légzést.

A surfactant bevonja az alveolusok felületét, felületi feszültséget keltve, mely kulcsszerepet játszik a tüdő rugalmasságának fenntartásában. 13 újszülöttet vizsgáltak, akikben a surfactant mennyisége nem volt elegendő a légzés fenntartásához. Folyadékterápiát alkalmaztak, melyben PFC oldatot juttattak tüdejükbe. Ezt 24-76 órán keresztül végezték, majd probléma felmerülése nélkül tudtak visszaállni a gázlégzésre (ahogy ez születéskor is végbemegy, hiszen a magzat tüdeje folyadékkal telt). 11 újszülöttben javultak a légzésfunkciók, később viszont 6 mégis meghalt, de ez nem volt összefüggésben a folyadékterápiával.

Leach, C. L. *et al.*, Partial Liquid Ventilation with Perflubron in Premature Infants with Severe Respiratory Distress Syndrome, New England Journal of Medicine, 1996 335, 11, 761–767

IV.C. Szaturációs grafikonok

Tekintsd meg az ábrákat, majd oldd meg a feladatokat!



Dönts el a fenti ábrára vonatkozó állítás igazságtartamát! Válaszod minden esetben indokold!

17. CO₂ jelenléte a Hgb O₂ szaturációját csökkenti.

18. Az alacsonyabb pH „balra tolja” a görbét*

*A görbe emelkedő szakasza tolódik csak balra, nem az egész.

19. A grafikonon szemléltetett hatás 100 Hgmm (13,33 kPa) pO_2 mellett kevésbé fontos, 80 Hgmm (10,66 kPa) alatt azonban jelentős.

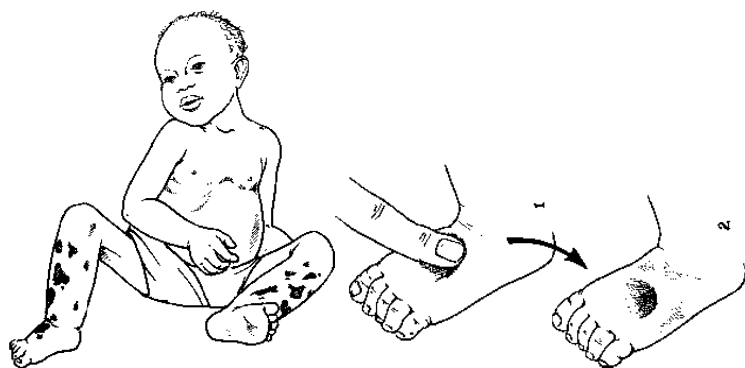
20. A kapillárisokban a savasodás miatt kevesebb O_2 szabadul fel, mint a vér normál pH-ján.

21. A 7,2-ről 7,6-re növekvő pH miatt a hemoglobin hány százalékkal több O_2 -t felvenni a tüdőben? Válaszod indokold!

V. Az ozmózis jelensége

V.1. Kwashiorkor-kór

A kwashiorkor-kór, a kalória- és fehérjehiány valamint az alultápláltság legveszélyesebb formája. Elsősorban csecsemőkben és kisgyerekekben alakul ki, és rendkívül negatív hatása van a fejlődésükre. Jellegzetesen az anyatejtől történő elválasztást követően az egyoldalú szénhidrátalapú táplálkozások következtében fejlődik ki. A fehérjehiány jellegzetes tünetei a vérben hipoproteinémia (főleg albumin), ami testszerte vizenyőt (ödéma) és a hasvízkört (ascites) okoz.



Ha különböző koncentrációjú oldatokat egymás fölé rétegzünk, akkor a két oldat a molekulák hőmozgása következtében egy idő után egyenletesen elkeveredik (diffúzió).

A diffúziós folyamat lefutását elsősorban a koncentrációkülönbség, a hőmérséklet és a nyomás határozza meg.

Hogyan függ a diffúzió sebessége...

1. a koncentrációkülönbségtől?

2. a hőmérséklettől?

3. a nyomástól?

4. A molekulák sebessége szobahőmérsékleten is elég nagy, mégis a diffúzió viszonylag lassú folyamat. Mi lehet ennek az oka? (gázhalmazállapotot feltételezünk).

A. mert az ütközések következtében folyamatosan veszítenek az energiájukból

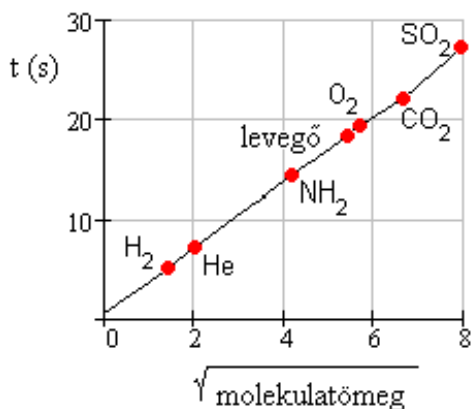
B. mert a molekulák állandó ütközése miatt azok adott irányban csak „zegzugos” pályán haladhatnak

C. mert a közepes szabad úthossz értéke folyamatosan nő.

Graham-törvénye: A különböző anyagi minőségű gázok diffúziósebessége fordítva arányos a molekulatömegük négyzetgyökével.

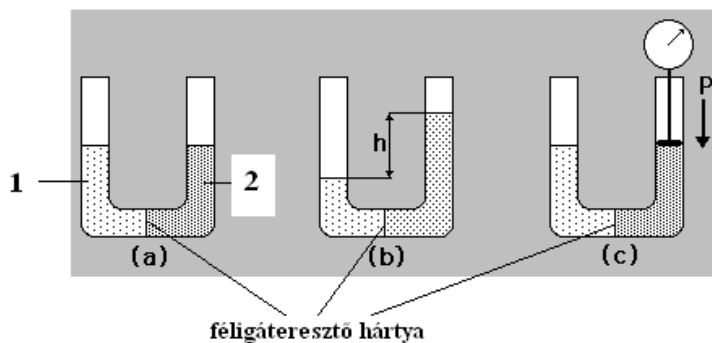
$$\frac{\overline{t_2}}{\overline{t_1}}$$

5. Tekintsd meg az alábbi ábrát, majd magyarázd meg az eddigi ismeretek alapján, hogy milyen összefüggést mutat be!



Effúzió <http://www.chem.tamu.edu/class/majors/tutorialnotefiles/graham.htm>

Ha a két oldatot hártya választja el, akkor a diffúzióban a hártya tulajdonságai is szerepet játszanak. Válasszunk el két különböző koncentrációjú oldatot olyan hártyával, amely csak az oldószer számára átjárható (féláteresztő hártya).



<http://www.sci.sdsu.edu/class/bio202/TFrey/MembraneStructure.html>

6. Az ábra alapján magyarázd meg melyik oldat (1 vagy 2) a töményebb!

7. Mire utal (b) ábra h betűjele?

8. Mire utal a (c) ábra P betűjele?

9. Az alábbiak közül melyik idézi az oldószeráramlását a töményebb oldat felé?

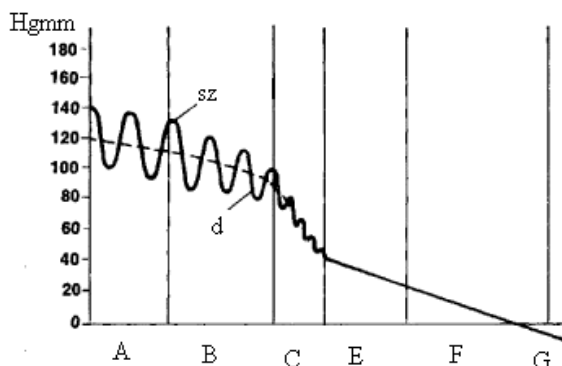
- A. az oldószer göznyomása
- B. a diffúzió
- C. az oldószer hőmérséklete
- D. az oldott anyag molekulatömege

10. Tegyük fel, hogy az oldószer víz és a hártya egyik oldalán csak oldószer van a másik oldalon az alábbi oldatok. Az alábbiak közül melyiknek a legnagyobb az ozmotikus nyomása?

- A. 10 tömeg %-os glükóz oldat
- B. 10 tömeg %-os ribóz oldat
- C. 10 tömeg %-os szacharóz oldat

A vérnyomás orvosi értelemben a vérnek az erek falára kifejtett nyomása. A vérnyomásméréskor azonban csak a nagy artériák nyomását mérjük. Az artériák kisebb ágakra történő oszlásával a vérnyomás is csökken, a legjelentősebb esés a hajszálerek előtti kis verőerekben (*arteriola*) következik be. A hajszálerek artériás végén a vérnyomás valamivel nagyobb, mint a vénás végén. Ez a nyomáskülönbség eredményezi azt, hogy a hajszálerek artériás végén víz és kismolekulájú anyagok szűrődnek ki a szövet közötti térbe, majd a vénás végén visszaszívódnak. Ez eredményezi a szöveti (*sejtközzötti, szövetközzötti*) folyadék cserélődését. A vénás végén a visszaszívódás kisebb, mint az artériás végén a kiszűrődés. A felesleget a nyirokérrendszer (nyirokkeringés) vezeti el.

Tekintsd meg az ábrát, majd oldd meg a feladatokat!



12. Az ábra melyik betűjele mutatja az arteriolák szakaszát?

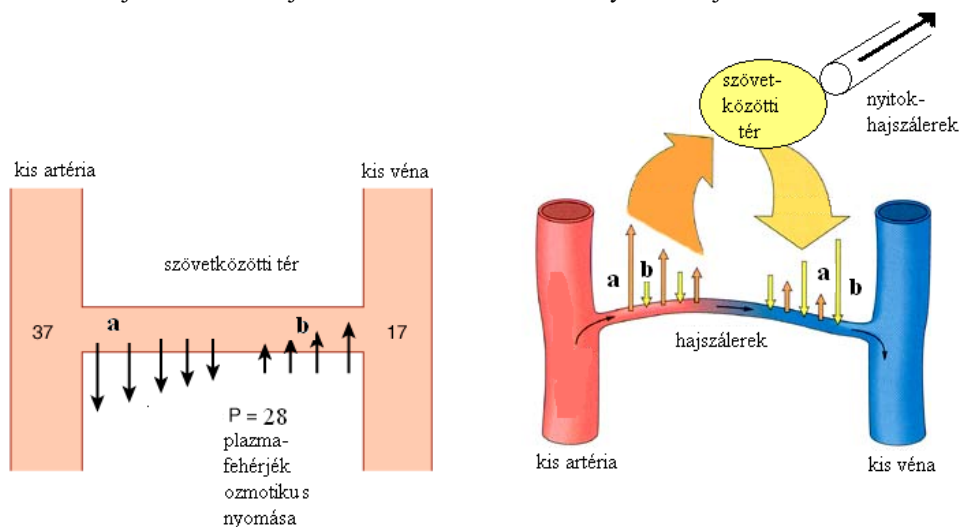
13. Igaz vagy hamis? Válaszodat indokold! A „sz” betű a szív összehúzódásakor, a „d” betű a szív elernyedésekor mért legnagyobb nyomásértékeket mutatja a szívben.

14. Érdekes a görbe lefutásában a G-betűvel jelzett szakasz. A keringési rendszer melyik szakaszát mutatja? Magyarázd meg az ekkor fennálló nyomásviszonyok jelentőségét!

15. Az ábra melyik betűjele mutatja a hajszálerek szakaszát?

16. Mire utal, hogy a C szakasz után megszűnik a görbe hullámos jellege?

Az ábra a hajszálerek és a sejtek közötti tér áramlási viszonyait mutatja be.



17. A két ábrát összevetve mire utalnak a kisbetűk (a és b) ?

- A. Az **a** az ozmózisnyomást, a **b** vérnyomást mutatja
- B. A **b** a lehetséges folyadékmozgások irányát, az a folyadékmozgások eredő irányát mutatja
- C. Az **a** és a **b** is a hidrosztatikai nyomást mutatja

Az **ödéma** (más néven *vizenyő* vagy *vízór*) a kapillárisok és szövetek közötti folyadékcseré folyamatának zavarából adódó fokozott folyadék-felhalmozódás a szövetekben.

18. Az alábbi folyamatok mindegyike eredményezheti az ödéma kialakulását. Feladatod az, hogy a megfelelő igét ird a jelenségek után.

- A. ha az erek átteresztőképessége.....
- B. ha nő az artériás vérnyomás értéke.....
- C. a surfactant.....

A Lymphaticus filariasis – másnéven elefantiázis – drámai hatású fotókról talán ismert lehet: a képeken hatalmasra dagadt karok és lábak jelzik a betegséget. A kórt paraziták férgek okozzák, melyek elzárják a nyirokereket.



19. A rajzolt ábrák és a szöveg felhasználásával magyarázza meg az elefántiázis látható tünetét!

Tekints meg az alábbi táblázatot, majd válaszolj a kérdésre!

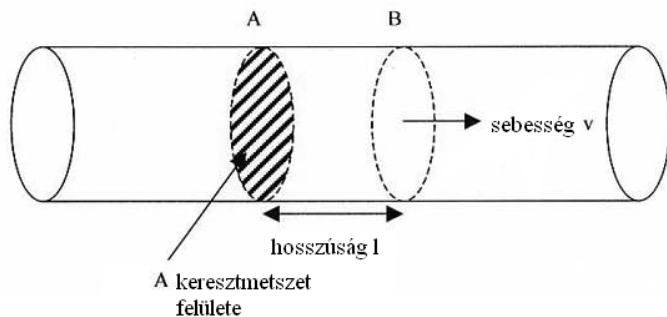
fehérje	g/l	p (Hgmm)	%	Kwashiorkor (g/l)
albumin	45	21,8	kb. 80	15
globulin	25	6	kb. 20	25
fibrinogén	3	0,2	0	3
összesen	73	28	100	43

20.

Melyik fehérjekomponens az egyik fő oka a kwashiorkor-kór tüneteinek kialakulásában, miért?

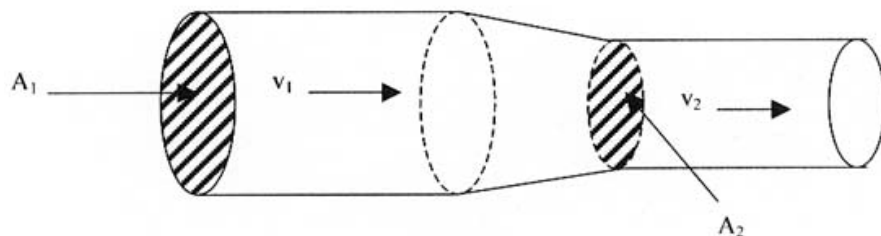
V.2. Érelmeszesedés, aneurizma és társai

A továbbiakban arra keressük a választ miért a prekapilláris erek (közvetlen a hajszálerek előtti érszakasz), a kis artériák és az **arteriolák** területén legnagyobb a vérnyomásesés. Ha egy rendszerben áramlásról beszélünk, különbséget kell tennünk az áramlás sebessége (v) és az áramlás intenzitása (Q) között. Az áramlás sebessége a folyadék időegység alatti elmozdulása (cm/s), az intenzitás az időegység alatt továbbított folyadék mennyisége (cm³/s).



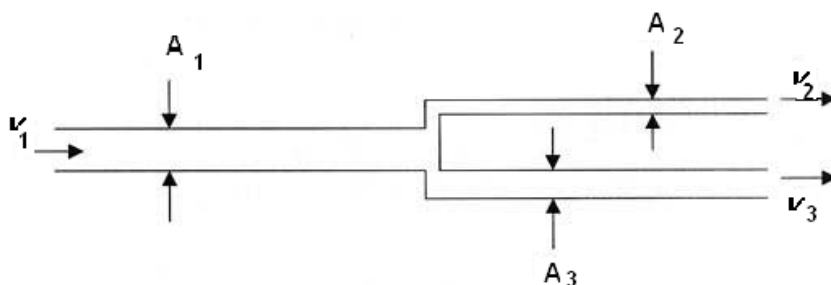
1. A leírtak alapján milyen összefüggés áll fenn Q , A (a keresztmetszet felülete) és hosszúság (l) között?

A fennáll a következő összefüggés is: $Q = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$



2. Írd le saját szavaiddal az egyenletben foglaltakat úgy, hogy az ábra jellemzőit is figyelembe veszed!

3-4. Mindezek alapján hol (melyik érszakaszban) a leglassúbb a véráramlás sebessége az emberben, miért?



<http://www.itacanet.org/eng/water/Section%20Water%20systems%20general/fluid/page5.htm>

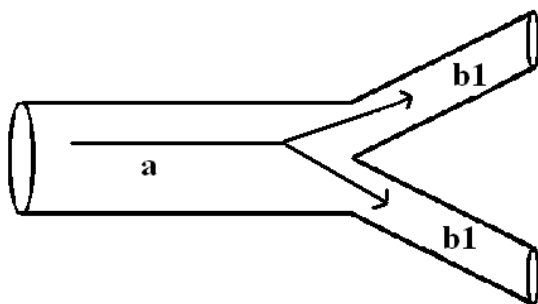
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 + A_3 v_3$$

5. Írd le saját szavaiddal az egyenletben foglaltakat úgy, hogy az ábra jellemzőit is figyelembe vedd!

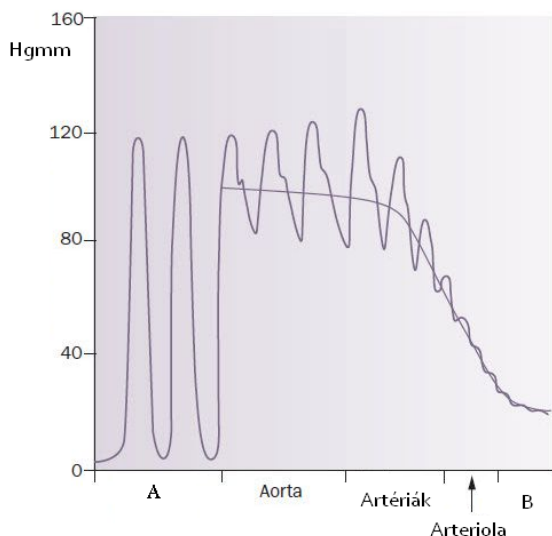
Tekintsd meg az alábbi két ábrát, majd oldd meg a feladatokat!

A Hagen–Poiseuille-törvény*: összenyomhatatlan, sűrűdő folyadék, stacionárius áramlásakor, kör keresztmetszetű csőben (sugara: r , hossza: l) az intenzitás ($Q=V/t$) a nyomástól (p) a következő összefüggés szerint függ:

*A törvény egzaktul csak newtoni folyadékok stacionárius és lamináris áramlására vonatkozik. A vér ugyan nem-newtoni folyadék és a szívhez közeli erekben az áramlás sem stacionárius, a Hagen—Poiseuille-törvény közelítésképpen mégis alkalmazható a vérkeringésre.



$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 \eta l}$$



Szövegkiegészítés

A... 6... vérkörben a vérnyomás fiziológias nyugalmi értéke közelítőleg $p_1 = \dots 7\dots$ Hgmm, ez a különbség az aorta középnyomása és a... 8..... pitvar középnyomása ($p_2 \sim 0$ Hgmm) között. Az érrendszer két „vége” között mérhető nyomáskülönbség ($\Delta P = p_1 - p_2$), tehát az a szív által generált erő, amely hajtja a vért az érrendszeren, helyesebben a nagyvérkörön keresztül. A kisebb artériák elágaznak arteriolákká az így létrejövő együttes keresztmetszeti felület mintegy 20–30 %-kal nő az elágazás után.. A Hagen–Poiseuille-törvény értelmében az R áramlási ellenállás... 9... arányos a vér viszkozitásával (η) valamint az ér hosszával (l) és... 10... arányos az ér sugarának (r) negyedik hatványával. Mivel az elágazódások száma a prekapilláris erek területén igen... 11....., nyilvánvaló, hogy e szakaszon a perifériás ellenállás meredeken... 12....., ezért e viszonylag rövid szakaszon a kapillárisok kezdetéig az artériás középnyomás... 13... Hgmm-ről... 14... Hgmm körüli értékre csökken.

Egészítsd ki a mondatot!

15. Ha a cső sugara csökken, változatlan áramlás-erősség fenntartásához..... Δp kell.

Mennyiben hasonlít, és miben különbözik a Hagen–Poiseuille-törvény Ohm törvényétől? Írj legalább egy-egy megoldást!

16. Hasonlít:

17. Különbözik:

A Hagen-Poiseuille-egyenlet segítségével bizonyítható, hogy hány százalékos keresztmetszeti felületnövekedés kellene ahhoz, hogy az elágazódások hatására ne növekedjék az áramlási ellenállás.

18. Számítsd ki a felületnövekedés mértékét! Használhatod a függvénytáblázatot is!

19. Az r változtatásával nagyon hatékonyan szabályozható az áramlás az erekben.pl.: ha egy cső sugarát felére csökkentjük, akkor hogyan változik az anyagtranszport sebessége?

- A. négyszeresére nő
- B. tizenhatodára csökken
- C. negyedére csökken

20. Melyik betegség kialakulását segíti elő ezek alapján az érfal szűkülése?

- A. magas vérnyomás (hipertónia)
- B. vérszegénység (anémia)
- C. érlemeszesedés (ateroszklerózis)

Az aneurizmák az ér falának valamennyi rétegét érintő tágulatai. A Laplace törvény értelmében az erekben uralkodó nyomás és az erek átmérőjének növekedése (úgy, mint hipertrofiája) az erek falának fokozódó feszülését eredményezi. (Az érfalon kívüli nyomás elhanyagolható értékű.)

A Laplace törvény szerint a falfeszülés = nyomás x belső sugár / falvastagság.

($T = P \cdot r / h$, ahol P a transmuralis nyomás a falon keresztül ható összes nyomás belső és külső nyomások különbsége, r az ér sugara, h az ér falvastagsága.)

Így, ha egy értágulat átmérője kétszeresére nő, akkor a falnyomás... 21... lesz. A fal vastagsága...22...A Laplace-törvény értelmében a repedésre való hajlam négyzetesen változik, így ...23...

21.

- A. kétszer nagyobb
- B. négyszer nagyobb
- C. fele akkora
- D. negyed akkora

22.

- A. kétszer nagyobb lesz
- B. négyszer nagyobb lesz
- C. fele akkora lesz
- D. negyed akkora lesz.

23.

- A. négyszeresére nő
- B. negyedére csökken
- C. nyolcszorosára nő
- D. nyolcadára csökken

Ezek alapján talán már érhető a kóros értágulatok, aneurizmák megrepedésének fokozott veszélye.

A falfeszülés növekedésének irányába hat		Ereink élettani jellemzői	
<i>Nagy vagy kis?</i>		<i>Nagy vagy kis?</i>	
24.	transzmuralis nyomás	... 27... transzmuralis nyomás	véna
25.	sugár	...28...sugár	hajszálér
26.	falvastagság	...29...falvastagság	artéria

Az aneurizma kialakulásainak okait vizsgáló törvények közül meg kell említenünk Bernoulli törvényét is. Bernoulli törvényében a mechanikai energia-megmaradás törvénye érvényesül: $p + \rho \cdot g \cdot h + 0,5 \cdot \rho \cdot v^2 = \text{konst.}$ p = sztatikai nyomás, $\rho \cdot g \cdot h$ = hidrosztatikai nyomás, $0,5 \cdot \rho \cdot v^2$ = dinamikai nyomás. Következmény: Az értágulatnál a kontinuitási egyenletet alapul véve ... (30) a sebesség ott a sztatikus nyomás 31

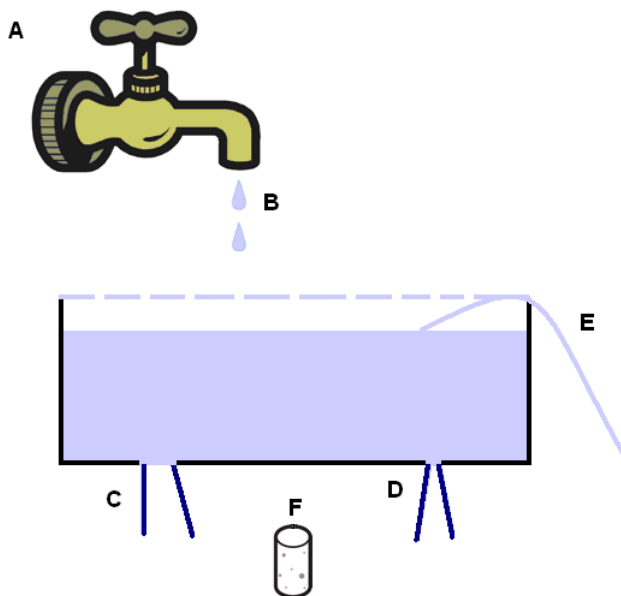
VI. A fenilketonúria modellezése

A fenilketonúria (PKU) recesszív módon öröklődő enzimhiányon, egészen pontosan a fenilalanin-hidroxiláz nevű enzim hiányán alapuló betegség. Az enzimhiányért felelős hibás gént a 12. kromoszóma hosszú karján lokalizálták. A fenilalanin az esszenciális aminosavak közé tartozik. A betegség a vérben és vizeletben felszaporodó aminosavról, a fenilalaninról ismerhető fel, amelyet újszülött korban, vérminta (Guthrie - teszt) útján vizsgálnak. A fenilalanin mennyiség nagyobb részét az egészséges szervezet májában termelődő fenilalanin-hidroxiláz enzimje egy másik aminosavvá, tirozinná alakítja, mely utóbbi aminosav a melanin nevű festékanyagnak és az adrenalin hormonnak is előanyaga. A szervezetnek ezek előállításához szüksége van a fenilalaninból képződött tirozinra is. A fenilalanin többi része beépül fehérjéinkbe.

A fenilketonúria (PKU) betegségben szenvedőknél hiányzik, vagy nem működik a fenilalanin-hidroxiláz enzim. Ennek hiányában a fenilalanin hidroxileződés helyett lassú transzaminálódáson megy keresztül, aminek a terméke a fenilpiroszölősav, amely vagy a jellegzetes illatú fenilacettsavvá dekarboxileződik vagy feniltejsavvá redukálódik. Ezek a termékek bizonyos koncentrációban súlyosan károsítják a fejlődő agyat.

A PKU-ra diagnosztizált emberek fenilalanin diátán élnek, figyelni kell a fenilalanin-forrást jelentő anyagokra (például Aspartam/Nutra Sweet).

Az alábbi ábra betegség kialakulásához vezető folyamatot modellezi. Adott egy kád, a kádba a csapból befolyó víz, a kád két nyílása és egy dugó.



Melyik betű felel meg a modellben a következőknek?

1. fenilalanin-hidroxiláz enzim hiánya.....
2. hús, tojás.....
3. fenilalanin mennyiség a vizeletben.....
4. fenilalanin mennyiség a vérben.....
5. tirozin.....
6. fehérjéink.....

A **fenilketonúria** egy öröklődő anyagcserezavar. A recesszív allél gyakorisága Magyarországon 0,01.

7. Magyarországon átlagosan minden hányadik ember hordozója a hibás génnek?

- A. 50.
- B. 100.
- C. 1000.
- D. 200.
- E. 500.

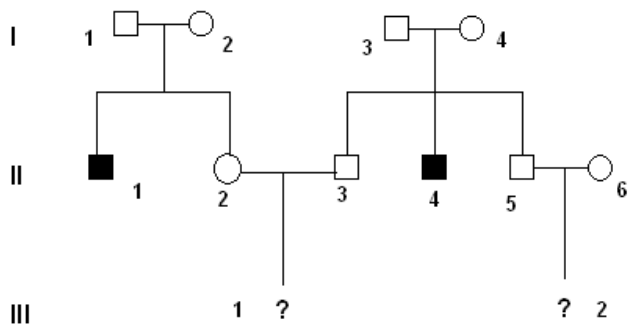
8. Magyarországon átlagosan minden hányadik egészséges párnak van esélye beteg gyermeket nemzeni? (A mutációtól eltekintünk.)

- A. 200.
- B. 400.
- C. 39000.
- D. 2500.
- E. 10000.

9. Magyarországon ennek tekintetében hozzávetőlegesen minden hányadik szülésre jut egy fenilketonúriás csecsemő?

- A. 200.
- B. 100.
- C. 10000.
- D. 2500.
- E. 100000.

Családfaelemzés (pedigré)



10. Melyek 100 % heterozigóták az alábbiak közül erre a tulajdonságra nézve? A mutációtól eltekintünk.

- A. I/1
- B. I/3
- C. II/4
- D. II/3
- E. II/1

11. Milyen valószínűséggel homozigóta a II/2?

- A. 0,25
- B. kb. 0,33
- C. 0,5
- D. 1
- E. 0

12. Milyen valószínűséggel heterozigóta a II/6

- A. pontosan 0,0198
- B. pontosan 0,66
- C. 0,5
- D. kb. 0,66
- E. kb.0,0198

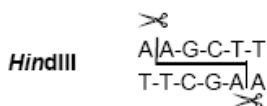
13. Milyen valószínűséggel születik beteg gyermeke a II/2 és II/3 házaspárnak?

14. Milyen valószínűséggel születik beteg gyermeke a II/5 és a II/6 házaspárnak?

15. Hányszor nagyobb a valószínűsége annak, hogy a II/5 és a II/6 házaspárnak beteg gyermeke születik, minthogy beteg fia vagy lánya?

Géndiagnosztika

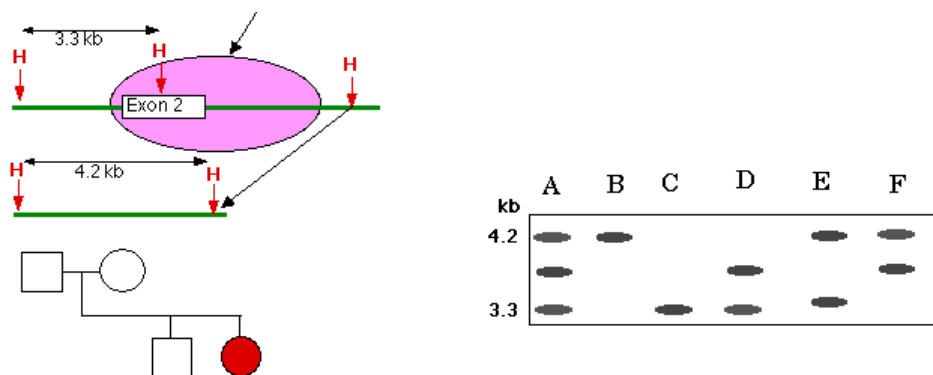
Vannak DNS hasító enzimek (endonukleázok), amelyek a kettős szálú DNS-t bizonyos nukleotidsorrendnél felismerik és a felismert részben a két-két nukleotid közötti foszfo-diészter kötést széthasítják. A különböző endonukleázok más-más, 5-10 bázispárból álló szakasz nukleotidsorrendjét (szekvenciáját) ismerik fel a hosszú DNS láncban. Jelenleg több száz különböző szekvenciák mentén hasító enzim áll a genetikusok rendelkezésére. Ezek közül mutatunk be egyet. A restrikciós enzim neve annak a baktériumnak a nevéből ered, amelyikből izolálták. A HindIII például a *Haemophilus influenzae*-ből harmadikként izolált restrikciós enzim.



A DNS hasító enzimekkel kisebb-nagyobb szakaszokat vághatunk ki a hosszú DNS láncból, attól függően hány hasonló sorrendű szakasz található a DNS láncban. A kihalászott DNS szakaszokat lúgos oldatba helyezett gélhálóba juttatjuk, ahol a különböző hosszúságú szakaszok az elektromos erőterben különböző sebességgel haladnak (futtatás). A feszültség kikapcsolása után a különböző méretű szakaszok különböző távolságra állnak meg a kiindulási (**start**) helytől. A szakaszok ezután megfesthetők, láthatóvá válnak (kromatográfia).

Miután az emberi fehérvérsejt sejtmagi DNS-ének 4200 bázispár (bp) hosszúságú szakaszát un. Polimeráz láncreakcióval (PCR) megsokszoroztuk, így egyetlen sejtből nagymennyiségű DNS szakaszhoz jutottunk. Tegyük fel, hogy ez az 4200 bp hosszúságú szakasz a fenilalanin-hidroxiláz (PAH) enzimfehérjéjét kódoló gén bázissorrendjét tartalmazza.

Három testvértől vett vérmintát elemzünk úgy, hogy kinyertük és megsokszoroztuk a sejtjeikből kivett 4200 bp hosszúságú DNS szakaszt, majd a HindIII-at hozzátesszük mindegyik mintához, és géltre visszük a megemésztett DNS mintákat, majd megfuttatjuk. A baloldali ábra azt mutatja, hogy a PAH gén 2.exonjában mutációt (deléció) azonosítottak, a mutáció miatt az enzim nem működőképes. A H betű a HindIII hasító helyekre mutat. A jobboldali gélkép a családfán bemutatott személyek vérmintáiból vett DNS analízis eredményét mutatja a HindIII-mal kezelt PAH génjére vonatkozóan.



<http://users.rcn.com/jkimball.ma.ultranet/BiologyPages/P/Phenylketonuria.html>

16. Milyen töltésű a DNS a futtató elegyben? Miért?

Az egyes gél-képek közül melyik...

17. az apáé?

18. az anyáé?

19. a fiúké?

20. a lányoké?

21. Ki fenilketonúriás a családban?

22. Ki a hordozó?

Megoldások-minták, példák, rövid magyarázatok

Nyomásviszonyok vízben, földön, levegőben és az űrben

1. D, a nyomás mértékegysége a *pascal*; jele: **Pa**, és $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$
2. $1000 \text{ Pa} = 7,5 \text{ Hgmm}$
3. C, ugyanannyi, a belégzés vége a kilégzés eleje (lásd nyomásgörbék belégzés és kilégzés alatt a tüdőben)
4. A, mert a bal kamra majdnem az egész test felé nyomja a vért, a nagyobb perifériás ellenállás irányába
5. csökkenti
6. C, mert a nyomáskülönbségeken kívül az is fontos mennyire könnyen jut át a membránokon (membránfelszín, membránvastagság) az adott gáz (ezt nevezik diffúziós kapacitásnak is). A szén-dioxidra vonatkozó transzportsebesség nagyobb. Megjegyzés: önmagában a B is igaz
7. C betűvel jelölt részletnek
8. 4 O_2 . Mérések szerint azonban csak ritkán kötődik oxigén mind a négy helyre. Gyakran csak három oxigén molekula található átlagosan egy hemoglobinban.
9. A hemoglobin nem vasat, hanem vasiont tartalmaz (Fe^{2+}).
10. Például $13,5 \text{ kPa}$ oxigén parciális nyomásnál 100% a telítettség, tehát a nyomás növelésével nem nő a telítettség. Vagy: $2\text{-}7 \text{ kPa}$ oxigén parciális nyomásnál nagyobb a telítődés, mint $8\text{-}13 \text{ kPa}$ oxigén parciális nyomás között.
11. Igaz, ha balra tolódik, akkor a hemoglobin könnyebben veszi fel az oxigént, de nehezebben adja le a szöveteknek.
12. A telítettség alacsonyabb oxigén parciális nyomásnál kisebb, de még $5,3 \text{ kPa}$ oxigén parciális nyomásnál is 75% -os, míg a $13,3 \text{ kPa}$ oxigén parciális nyomásnál csaknem 100% -os.
13. Közismert a tengerszint feletti magasság módosító hatása: nagyobb magasságokban, ahol a levegőben kevesebb az oxigén, a Hb-szint megnő, hogy a kevesebb oxigént nagyobb szállítóképesség juttathassa el a sejtekhez megakadályozva így azok károsodását.
14. A 13. feladat megoldásához kapcsolódik a dohányosokban tapasztalt magasabb Hb-értékek mérése is. A dohányos ember sejtjei kevesebb oxigénhez jutnak, amit a szervezet az előző példához hasonlóan a transzportkapacitás (vagyis a hemoglobin mennyiségének) növelésével próbál ellensúlyozni.
15. C

$$\rho gh = (30 \text{ m} * 1033 \text{ kg} * \text{m}^{-3} * 9.807 \text{ m} * \text{s}^{-2}) 303918.9 (\text{kg m s}^{-2}) \text{m}^{-2}.$$

Ez $303918.9 \text{ N m}^{-2}$ vagy 303.9 kPa

$$303.9 \text{ kPa} + 101,3 \text{ kPa} = \underline{\underline{405,2 \text{ kPa}}}$$

16.

A tengerszint feletti magasságban, a léghólyagocskákban a CO_2 parciális nyomása 40 Hgmm , az O_2 parciális nyomása 100 Hgmm . Az alveoláris levegő vízgőznyomása 47 Hgmm . Ezek az értékek az 5. feladtból átvethetők.

A felszínen a következő igaz a CO_2 -ra $= 40/(760-47) = 0.056$ és az O_2 -re $= 100/(760-47) = 0.1403$.

Ezért a N_2 -re a következő igaz $= 1 - (0.056 + 0.1403) = 0.8038$.

A nitrogén parciális nyomása a tüdő-léghólyagocskákban tehát

$$= 0.8038 \cdot (760-47) = 573 \text{ Hgmm.}$$

30 méter mélységben ahol a nyomás értéke $405,2 \text{ kPa} = 3040 \text{ Hgmm}$

$0,8038 \cdot (3040 - 47) = \underline{\underline{2405,7 \text{ (Hgmm)}}}$ a nitrogén parciális nyomása

Ez négyszeres növekedés

17. B (lásd egyenlet)

18. Ha a nyomás fokozódik, a vérben a gáztörvényeknek megfelelően több levegő oldódik. Természetes körülmények között a vérben a gázok szinte csak kémiaiilag kötött formában vannak jelen, míg ilyenkor lényegesen nagyobb mennyiség található fizikailag oldott állapotban. Amíg a nagy nyomás fennáll, addig a gázok oldott állapotban maradnak a vérben. Ha azonban a nyomás hirtelen csökken (túl gyorsan jön fel a búvár a mélyből vagy ha a magasan szálló repülőgépben a kondenzációs levegő normál nyomása egyszerre lezuhan) a fizikailag oldott gázok ismét felszabadulnak, és a vér buborék formájú levegőhólyagokkal lesz tele. A fizikailag oldott gázok között a nitrogén oldódása a nyomásnak megfelelő értéknél nagyobb, ezért különösen a nitrogén felszabadulása jelentős. Ezt a gázt a szervezet nem tudja hasznosítani. A buborékok a kisebb erek felé haladva elzárják azokat, a keringés ezen a területen megakad, a vér nem tud egyes szerveken átáramolni, így azokban oxigén- és táplálékhiány lép fel. Ez a légembólia jelensége. Az agy és a szív működésének csökkenése halált is okozhat. A betegség súlyossága és kimenetele arányos a légnyomás nagyságával, illetve a légnyomás változás gyorsaságával és mértékével.

19. A. igaz B. igaz

20. Felírhatjuk a következőt

$$\frac{N_z}{N_0} = e^{-\frac{mgz}{kT}} = e^{-\frac{29 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 9,81 \cdot 10000}{kT}}$$

= 0,28 azaz 28 % azaz 10 km-es magasságban 1 cm^3 levegőben az eredeti részecskeszám 28 % van már csak jelen.

Hasonló képlettel számolva ez az érték 168 km-es magasságban számolva **0,0000361 %, tehát gyakorlatilag 0.**

21.

- a levegő hiánya miatt megfulladhat. A halál legvalószínűbb oka ez utóbbi: a tüdőben levő és a külső nyomás azonnal ki akar egyenlítődni, ezért a levegő

rögtön kiáramlik a tüdőből, majd a vérben kötött oxigén is igyekszik kiválni a tüdőben, hogy ez is kiáramoljon a környezetbe, végül az oxigén nélkül maradt szervek felmondják a szolgálatot, itt már a Hb-szint növelése sem segítené!

- Fagyhalál
- A testnedvei (akár a nyál is) felforrhatnak (elméleti meggondolás, a gyakorlat nem igazolta)

II. Légzésünk problémái

1. A rekeszizomnak
2. C, mert a mellkason áthatoló (szúrás, lövés, nyársalás) erőbehatás sérülést okozhat a mellhártyalemezekben és ekkor kialakulhat a légmell.
3. Nem vagy alig mozog. Ha a gumihártyát lefelé húzzuk a térfogat nő az üvegben, a nyomás csökken, csak a tüdővel összekötő csövön keresztül tud beáramolni levegő, ez tüdőbe jut addig, míg a nyomás ki nem egyenlítődik. Ha az A cső nyitva van itt is beáramlik levegő és gyorsan kiegyenlítődik a nyomás, gyakorlatilag olyan gyorsan, hogy elmarad a nyomáscsökkenés a tüdő körül, így nincs is szívóerő.
4. B (feltételezzük a modellt olyan használatát, amely időben is modellezi a légzési folyamatot)
5. E, mert a gumihártya lefelé mozgatásával lecsökken a nyomás, de nem tud kiegyenlítődni, mert az A cső zárt
6. BCE
7. Látható, hogy a kisebb átmérőjű lég hólyagocskában ugyanakkora felületi feszültség esetén nagyobb lenne a nyomás, mint a nagyobb sugarúban ezért a kisebb lég hólyagocskák felfújna a nagyobbakat, így a tüdő összfelülete csökkenne. Vagy: a kilégzés folyamán, ha a lég hólyagocskák méretének csökkenésekor a felületi feszültségek nem csökkennének, akkor összeesnének
8. nő
9. nő
10. csökken
11. hőmérséklet
12. mert ekkora élettanilag a tengerszinten lévő légköri nyomáson a maximális parciális nyomása a tüdő-lég hólyagocskákban
13. 0,003 ml/dl
14. 1000 ml vér 201 ml ($150 \cdot 1,34$) ez $201/3$ azaz **67-szeresére növeli meg**

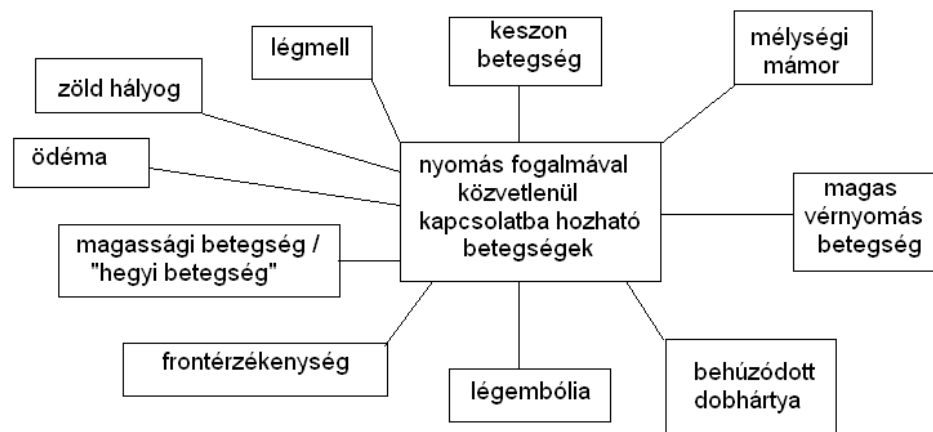
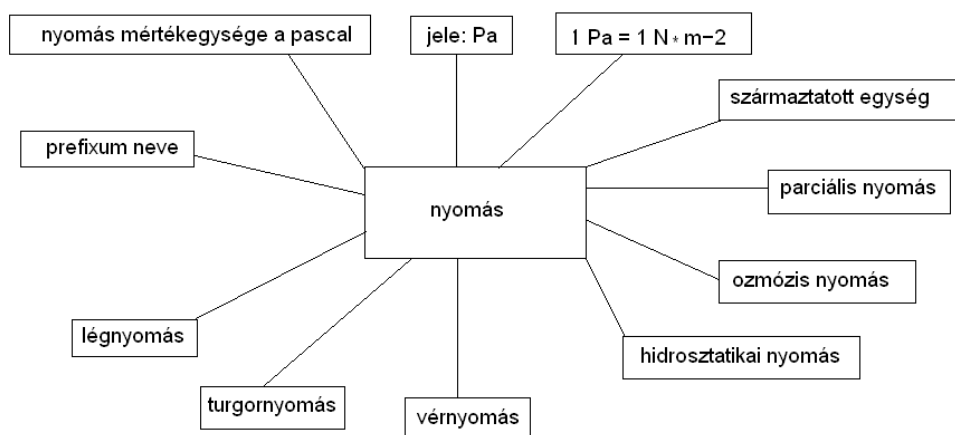
Tanároknak

Pedagógusok, diákok és szülők által is gyakran hangoztatott vélemény, hogy az egyébként igen magas színvonalú természettudományos tananyag gyakran túl absztrakt, a gyerekek számára nehezen érthető, a gyakorlathoz, a mindennapokhoz nehezen kapcsolható. A diákok sokszor csak nagy nehézségek árán tudják megtanulni, memorizálni a különböző definíciókat, formulákat, szabályokat. Az a tény pedig, hogy csak megtanultak, de nem értettek meg bizonyos anyagrészeket, általában nem derül ki, hiszen az iskolai rutin-feladatokban jól visszaadják a megtanult ismereteket. A tanulók többsége azonban elbizonytalanodik, amikor az iskolában tanultakat hétköznapi jelenségek magyarázatához kellene felhasználnia (*Csapó és B. Németh, 1995*). Ekkor inkább a hétköznapi tapasztalatokon alapuló, gyakran hibás, a tudományos nézeteknek ellentmondó ismereteiket használják az iskolában szerzett tudásuk helyett. Ez azt jelzi, hogy a gyerekekben elkülönül és csak ritkán találkozik egymással az iskolai és a hétköznapi tudás. Mi lehet e tapasztalatok hátterében? Túl egyszerű lenne a problémát azzal elintézni, hogy a tananyag túlságosan elvont, a gyerekektől távol áll vagy nem felel meg képességeiknek. E sokat hangoztatott és kétség kívül nem alaptalan érvek mellett még egyéb tényezők is fontosak lehetnek.

A tanulás során, amikor az egyén új ismereteket szerez, az új fogalmakat be kell építenie a fogalmi hálójába. Egy új fogalom megtanulásakor azonban nem feltétlenül jön létre a megfelelő reprezentáció, a megértés. A megértéséhez ugyanis a tanulónak rendelkeznie kell az előfeltétel-tudással (*prior knowledge*), azaz ismeretrendszerében léteznie kell a megfelelő fogalmi hálónak, amelybe be tudja illeszteni az adott fogalmat. A tanulónak aktivizálnia kell ezt a fogalmi struktúrát és fel kell fedeznie az összefüggéseket a már ismert fogalmak és az új fogalom között. Ha mindez nem történik meg, akkor az új fogalom nem tud beépülni a fogalmi rendszerbe, elszigetelt marad, nem válik hozzáférhetővé, felidézhetővé. Ez az elméleti háttér kiindulópont lehet a tévképzetek kialakulásának felderítéséhez.

Ezért javaslom, hogy egy adott jelenséget vagy fogalmat a lehető legtöbb kapcsolatban értelmezzük! Az alábbiakban a nyomás és a vese illetve a kiválasztás példáján láthatjuk, hogyan kapcsolható össze az egyes, a feladatsorokban bemutatott fogalmak, jelenségek. A fogalmi hálókat követően a kiválasztás című részhez találnak néhány gyakorlati tanácsot, illetve a felkészüléshez használható további forrást.

Nyomás



2. rész: A kiválasztás anatómiai, élettani háttere és egészségügyi vonatkozásai

Probléma: Hogyan és mennyiben helyettesíti a művesekezelés a vese funkcióját?

A szervezet só- víz-, és sav-bázis egyensúlyának fenntartásában illetve a mérgező anyagok eltávolításában létfontosságú vesék működése sok kórfolyamat miatt károsodhat. Ha a vesék működése kritikus szintre csökken, akkor az „orvostudománynak” kell beavatkoznia a páciens életének megmentése érdekében. *A művesekezelés olyan külső beavatkozás, mely a hiányzó vesefunkciót pótolja.* Akut vagy krónikus veseelégtelenség esetén a vese működésének műszeres pótlására van szükség, ami szerencsére egy ideje már megoldható mind rövid, mind hosszú távon.

Az eljárást dialízisnek nevezzük, melynek három formája van: hemodialízis, peritoneális dialízis, hemofiltráció.

A hemodialízis művesekészülék segítségével történik. Elve, hogy a beteg vérkeringését a művesekészülékhez csatlakoztatják, amely megtisztítja a vért a salakanyagoktól és méreganyagoktól, amely egészséges embereknél a vesék feladata.

A peritoneális dialízis során a vér megtisztítása szűréssel, dializáló-ultrafiltrációs membrán segítségével történik. A peritoneális dialízis neve a hashártya latin megfelelőjéből (peritoneum) ered, utalva arra, hogy ezen módszer esetében a hashártya tölti be a szűrő membrán funkcióját.

A hemofiltráció alkalmazási területe szűk. Leginkább akkor kerül rá sor, ha rövid idő alatt oldott, szűrhető méreganyagokat rövid idő alatt kell a vérből eltávolítani. Membránja nagyobb pórusnagyságú, mint a hemodialízisnél használatos membrán.

A dialíziskezeléseknek köszönhetően a páciensek a vesebetegség végső stádiumában is teljesen önállóak lehetnek, a kezelések akár 15 évvel is meghosszabbíthatják a túlélést, az életminőség jelentős arányú megtartása mellett. **4600 krónikus veseelégtelenségben szenvedő hazai beteget dializálnak napjainkban – túlnyomó többségüket, állapotuk függvényében, hetente háromszor – az országszerte található 53 műveseállomáson.**

Nagy-Britanniában évente több mint hétezeren halnak meg veseelégtelenségben, és mintegy 19 ezren szorulnak vesedialízisre. Állandó a donorhiány, így igen fontos a megoldás keresése, jelenleg is 6400-an várnak új vesére. Amerikai kutatóknak sikerült folyamatos működésre képes művesét kifejleszteni, amely a testen hordható, vagy akár be is ültethető a szervezetbe.

Források és ajánlott irodalom:

<http://www.webbeteg.hu>

http://www.informed.hu/betegsegek/betegsegek_reszletesen/urinary/dialysis

<http://vitalitas.hu/konyvek/ve/ve2.htm>

Alapok

Biológiai alapok:

A kiválasztó rendszer anatómiája, élettana. A nefron felépítése és működése. Aktív és passzív transzport folyamatok.

Kémiai alapok:

Oldhatóság, pH, karbamid, húgysav, glükóz, ionok, koncentráció, molekulaméret, molekulatömeg, puffer

Fizikai alapok:

Diffúzió, ellenáramlás elve, hidrosztatikai nyomás, ozmózisnyomás

Matematikai alapok:

Számítások a vese működésével kapcsolatban: GFR, RBF, Clearance-elv

I. Feladat - Gyűjtőmunka



1. Állíts össze egy táblázatot, amely mutatja az leggyakrabban fogyasztott élelmiszerek víztartalmát!
2. Számold ki, hogy naponta mennyi víz jut a szervezetetekbe a táplálkozásotok (benne a folyadékfogyasztás) folyamán és ez hány százaléka az ajánlott napi bevitelnek! Mit okoz, ha valakinek a szükségesnél kevesebb a vízmennyisége pl. a testtömeg-kilogrammonként 4 vagy 8 vagy 12 %-kal?
3. Magyarázd meg, mi az oka annak, hogy a gyümölcslevelek és a szénsavmentes 1000 mg/liter összes ásványianyag-tartalmú ásványvizek fogyasztása ajánlott, a gyümölcsnektárok, gyümölcsitalok és a szénsavas üdítőitalok fogyasztása kerülendő!
4. A következő köznapis állítások igazságtartalmát kell „kikutatnod”:
 - A tej nem ital, hanem élelmiszer.
 - A sör folyékony kenyér.
 - Nem szabad folyamatosan ugyanazt az ásványvizet fogyasztani, egy bizonyos idő után váltani kell.
 - A szervezet naponta maximum 200 mg C vitamint tud hasznosítani, az ennél nagyobb bevitel akár károsíthatja is a szervezetet.
 - Egyes szórakozóhelyeken és illetve éttermekben olyan ételt is felszolgálnak, aminek elfogyasztása után a keltetőnél fokozottabban és tartósabban növekszik a szomjúságérzetünk.
5. Miért tiltott a sportolók körében a vízajtók használata?

II. Feladat – Projekt:

Készíts olyan felmérést, amelyből kiderül, hogy tudják-e a diákok, hogy a táplálkozás, öltözködés és a húgyúti betegségek között szoros kapcsolat van. A felmérést végezd a 9-10. évfolyamon (általános iskolai szinten már tanultak biológiát) és a 11-12. osztályosok (tanultak már középiskolai szinten is biológiát) körében. Ellenőriztesd le, hogy az általatok elkészített teszt, kérdőív, riport stb. alkalmas-e a vizsgálat elvégzésére?

Ajánlott irodalom: <http://kognit.edpsy.u-szeged.hu/szokolszky/kurz-modszert.htm>

A projektnek önálló megfigyelésen, mérésen kell alapulnia, a munka során folyamatos szakmai konzultációra van szükség a felkészítő tanárral.

Formai követelmények:

- 8-10 oldal terjedelem;
- a fedőlapon fel kell tüntetni az iskola nevét a munka címét, a készítő nevét, az elkészítés évét és a felkészítő tanár nevét;
- a dolgozatot fejezetekre kell tagolni;
- tartalomjegyzéket kell készíteni hozzá.

Tartalmi követelmények:

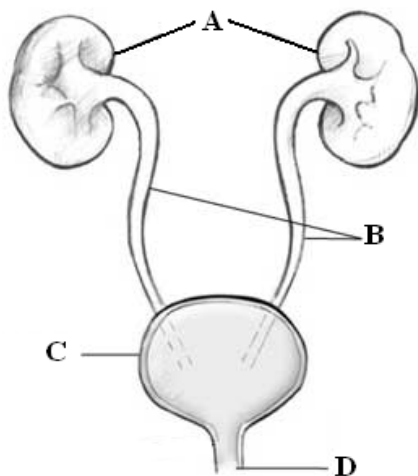
- célkitűzések megfogalmazása, alkalmazott módszerek felsorolása;
- irodalmi áttekintés;
- mérési, megfigyelési adatok rögzítése;
- következtetések levonása;
- felhasznált anyagok, eszközök műszerek stb. leírása.

Célszerű a munkát szövegszerkesztővel készíteni, a mérési adatokat táblázatban összefoglalni és grafikonon is ábrázolni.



III. Feladat – Ábraelemzés:

1. Írd le, hogy az egyes betűk melyik anatómiai struktúrát jelölik!



2. Párosítsd a következő funkciókat az egyes betűkhöz!

1. A szűrletképzés és a visszaszívás helye
2. Nőkben felülről ráhajlik a méh
3. Férfiakban közös húgy-ivar kivezető

3. Egyik vesénk egy kicsit lejjebb helyezkedik el, mert felette található az egyik legnagyobb mirigyes szervünk a máj. Melyik oldali vese?

4. Milyen mechanizmussal továbbítja a B képlet a vizeletet?

5. Miért van az, hogy egy 2 éves gyereknel még elfogadott lehet az ágybavizelés, de egy 4 éves esetében már nem?

6. Mit jelent az inkontinencia kifejezés, mi állhat kialakulásának hátterében (leggyakoribb okok)?

7. A vizeletek vizsgálatára gyakran használnak tesztcsíkokat, mire utalhat ha a vizeletben...

- A. cukor van
- B. fehérje található
- C. ketonok vannak benne
- D. vért tartalmaz
- E. nitritet tartalmaz

8. Gyulladás

A húgyúti fertőzések 85%-át a beteg saját bélrendszeréből vagy hüvelyéből származó.....okozzák

- A. baktériumok
- B. vírusok
- C. gombák

9. A kórokozók melyik csoportjába tartozik a ... (Az előző feladatbeli kórokozó csoportokból válassz!)

HSV2

Candida albicans

10. Veseekő: A veseekővek kialakulásában 80 %-os gyakorisággal a ... ion vesz részt.

- A. foszfát
- B. kalcium
- C. magnézium

IV. Feladat –Ábraelemzés:

1. Írd le, hogy az egyes számok melyik anatómiai struktúrát jelölik!

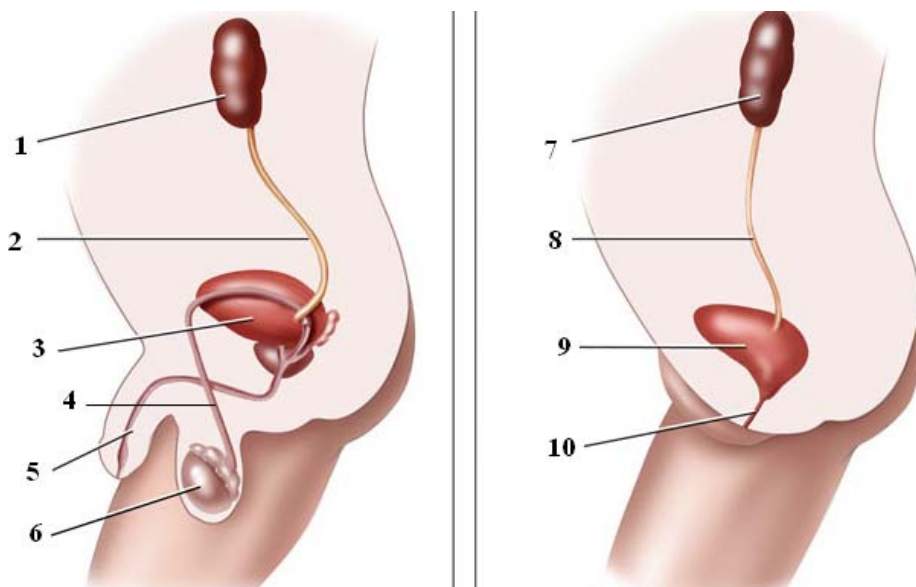
2. A megadott funkciókat írd be a megfelelő helyre!

(visszaszívás, szűrletképzés, tárolás, folyadéktovábbítás, szekréció)

Szám	Anatómiai struktúra neve	Funkciója
1-7		
2-8		
3-9		
4		
5		
6		

3. Melyik baloldali szám felel meg a jobboldali 10-nek?

4. Miért különleges a 3-as képlet hámja?



<http://www.med.umich.edu/1libr/aha/urinary.jpg>

V. Feladat –Ábraelemzés:

Struktúra-funkció (Több betű is írható egy számhoz, de csak a megfelelő számú helyes betűért adható 1 pont)

1. A betű által jelölt helyen a legterményebb a vizelet
2. Fakultatív vízvisszaszívási hely
3. Csak a velőben található struktúra (ezen az ábrán)
4. Arteriola
5. Vesetestecske

A vizelet mennyisége és ennek okai, következményei:

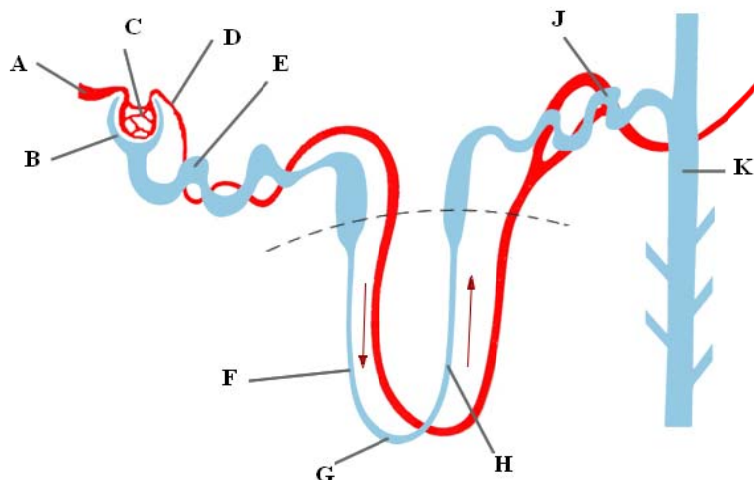
Melyik állítással kapcsolatos, hogy...

A. Igen nagy mennyiségű a vizelet

B. Igen kevés a vizelet mennyisége

(A számok után kell írnod az A vagy B betűt !)

6. a normál értéknél kétszer magasabb vércukorszint
7. az ADH szint erőteljes csökkenése
8. vérben nagy mennyiségben jelennek meg nitrogéntartalmú vegyületek

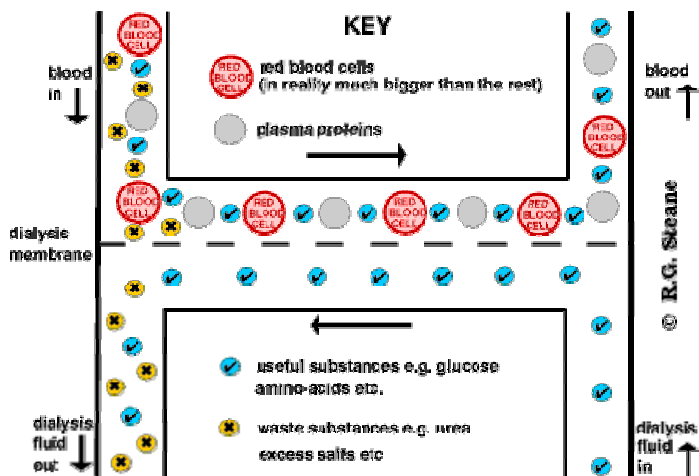


VI. Feladat –Esszé:

- Milyen anatómia (erek átmérője, 3 szűrőrendszer) fizikai (effektív filtrációs nyomás) és kémiai (molekulák tulajdonságai) tényezők segítik a szűrletképződést? Hogyan?
- Mi a szerepe a Henle – kacsban bekövetkező koncentrációnövekedésnek illetve a Henle - kacs hosszának? Mi a szerepe annak, hogy a velőállományban a szövetközötti folyadék ozmolalitása a kéregtől a vesemedence felé haladva négyszeresére (3 00 mosm/kg-ról 1200 mosm/kg-ra) nő?
- Mi a vese szerepe a víz, a pH, a nitrogén-egyensúly, a sóháztartás szabályozásában?

A vese felépítésének és működésének mely tényezőit használják fel a művesekezelés során. Mi a művesekezelés korlátja? Válaszodhoz használd fel a következő animációt:

<http://www.biotopics.co.uk/human2/animation/dial.html>

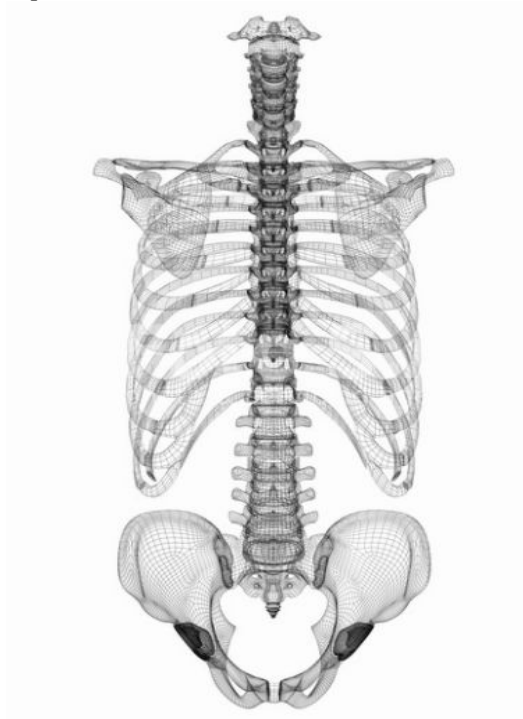


VII. Feladat –Alkoss!

Készíts animációt vagy dolgozatot, amelyben bemutjátok az ellenáramlás elvét a vesében érdekes hasonlatokat, analógiákat felhasználva! A vérerek illetve a nefron részei lehetnek például vonatok, az utasok az anyagok, a székek a vér alakos elemei, és fehérvérjéi stb.

VIII. Feladat –Rajz:

Rajzold be a veséket, húgyhólyagot, húgyvezetékeket, húgycsövet erre az előlnézeti képre! Ügyelj arra, hogy 5 mm-e hibahatáron belül legyél a szervek valódi átlagos helyzetéhez képest!



IX. Feladat –A vizelet lehetséges színe és szaga:

Mi okozhatja, hogy a vizelet színe:

- Sárga
- Barna
- Vörös
- Fekete
- Színtelennek tűnő

Mi okozhatja, hogy a vizelet szaga:

- Szúrós szagú
- Gyümölcsszagú

X. Feladat –Számítások:

a. Clearance-en azt a ml-ben kifejezett vérplazma mennyiséget értjük, amelyet a vese 1 perc alatt az illető anyagtól megtisztít. Az alábbi egyenletben U = az 1 ml vizeletben foglalt anyagmennyiség, V = az 1 perc alatt kiürített vizeletmennyiség, P = az 1 ml vérplazmában lévő anyagmennyiség.

$$C = \frac{U \times V}{P}$$

1. Mekkora a C értéke a glükózra nézve egészséges emberben?
2. Tegyük fel, hogy a vizelet 200 μmol , a vérplazma 5 μmol karbamidot tartalmaz, az ürített vizeletmennyiség legyen 2 ul/perc . Mekkora a C értéke?

b. Ha olyan anyagot nézünk, ami nem szívódik vissza és nem szekretálódik (pl. inulin), akkor megkapjuk az 1 perc alatt képződő szűrlet mennyiségét: ez a GFR. A GFR mennyisége kb. 120 ml/perc . Az U és V és P paraméterekkel hogyan (milyen egyenlettel) számolnád ki a GFR-t?

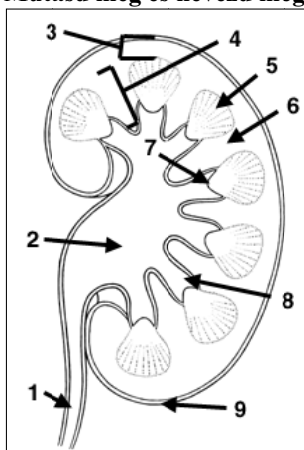
c. Egy anyag extrakciós hányadosán (E) a következőt értjük: a vese artériás és vénás plazmájának a koncentrációkülönbségét osztjuk a vese artériás plazmájának a koncentrációjával (az adott anyag értékeit figyelembe véve). Tekintsük a következő egyenletet

$$P_{\text{artéria}} \times RPF = P_{\text{véna}} \times RPF + UV$$

($P_{\text{artéria}}$ és $P_{\text{véna}}$ a vese artériás és vénás plazmájának 1 ml-jében foglalt anyagmennyiség, az RPF (renal plasma flow) a vesén 1 perc alatt átáramló plazmamennyiség, az U és V fogalmát előzőleg megadtuk. **Rendezd át a fenti egyenletet úgy, hogy az RPF értéke a C/E hányados legyen. Vezesd le az egyenletátrendezés folyamatát!**

XI. Feladat –Boncolás:

Mutasd meg és nevezd meg a boncolt vesén a számokkal jelölt részeket!



XI. Feladat – A vizeletürítés mechanizmusa és szabályozása:

Egy-egy mondatban írd le, hogy a következő anatómiai képleteknek mi a szerepe a vizeletürítés mechanizmusában és szabályozásában!

1. húgyhólyag izmai
2. gátizmok
3. a hasfal izmai
4. gerincvelő ágyéki szakasza
5. gerincvelő keresztcsonti szakasza
6. agytörzs (híd)
7. agykéreg

Tanároknak

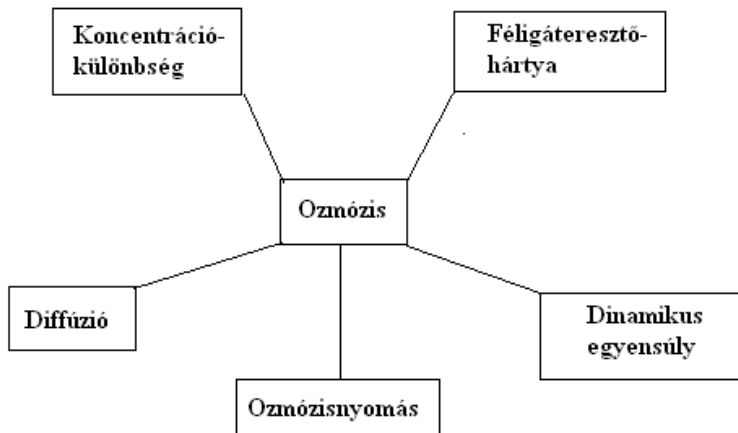
A tanítási órára való felkészüléshez álljon itt néhány szempont:

Gyűjtsük össze!

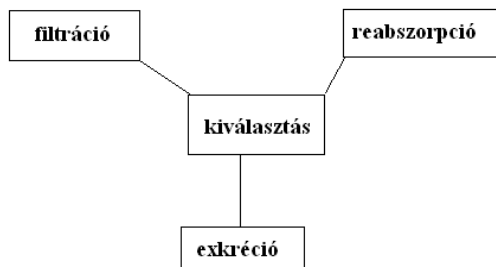
1. Mi a nehézség a tananyag tanításában? Mit értenek nehezen a diákok? Miért?
2. Mi a nehézség a számonkérésben?
3. Hogyan lehet életszerűbbé tenni a tanórát?
4. Csoportokban lehetett-e dolgozni, mely feladatok kapcsán?
5. Milyen előzetes képük van a diákoknak a kiválasztás anatómiájáról, működéséről? Mik a tévképzetek? Honnan eredhetnek?
6. Milyen kérdések foglalkoztatják a diákokat ebben a témában?

Vese- kiválasztás

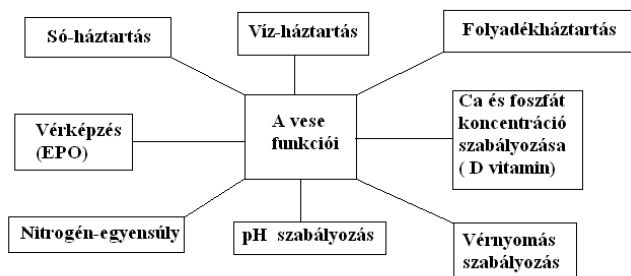
A.



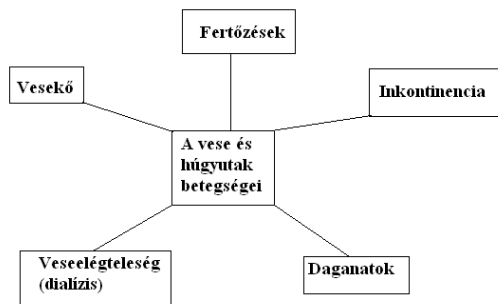
B.



C.



D.



Bemutató tanórára

Kiválasztas.ppt – lásd honlap

Javaslatok/ tanácsok

Dolgoztassuk a diákokat csoportokban, osszuk szét számokra a feladatokat (lásd gyűjtés és projekt)

1. Először tisztázzuk mi a kiválasztás szerepe (a kiválasztás definíciója)
2. Utána soroljuk fel, hogy a vesén kívül melyek még a kiválasztó szervek (pl. tüdő, bőr, bélrendszer)
3. Rajzoltassuk le a vesék, húgyvezetékek, húgyhólyag, húgycső kapcsolatát
4. Sertésvesén keresztül mutassuk be a vese fő részeit
5. A fogalmi háló segítségével beszéljük át a vese és a húgyutak betegségeit
-
6. Beszéljük át a vese nefronjainak részeit, a kiválasztás részfolyamatait
 - a. Milyen anatómia (erek átmérője, 3 szűrőrendszer) fizikai (effektív filtrációs nyomás) és kémiai (molekulák tulajdonságai) tényezők segítik a szűrletképződést? Hogyan?
 - b. Mi a szerepe a Henle – kacsban bekövetkező koncentrációnövekedésnek illetve a Henle - kacs hosszának? Mi a szerepe annak, hogy a velőállományban a szövetközötti folyadék ozmolalitása a kéregtől a vesemedence felé haladva négyszeresére (3 00 mosm/kg-ról 1200 mosm/kg-ra) nő?
 - c. Mi a vese szerepe a víz, a pH, a nitrogén-egyensúly, a sóháztartás szabályozásában?
7. Beszéljünk a vizelet összetételéről
8. Fogalmi háló segítségével beszéljük át a vese funkcióit
9. A gyűjtőmunkák eredményeit felhasználva beszéljünk az élelmiszerek és a kiválasztó-rendszer kapcsolatáról
10. A diákoknak kiadott projektfeladatok megoldásait felhasználva igazoljuk, hogy a táplálkozás, öltözködés és a húgyúti betegségek között szoros kapcsolat van.

Figyeljünk a következőkre

- Passzív transzportok hajtóereje a koncentrációkülönbség, a válaszfal átjárható az oldott anyag számára
- Filtráció hajtóereje a nyomáskülönbség, a válaszfal az oldószer (víz) számára átjárható
- Könnyített diffúzió vivőmolekulákkal történik, de a koncentráció-gradiensnek megfelelően
- Aktív transzport vivőmolekulákkal történik, de a koncentráció-gradiens ellenében

Hasznos linkek

Online biológia tankönyv (angolul)

<http://www.emc.maricopa.edu/faculty/farabee/BIOBK/BioBookTOC.html>

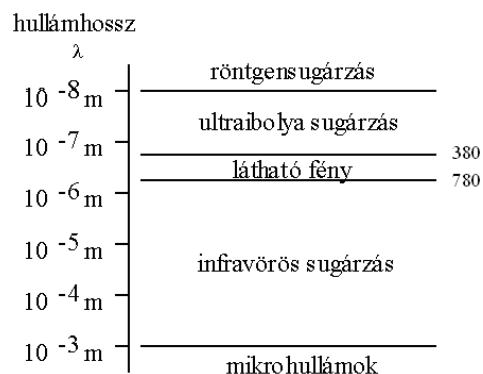
3. rész: Színek világa

A szín mint jelenség fizikai és kémiai folyamat. Érdekes azon is elgondolkodnunk azonban, hogy mi, emberek mit nevezünk színesnek és mit nem. És vajon az élővilág többi tagja mire mondhatná, hogy színes? A színeket elsősorban a szemünkkel érzékeljük. Milyen jelet fognak fel a szemünkben található receptorok (jelfelfogók)? Hogyan lesz mindezekből színérzet?

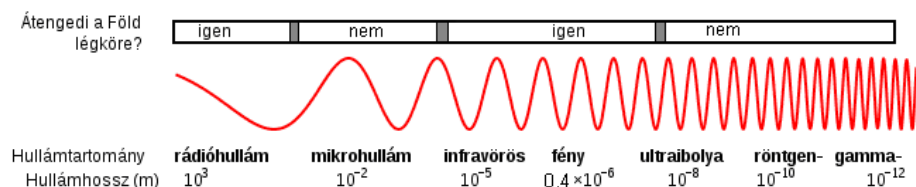
Az itt következő részben először információkat (grafikonokat, leírásokat, ábrákat) kapsz (A-L), amelyeket majd felhasználhatsz a feladatok megoldásához. Minden esetben jelezned kell annak az ábrának vagy szövegnek a betűjelét, amelyet a válasz megadásához leginkább fel kellett használnod és ezt indokolnod is kell!

A.

Az elektromágneses hullámoknak az emberi szem által érzékelhető, tartománya a *látható fény*. Az elektromágneses sugárzásnak két alapvető tulajdonsága van: a hullámhossz és a frekvencia. A fény sebessége (c), a frekvenciája (f vagy ν) és a hullámhossza (λ) között a következő az összefüggés: $c = f \lambda$. A foton energiája (E) és a frekvenciája közötti összefüggése: $E = hf$, ahol a h az un. Planck állandó.



B.

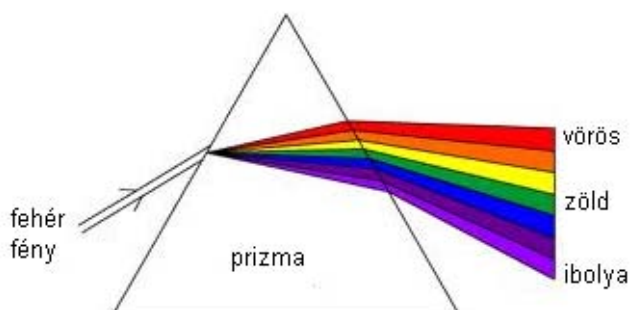


C.

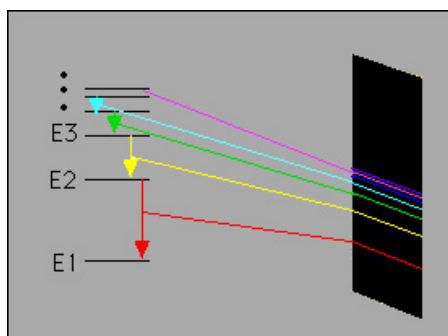
Az ember által látható fény a szivárvány színei - a vöröstől az ibolyáig - együtt a fehér fényt adják.

Szín	Hullámhossz nanométer (nm)
Vörös	620-780
Narancs	570-620
Sárga	550-570
Zöld	470-550
Kék	440-470
Ibolya	380-440

D. A prizma fénytörése



E. A gerjesztés után keletkező foton hullámhossza az energiaszintek különbségétől függ.



F.

Thomas Young angol orvos és fizikus 1802-ben kifejtette, hogy a színlátás háromszín természetének élettani alapjai vannak, és a színérzékelés a szemben elhelyezkedő háromféle receptor ingerlési mintázatainak eredményeként jön létre. Young elméletét ötven évvel később Hermann Ludwig von Helmholtz fejlesztette tovább, és Young- Helmholtz-elméletként, illetve három szín-elméletként vált ismertté. Helmholtz szerint a szemben háromféle, ma már csapokként ismert receptor van, melyek a látható fény hosszú (vörös), közepes (zöld) vagy rövid (kék) hullámhosszúságú tartományába eső fényre érzékenyek. A három receptor együtt határozza meg a színérzékelést. Ewald Hering 1874-ben terjesztette elő ellenszínelméletét, mely szerint négy alapszín létezik: kék, vörös, zöld és a sárga. A vörös és a zöld, a sárga és a kék ellentétes színek, ugyanis nem észlelhetők egyszerre. Sohasem látunk vöröseszöldet vagy sárgáskéket, hiszen a vörös és zöld keverékét sárgának, a kék és a sárga keverékét pedig fehérnek látjuk. A háromszín-elmélet és az ellenszín-elmélet sok éven keresztül versengett egymással, míg fel nem vetették, hogy egyesíthetők egy olyan kétszintű elméletben, melyben a háromszín-elmélet a receptorok szintjén, az ellenszín-elmélet pedig magasabb feldolgozási szinteken érvényes. Az emberi szemben három eltérő csaptípus létezik melyek fényelnyelési tulajdonságát mikrospektrofotometriával térképezték fel (egy csapot adott hullámhosszú fénysugárral ingerelve meghatározhatjuk, hogy mennyi fény abszorbeálódik a sugárzottból). Minden pigmenttípus egy bizonyos hullámhosszú fényre a legérzékenyebb, az ember három csapja esetén ez megközelítőleg 420, 530 és 560 nm-nél van. Az érzékenységi maximumok szerint három csaptípust különítünk el: a rövidhullám-érzékenyeket (*S csapok*, *S=short=rövid*), a közép-hullám-érzékenyeket (*M csapok*, *M=middle=közepes*) és a hosszúhullám-érzékenyeket (*L csapok*, *L=long=hosszú*). Egy adott típusú csap a hullámhosszak széles tartományát nyeli el, de ezek a tartományok - különösen az M és az L csapok esetén - erősen átfedőek. Ezért a gyakran emlegetett elmélet, miszerint adott csaptípus csak egy adott színre érzékeny (S csapok a kékre, M csapok a zöldre, L csapok a vörösre), helytelen.

G.

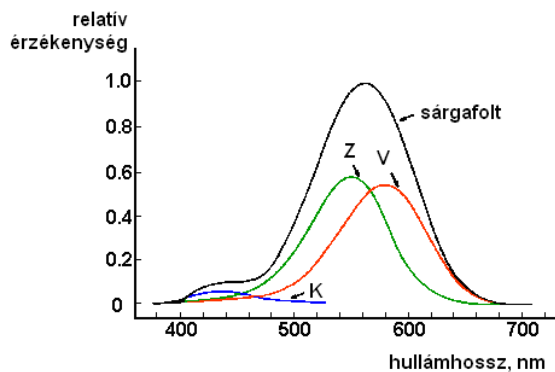
Hurvich – Jameson elmélete

Kétszintű elmélet. A háromszín elmélet (háromféle) receptorai kapcsolatban vannak az ellenszínsejtekkel.

Pl.: A kék/sárga ellenszínsejtet serkenti a rövid, a másik kettő gátolja. Ha több a serkentés, mint a gátlás, kéket jelez, fordítva sárgát. Ha a serkentés és gátlás megegyezik, szürke az eredmény.

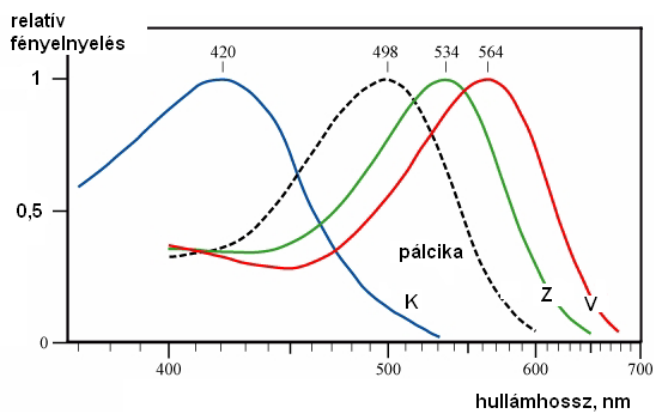
H.

A kékérzékeny csapok az emberi szemben is mindössze az összes csap mintegy egytizedét teszik ki, a többi csap – nagyjából fele-fele arányban –zöld-, illetve vöröserzékeny. A viszonyítási alap a teljes sárgafolt érzékenysége.



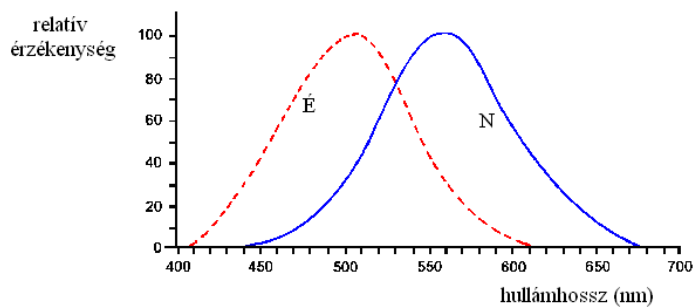
<http://www.unmc.edu/physiology/Mann/mann7.html>

I.



K.

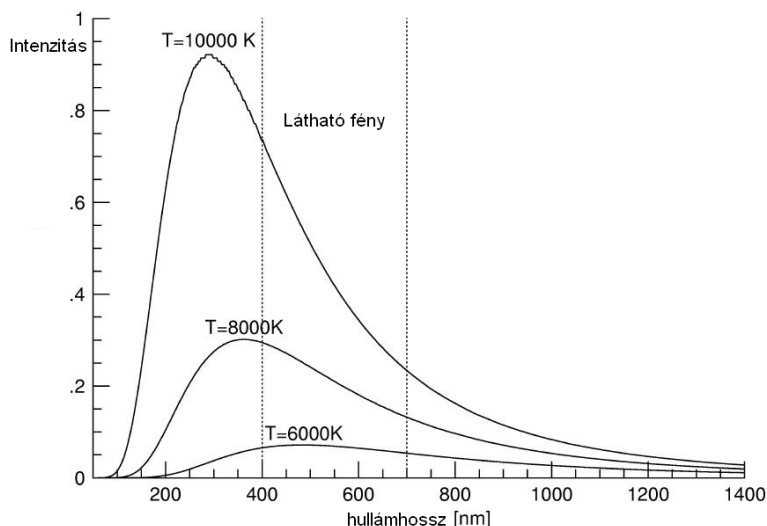
A nappali (N) és éjszakai (É) látás eltérő hullámérzékenységét szemlélteti az ábra.



<http://www.unmc.edu/physiology/Mann/mann7.html>

L.

A napfelszín hőmérsékletének (kb. 6000 K) megfelelő feketetest sugárzás spektrális eloszlásának a maximuma körülbelül 550 nm. A feketetest sugárzás egy olyan objektum sugárzása, amely maga bármely hullámhosszon képes elnyelni.



A függőleges tengelyen relatív intenzitás van feltüntetve.

Az eddig említettek alapján dönts el a következő állítások igazságtartalmát és válaszodat minden esetben indokold!

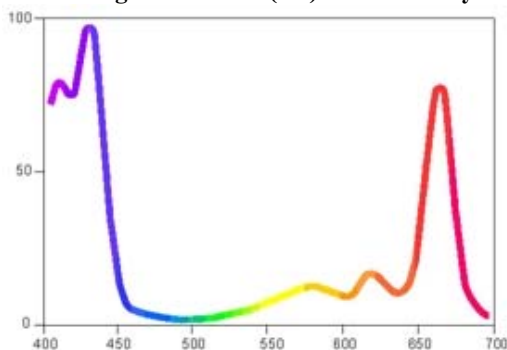
1. A fény egyik tulajdonságai a hullámhossz és a frekvencia és ezek határozzák meg a színt.
2. A fény hullámhossza és frekvenciája fordítottan arányos.
3. A napfényből érkező vörös fénynek nagyobb energiája, mint a kéknek (egy-egy fotonra vonatkozóan).
4. Az, hogy az elektromágneses hullámoknak éppen ezt a viszonylag kis részét látjuk, egyik valószínű oka a légkör különböző sugárzáselnyelése.
5. A nagyobb hullámhosszúságú fény nagyobb szögben törik különböző optikai sűrűségű közegeken áthaladva.
6. Szemünk a sárgászöldre a legérzékenyebb
7. A szín nem a fény belső tulajdonsága, hanem az agyban keletkezik.
8. A pálcikás érzékelés egy receptoros rendszer, a hullámhosszváltozást a fényerőváltozástól nem képes megkülönböztetni, ezért a sötétben nincs kontraszt.
9. A fokozatosan növelt fényerősségű fehér fényt a sötétadaptációs küszöb elérésig színtelennek látjuk, a küszöböt átlépve az első színérzet a kék.
10. A visszavert fény hullámhosszát a látórendszer színként ismeri fel.
11. A vörös színű tárgyak félhomályban sokkal sötétebbnek tűnnek, mint azok a kék színűek, melyek nappali fényben kb. azonos fényességűek.

12. A szem érzékenysége az evolúció során igazodott a Nap sugárzásához, arra optimalizálódott.
13. Olyan helyeken, ahol a sötétben látás fontos a vörös színű megvilágítást javasolt a pl. a fűzet megvilágítására.
14. Legalább két pigment kell a színlátáshoz
15. Ha mindhárom receptor egyforma nagyságú ingert kap, akkor nem észlelünk színt.
16. A csapok színszelektivitása azt jelenti, hogy az egyes csapok a nekik megfelelő hullámhosszúságú fényből kevesebb fotont nyelnek el.
17. Különböző megvilágítások mellett a színingereket közel azonosan érzékeljük.
18. A háromféle csap nem csak spektrális érzékenységében különbözik egymástól, hanem anatómiailag is elkülöníthetők, mert az M csapok relatív sűrűsége főként a sárgafolton kisebb.

Egészítsd ki az alábbi mondatokat!

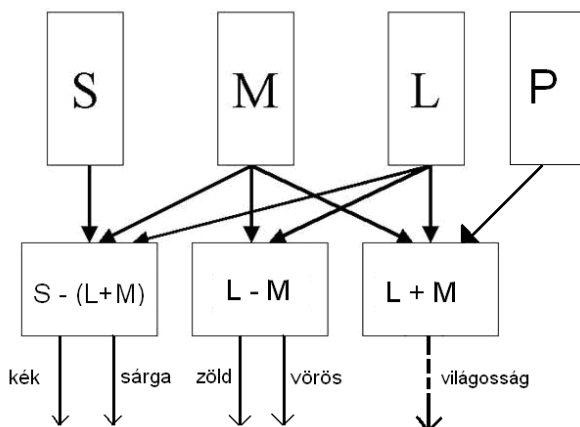
19. A fény intenzitása: ezt az ember a fény.....érezkei.
20. A fény frekvenciája: ezt az ember.....érezkei.

Az alábbi grafikon a ... (21.)molekula fényelnyelési spektrumát mutatja be.

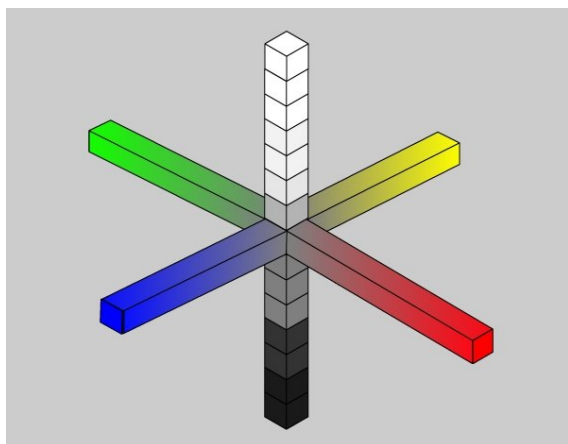


21. Válaszd ki a helyes megoldás betűjelét!
 - A. Hemoglobin (vér-vörös)
 - B. Bilirubin (epe-sárga)
 - C. Szterkobilin (széklet-barna)
 - D. Klorofill (levél-zöld)
 - E. Indigó (kék-indigónövény)

A következőkben a színlátás agyi folyamataival kapcsolatos ábrákat találsz. Tanulmányozd ezeket figyelmesen. Olvasd el a magyarázó szövegeket is!

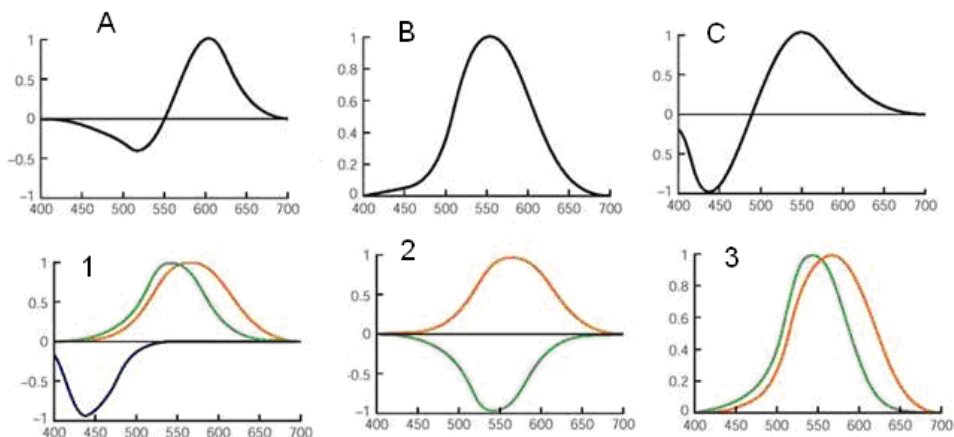


Az S csapok kis számban vannak jelen a sárgafoltban, majd hirtelen a maximális koncentrációjukat érik el, s a sárgafolttól távolodva - az M és L csapokhoz hasonlóan - számuk az csökken. Az L és M csapok a sárgafoltban vannak nagy számban. Ezért szemünk perifériáján a látásunk akromatikussá válik, a tárgyak alakját felismerjük, de színtelennek hatnak. A három csaptípustól eredő jeleket (válaszhármasokat) egy akromatikus és *két* kromatikus rendszer dolgozza fel. A képen látható nyilak az egyes csatornatípusok fényelnyelése során keletkező jelet mutatják. Ezeket a jeleket az idegrendszer kétféleképpen kezeli: vagy összeadja őket ('+' jel a nyilak között), vagy a különbségüket veszi ('-' jel a nyilak között). Az akromatikus csatornában az L és az M csapok összegződnek, vagyis a csatorna aktivitása az L és M csapok összaktivitásától függ, ezzel elvesztve a hullámhossz-információt. A kék-sárga csatorna, az első kromatikus rendszer, a képnek megfelelően az S csapok jelzéseit az L és az M csapok aktivitásának összegéhez hasonlítja. A másik kromatikus csatorna, a vörös-zöld csatorna, az M csapok ingerlésének valamint az L és M csapok ingerlésének különbségét jelzi.



Az antagonisztikus (L-M), (S-L,M) és L+M jelekből az agyban kialakuló észleleti szín-dimenziók

Tekints meg az alábbi ábrát, majd oldd meg a feladatokat!



Állapítsd meg, hogy melyik betűvel jelölt ábrához melyik számmal jelölt ábra tartozik! Ezután értelmezd, hogy mit mutatnak a grafikonok!

22. Az „A” ábrához.....

23. A „B” ábrához.....

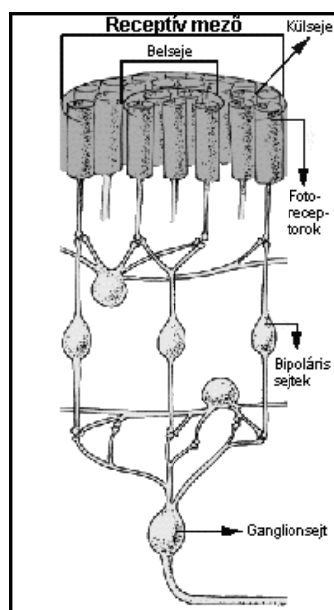
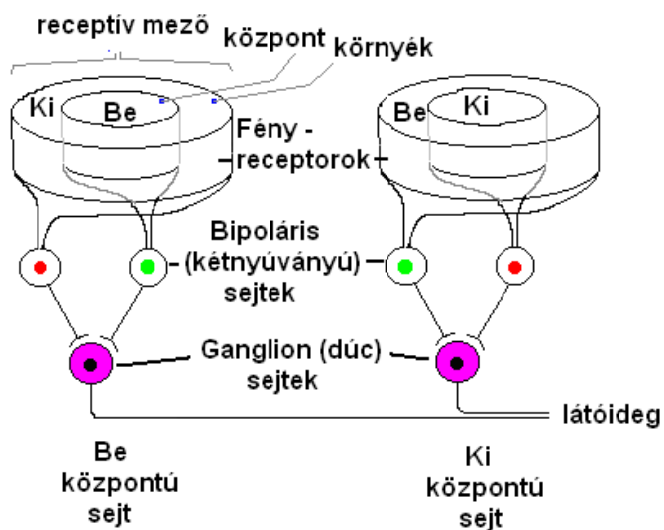
24. A „C” ábrához.....

25. A grafikonok értelmezése:

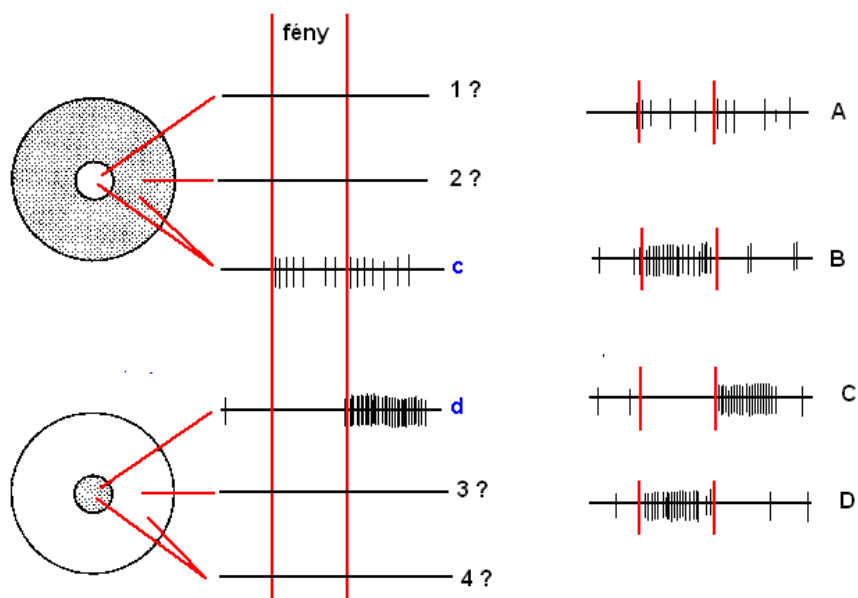
Az idegi jeleket az agyba továbbító ganglionsejtek (dúcsejtek) működését mindazok a receptorsejtek együttesen határozzák meg, amelyeknek a jelei az adott ganglionsejthez eljutnak. Az egy ganglionsejthez kapcsolódó receptorsejtek csoportját a ganglionsejt receptív mezejének nevezzük. A fiziológusok számos állatfajnál vizsgálták a ganglionsejtek elektromos aktivitását oly módon, hogy az állat elé helyezett ernyőre különféle villogó vagy mozgó ábrát vetítettek, és egy – a látóidegpályába szúrt – mikroelektroda segítségével elvezették az idegsejtben keletkezett jelet. Azt találták, hogy a magasabb rendű emlősöknél – macskáknál, majmoknál – szinte minden ganglionsejt ún. koncentrikus receptív mezővel rendelkezik.

Ha a neuron receptív mezejének egy részén változtatjuk a fényt, a sejt vagy akkor ad impulzussorozatot, ha megvilágítjuk a kérdéses részt (on reakció), vagy pedig akkor, ha kikapcsoljuk a képrészlet megvilágítását (off reakció), néha pedig mindkét esetben.

A ganglionsejtek mintegy 50%-a on reakciót mutat, ha a fény a receptív mezőnek csak a közepére esik; a környező területre eső fényfolt viszont felvillanásakor elnyomja ezt az aktivitást, kialakskor pedig off reakciót indít be. Ha e sejtek központi és kerületi receptív mezőit egyszerre egy nagyobb fényfoltal világítjuk meg, sokkal gyengébb válaszreakciót vált ki, mint ha csak a mező közepét éri a fény. Az ilyen sejtek receptív mezeje az ún. on-középpontú receptív mező.



Az ábrán számokkal jelölt részek hiányzik a jelsűrűség, de a betűkkel jelölt valamelyik ábra mutatja. Az eddig leírtak alapján állapítsd meg, hogy melyik betűvel jelölt ábra illik a számok helyére.

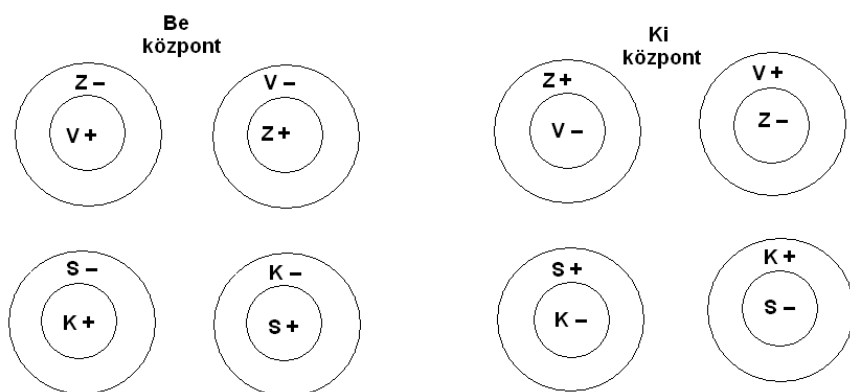


26: 1 - ...

27: 2 - ...

28: 3 - ...

29: 4 - ...

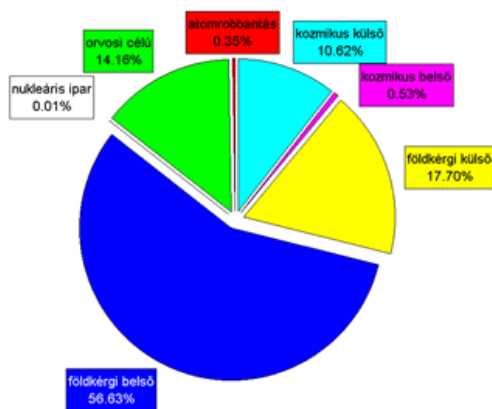


30. Milyen színűnek látjuk azt a fényt, amelynek hullámhossza 545 nm? Válaszodat indokold az ábra információinak felhasználásával!

4. rész: Sugáregészségügyi ismeretek

Szövegértés

A lakosságot folytonosan éri természetes és mesterséges eredetű sugárzás. Az ionizáció kiváltására képes sugárzó anyagok jelen vannak a környezetünkben, mind az élettelen anyagokban, mind az élőlényekben, és így kivétel nélkül valamennyi emberben is. A természetes eredetű sugárzás két forrása az űr és a földkéreg. A kozmikus (a Napból és a még távolabbi űrből jövő), valamint a földkérgi sugárzások a földi élet kialakulását megelőzően is hatottak. Az ember sugárzási térben fejlődött ki és fejlődik ma is tovább. A természetes radioaktív anyagok kiszűrhetetlenül és állandóan jelen vannak a környezetünkben (a talajban, az építőanyagokban, a levegőben, az élelmiszerekben és az ivóvízben), valamint a szervezetünkben. A testünket felépítő atomok közül sokmilliárdnyi radioaktív. Ezek a radioaktív atomok ugyanolyan szerepet töltenek be a sejtépítésben és a szervek működésében, mint ugyanezen elemek stabil (nem radioaktív) atomjai. A radioaktivitás bizonyos elemek egyes atommagjainak az a tulajdonsága, hogy elbomlás közben különféle ionizáló sugárzásokat bocsátanak ki. A testünkben jelenlévő (a sejtjeinket alkotó, illetve a levegővel, a táplálékkal avagy az ivóvízzel felvett) természetes eredetű radioaktív atomok közül minden órában közel 16 milliányi bomlik el. A sugárzó részecskék és fotonok olyan óriási mennyiségben keletkeznek a környezetünkben és a szervezetünkben, hogy minden másodpercben átlagosan 75.000 éri a testünket. Az ezektől eredő külső (bennünket kívülről érő) és a szervezetünkben lévő radioaktív anyagoktól származó belső sugárterhelés végigkíséri egész életünket, nemcsak a születéstől, hanem már a fogamzástól egészen a halálig. A fentiek értelmében túlzás nélkül állíthatjuk, hogy a természetes sugárzás nem jelent veszélyt az emberek egészségére, sőt az élet elválaszthatatlan része, természetes velejárója. A természetes radioaktivitás okozta sugárterhelésünk forrásai kiküszöbölhetetlenek, a mértéke pedig bolygónk népességének többségét illetően viszonylag kicsiny eltéréseket mutat. Ezen eltérések oka egyrészt a lakóhely földrajzi és geológiai sajátosságaiban, másrészt az adott területre jellemző lakásviszonyok, építkezési szokások, valamint az épületben töltött átlagos időtartam különbözőségében rejlik. Így például



néhányszor nagyobb a kozmikus sugárzástól származó sugárdózis a magas hegyek lakói körében, mint a tengerszinten élő embereknél. Az ENSZ Atomsugárhatásokat Vizsgáló Tudományos Bizottságának egy 1988-as felmérése szerint a Föld népessége természetes forrásokból (kozmosz és földkérgi sugárzásból) évente átlagosan 2,4 mSv sugárterhelést kap. A Sv (sievert - ejtsd: "szívert") az élő szervezetet érő sugárzás hatásának mértékegysége.

<u>Természetes</u>	(2,4 mSv/év)
kozmosz külső	0,3 mSv
kozmosz belső	0,015 mSv
földkérgi külső	0,5 mSv
földkérgi belső	1,6 mSv
<u>Mesterséges</u>	(0,4 mSv/év)
nukleáris ipar	0,0002 mSv
orvosi célú	0,4 mSv
atomrobbantás	0,01 mSv

A Föld népessége sugárterhelésének főbb forrásai és átlagértéke

A természetes sugárterhelésünk legnagyobb része - mintegy két-harmada a felszíni közetekben, talajokban és az építőanyagokban, bizonyos koncentrációban mindig jelen lévő urán bomlásakor felszabaduló radongáz és egyéb légnemű radioaktív anyagok belélegzéséből ered. A radonnak köszönhető sugárdózis annál nagyobb, minél többet tartózkodunk rosszul, avagy nem szellőztetett, illetve földszinti, s netán földalatti helyiségben. Ezért is fontos a huzamos tartózkodásunkra szolgáló helyiség gyakori, nappal egy-két óránként néhány perces, illetve elalvás előtti alapos szellőztetése - lehetőség szerint keresztvezetlással.

Élnek a Földön olyan természetes radioaktív anyagokat (főképpen tórium-vegyületeket) bőségesen tartalmazó területeken is emberek, ahol a természetes sugárterhelés átlagértéke a miénknél öt-tíz-szer magasabb, maximumértéke pedig akár ötvenszer is nagyobb lehet. Ilyen "magas háttérsugárzású" területek ismeretesek a brazil tengerparton, Indiában (Kerala államban), Iránban (Ramsar vidékén), továbbá Franciaországban, Madagaszkáron és Nigériában. Jóllehet, évtizedek óta széles körű orvosi, laboratóriumi és epidemiológiai (orvos-statisztikai) vizsgálatokat végeznek a fenti területeken élő több tízezer fős népességcsoportokban, ez ideig körükben semmilyen sugárhatásnak tulajdonítható egészségkárosodást vagy kóros elváltozást nem észleltek.

A múlt század legvége óta a természetes sugárzáson felül az emberiséget mesterséges (az ember által létrehozott) forrásokból származó sugárterhelés is éri. A mesterséges sugárzások között elsőként az 1895-ben Wilhelm Konrad Röntgen által leírt, majd róla elnevezett röntgensugárzás vált ismertté, amelynek hasznosítása - főleg az orvostudományban - világszerte rohamléptekkel terjedt el. A röntgensugárzás a népesség mesterséges eredetű átlagos sugárterhelésének mind a mai napig messze a legnagyobb részét okozza.

	személy*Sv
Orvosi besugárzásból	2.000.000
Atomrobbantások leülepedő hulladékából	50.000
Világító számlapú óráktól	2.000
Nukleáris ipar foglalkoztatási	5.000
Nukleáris ipar lakossági	1.000

A Föld népességének kollektív (összesített sugárterhelése) mesterséges forrásokból

Mindamellett a röntgenvizsgálattól megriadni és attól elzárkózni nem indokolt. A röntgensugárzás orvosi alkalmazása felbecsülhetetlen és teljességgel pótolhatatlan információt ad

a már kialakult betegségekről, avagy a még csak kialakulóban lévő kóros állapotokról. Így az orvosi célú sugárterhelésből származó esetleges kár (egészségkárosodás) eltörpül azon haszon mellett, amelyet a röntgenvizsgálatok jelentenek a betegségek megelőzésében és a megfelelő gyógykezelés megválasztásában.

A mesterséges forrásokból származó összes sugárterhelésünk (mind a Föld, mind hazánk egy lakosára számítva) kevesebb a természetes eredetű évenkénti sugárdózisunk 20 %-ánál. Ennek a legjelentősebb összetevője a sugárforrások orvosi alkalmazása, amelyek révén évente átlagosan 0,4 mSv sugárterhelést kapunk.

A korábbi katonai célú kísérleti atomrobbantások és a nukleáris ipar, így az atomerőművi kibocsátások hatására is éri sugárzás a népességet. Ennek mértéke azonban elenyészően kicsi, kevesebb a természetes sugárterhelésünk fél százalékánál.

A Föld népességének mesterséges eredetű összesített sugárterheléséből az orvosi célú be-sugárzások mintegy 97 %-ot okoznak. Bármennyire is hihetetlennek tűnik (világszerte végzett mérések és számítások szerint), az atomenergetikai ipartól származó kollektív lakossági sugárterhelés - beleértve a csernobili reaktorbalesetből eredő sugárdózist is! -, kisebb, mint a Föld lakosságának világító számlapú óráktól származó sugárterhelése! S ezen utóbbi dózis csupán 2,5-szer kisebb a világ nukleáris energiatermelésének tulajdonítható kollektív foglalkozási sugárterhelésnél (az uránbányászok, az urándúsító üzemek és az atomerőművi dolgozók együttes munkahelyi sugárdózisánál). (A kollektív dózis valamely konkrét sugárforrástól eredő, egy adott embercsoportra számított sugárterhelés. Ezt a csoport létszámának és az adott létesítménytől származó, egy főre jutó átlagos sugárterhelésnek az összeszorozása útján kapjuk. Mértékegysége a személy*Sv).

A mérési adatok nem támasztják alá az atomerőművek iránti túlzott félelmet és ellenszenvet. Különösen érvényes ez egy olyan egyéb energiaforrásokban szűkölködő országra, mint hazánk, ahol a paksi atomerőmű a villamos energiatermelésünk közel felét szolgáltatja, mérhető vagy kimutatható lakossági többlet-sugárterhelés nélkül! Amíg hazánk lakossága a csernobili reaktorbaleset miatt egy év alatt annyi sugárterhelést kapott, mint az éves természetes sugárdózis egy hónapra eső része, addig - a kereken tíz éves üzemelési tapasztalat alapján - a paksi atomerőmű révén a környező lakosságot évente legfeljebb 2 órára jutó természetes sugárdózissal megfelelő többlet-sugárterhelés éri! Ez a többlet olyannyira kevés (viszonyítva az év 8760 órája alatt elkerülhetetlen természetes sugárterheléshez), hogy ettől semmiféle egészségkárosodás nem léphet fel, sőt el sem képzelhető.

Igaz, az atomreaktorok balesete során már lényegesen nagyobb a veszély, hiszen már halálos következményekkel járó reaktorkatasztrófa is volt példa.

(Dr. Turai István: Környezeti sugáregészségügyi ismeretek című munkája alapján)

1. Milyen adatok támasztják alá, hogy a természetes sugárzás nem jelent veszélyt az emberek egészségére?

2. Egészítsd ki a mondatot!

Látható, hogy a földkérgi eredetű belső sugárterhelés szor nagyobb a kozmikus eredetű belső sugárdózisnál, mely csupán a része a kozmikus külső dózisunknak.

3. Rövid válasz: Mi az alapvető oka, hogy néhányszor nagyobb a kozmikus sugárzástól származó sugárdózis a magas hegyek lakói körében, mint a tengerszinten élő embereknél?

4. Rövid válasz: A Föld népessége természetes forrásokból (kozmosz és földkérgi sugárzásból) évente átlagosan 2,4 mSv sugárterhelést kap. Ebből mennyi származik a belső, mennyi külső forrásokból? Ezeknek hányad része földkérgi eredetű?

Külső forrásból.....mSv

Belső forrásból.....mSv

Földkérgi eredetű.....mSv

5. Mi az egyik alapvető oka annak, hogy hazánk vagy a nyugati országok lakosainak nagyobb (3-4 mSv) a természetes sugárterhelése, mint a trópusi országokban élőknek?

6. Írj legalább két okot, ami miatt a téli radon-koncentráció kétszerese lehet a tavaszinak, sokszorosa a nyárinak!

7. Mi történne (a legnagyobb valószínűséggel) egy emberrel, ha egy éven keresztül 50 mSv sugárterhelésnek tennék ki? Válaszod indokold!

8. A röntgenképeken a tüdő képe viszonylag világosnak, a csontoké sötétebb színűnek látszik. Miért?

9. Melyik az a röntgenvizsgálati eljárás, amellyel rétegről-rétegre haladva (mintegy „felszeletelve”) nagyon részletesen lehet ábrázolni a vizsgált szerv szerkezetét, a benne lévő eltéréseket?

10. Az izotópdiaosztikában használt ^{123}I és ^{125}I izotópoknak az atommagjában hány proton és hány neutron található?

11. Melyik elektromágneses sugárzás az alábbiak közül?

A. alfa

B. béta

C. röntgen

12. Mit értünk a radioaktív izotópok aktivitása alatt?

A. a bomlásra képes atomok számát

B. az időegység alatti bomlások számát

C. a bomlások száma osztva azzal az idővel, ami alatt az izotóp teljesen elbomlik.

13 – 22. Szövegkiegészítés

A 13.....(szerv neve) betegségek kezelésre felhasznált 131-jód 14..... sugárzó (neutronok egyike protonná alakul) és 15..... sugárzó izotóp. A jód rendszáma 53. Ez azt jelenti, hogy a 131-es jód izotóp... 16..... neutron és... 17..... protont tartalmaz. Fizikai felezési ideje 8,04 nap. Vagyis 4 nap múlva az eredeti mennyiség..... 18..... része marad meg. A...14.... sugárzás maximális energiája 0,61 MeV, átlagos energiája 0,192 MeV, átlagos szöveti áthatoló képessége 0,8mm. A... 15..... sugárzás domináns energiája 364 KeV. A kezelés

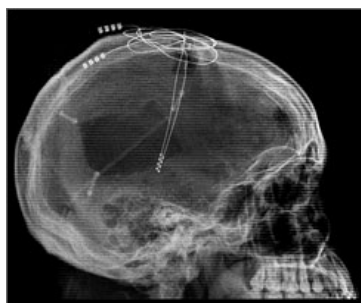
¹³¹I-Na-jodid kapszula vagy folyadék szájon át történő beadásából áll, rendelkezésre állnak intravénás injekciók is. A felszívódott jód a 13..... aktív transzporttal veszi fel a véráramból. A jód a sejtekbe a jódpumpa, a Na⁺/I⁻ szimporter juttatja be. A jód sejten a

belül organifikálódik, beépül a 19..... aminosavba, ezáltal a13.....
 Hormonjainak...20, 21..... alkotórészévé válik. A pajzsmirigybe jutott terápiás adagú
 131-jód izotóp sugárzása gátolja a13.....sejtek oszlását, az elnyelt dózistól
 függően a sejtek elhalását is előidézheti. A sugárhatás célpontja a sejtben döntően a
22.....molekula, amelyben különböző, csak részben helyreállítható károsodások
 keletkeznek. A mechanizmus egyrészt a 22..... direkt ionizációja, másrészt a
 sugárzás hatására a sejtben szabad gyökök szabadulnak fel, amelyek az alapvető biológiai
 molekulákat károsítják. Egy a jódfelvételre képes sejtbe bejutott radiojód... 14...
 sugárzásának hatótávolsága elegendő ahhoz, hogy mintegy „keresztútba” vegye a közvet-
 len szomszédságban azokat a sejteket is, amelyek nem dúsítják a jódot.

5. rész: Miért különlegesek az idegsejtek?

Sebészeti áttörés: agyi pacemaker

„A mély agyi stimuláció során beültetnek az agy egyik területébe egy huzalt, elektródokkal a hegyén. A vezeték egy kis neurostimulátor egységhez csatlakozik, ami olyan, mint egy pacemaker. Ez az egység küldi az elektromos impulzusokat az agyba. Az impulzusok pedig blokkolják az elektromos jeleket, amik a Parkinson-kór tüneteit kiváltják.”



<http://drinfo.hu>

Tekintsd meg az ábrát, amely a kiindulási állapotot mutatja, majd oldd meg a feladatokat!

Nézz utána, hogy szól Raoult-törvénye!

1. Ha különböző koncentrációjú oldatokat egy olyan hártya választja el, ami az oldószerre áteresztő, de az oldott anyagra nem, akkor egyensúlyi állapotban a következő igaz:

I.	II.
8 K^+	
8 Cl^-	H_2O
H_2O	

- A. Az I. oldat koncentrációjú nő, a II. oldat koncentrációja csökken
- B. Az I. oldat koncentrációjú csökken, a II. oldat koncentrációja nő
- C. Az I. oldat koncentrációjú csökken, a II. edényben a vízszint csökken
- D. Mindkét oldat koncentrációja változatlan marad

2. Mi biztosította az anyagok mozgását az egyensúlyi állapotból?

- A. Kémiai potenciál
- B. Diffúzió
- C. Elektromos potenciál
- D. Vízgőznyomás
- E. Ekkor már nem mozognak

3. Tekintsd meg az ábrát, amely a kiindulási állapotot mutatja, majd oldd meg a feladatokat! Ha különböző koncentrációjú oldatokat egy olyan hártya választja el, ami az oldószerre és az oldott anyagra is áteresztő, akkor egyensúlyi állapotban a következő igaz:

I.	II.
8 K^+	
8 Cl^-	H_2O
H_2O	

- A. Az I. edényrészben 8 K^+ , a II. edényrészben 8 Cl^- lesz
- B. Az I. edényrészben 4 K^+ és 8 Cl^- , a II. edényrészben 4 K^+ lesz
- C. Az I. edényrészben 4 K^+ és 4 Cl^- , a II. edényrészben 4 K^+ és 4 Cl^- lesz
- D. Az I. edényrészben 8 K^+ és 4 Cl^- , a II. edényrészben 4 Cl^- lesz

4. Jelöljük a káliumion koncentrációját X-szel, a kloridion koncentrációját pedig Y-nal! Egyensúlyi állapotban igaz, hogy

- A. $X + Y$ az I. edényben $= X + Y$ a II. edényben
- B. $X + Y$ az I. edényben $> X + Y$ az II. edényben
- C. $X * Y$ az I. edényben $= X * Y$ az II. edényben
- D. $X * Y$ az I. edényben $> X * Y$ az II. edényben
- E. $X * Y$ az I. edényben $< X * Y$ az II. edényben

A koncentrációkülönbségek kiegyenlítődése során a különböző töltéssel rendelkező ionok átlépési sebessége egy adott hártyán keresztül különböző lehet. Ez a végső egyensúly kialakulását nem befolyásolja, azonban átmenetileg elektromos potenciál különbség kialakulásához vezethet. Ennek lényege, hogy ha például a pozitív ion a mozgékonyabb, akkor a membránon előresietve pozitív töltésű réteget hoz létre, amely gyorsítja a lassabban diffundáló negatív ionok mozgását, és hátráltatja további pozitív ionok átlépését.

5. Mi biztosította az anyagok mozgását a kiindulási állapotból?

- A. Kémiai potenciál
- B. Diffúzió
- C. Elektromos potenciál
- D. Vízgőznyomás

6. Mi biztosította az anyagok mozgását az egyensúlyi állapotban?

- A. Kémiai potenciál
- B. Hőmozgás
- C. Elektromos potenciál (az ellentétes töltések vonzásából eredő hajtóerő)
- D. Vízgőznyomás
- E. Ekkor már nem mozognak

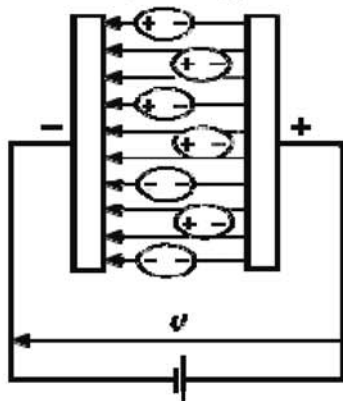
A sejthártya fizikai szempontból kondenzátorként viselkedik. Az elektromos töltés tárolására készített technikai eszközöket kondenzátornak (régies nevén „sűrítő”-nek) nevezzük. A kapacitás a kondenzátor legfontosabb jellemzője. Minden test alkalmas töltések befogadására, tárolására; ezt nevezzük idegen szóval kapacitásnak, C -vel jelöljük (capacitor). A kapacitás definíció szerint: a kondenzátorban felhalmozódott töltések és az ezek által létrehozott feszültség hányadosa, vagyis:

$$C = \frac{Q}{U}$$

ahol U a feszültség Volt-ban, Q a töltés Coulomb-ban, C a kapacitás Farad-ban megadva.

A villamos kondenzátor működése

A kondenzátor két vezető lapból és a kettő közötti szigetelő rétegből áll. A kondenzátorban lévő vezetőket fegyverzeteknek hívjuk. Ha egyenáramú áramforrásra kapcsoljuk a kondenzátort, akkor egy rövid ideig töltőáram folyik rajta. A két lap villamos töltést kap. Ha megszakítjuk a kapcsolatot az áramforrással, akkor a töltést eltárolja a kondenzátor. Minél nagyobb egy kondenzátor kapacitása, annál több villamos töltést tud tárolni azonos feszültségnél. A kapacitás mértékegysége a „Farad” (F), $1 \text{ F} = 1 \text{ As/V}$. Ha összekapcsolunk egy feltöltött kondenzátort egy fogyasztóval, akkor töltéskiegyenlítődés zajlik le. Addig folyik villamos áram a fogyasztón keresztül, amíg kiegyenlítődik a kondenzátor két fegyverzetén a töltés. Egy szigetelőanyag dielektromos állandója azt adja meg, hogy hányszor lesz nagyobb a kondenzátor kapacitása, ha levegő helyett az adott anyagot használjuk szigetelőként.



7.

A sejtmembrán kapacitása lényegében megegyezik egy foszfolipid kettősrétegből álló mesterséges membránéval, értéke körülbelül $1 \mu\text{F}/\text{cm}^2$. Tekintsünk $1 \mu^2$ -nyi felületet és számoljuk ki, hogy egy ekkora felületű membránon hány darab pozitív ion átlépése hoz létre 90 mV feszültségkülönbséget.

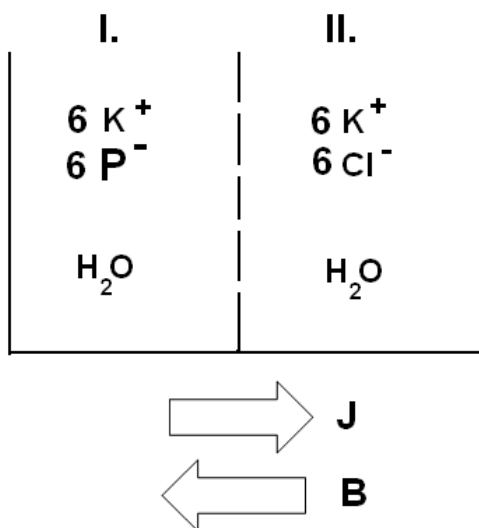
Egy $1 \mu^2$ -nyi sejtmembránon tehát mintegy ... ion átlépése 90 mV feszültségkülönbséget okoz, ha mozgásukat nem követi az ellenkező töltésű ion azonos irányú mozgása.

- A. $6 \cdot 10^{23}$
- B. $100 \cdot 6 \cdot 10^{23}$
- C. 55 000 vagyis közel 50 000
- D. 1 millió
- E. 96 500 vagyis közel 100 000

Eltérő mozgékonyaságú ionok egy adott hártán való átdiffundálásakor átmenetileg elektromos potenciál alakul ki. Az eltérő mozgékonyaság szélső esetben azt is jelentheti,

hogyan az egyik ion nem tud átlépni a membránon. Ilyenkor alakul ki a Donnan egyensúly, vagy Donnan megoszlás. A jelenség azért fontos, mert a sejtek belseje nagy, a membránon át nem diffundáló negatív ionokat (fehérjék, nukleinsavak) tartalmaz, és ezért korábban feltételezték, hogy a Donnan egyensúly lehet a nyugalmi potenciál létrejöttének magyarázata.

Tekintsd meg az ábrát, amely a kiindulási állapotot mutatja be! A P betű jelölje a sejt belsejében lévő fehérjéket és nukleinsavakat, melyek nem képesek átjutni a sejtthártyán. A kiindulási állapotból olyan egyensúlyi állapot alakul ki, melyben mindkét diffúzibilis ion elektrokémiai potenciálja azonos a két oldalon és érvényesül az elektroneutralitás elve – vagyis kation és anionkoncentrációk összege mindkét oldalon azonos lesz. Emellett mindkét oldalon megegyezik a membránon átlépésre képes ionok koncentrációjának szorzata is.



8. Tekintsük a kiindulási állapotot – ahol az egyes ionokra vonatkozó hajtóerőkre vagyunk kíváncsiak. A J vagy B betűkkel jelölt irányokat kell a kifejezések után írnod!

A klorid ionokra vonatkozó kémiai potenciál gradiens iránya ...

A kálium ionok mozgási iránya a kialakuló elektromos potenciál hatására ...

9. Az egyensúlyi állapotra igaz:

- A. Az I. edényrészben $9 K^+$ és $3 Cl^-$, a II. edényrészben $3 K^+$ és $3 Cl^-$ lesz
- B. Az I. edényrészben $3 K^+$ és $3 Cl^-$, a II. edényrészben $9 K^+$ és $9 P^-$ lesz
- C. Az I. edényrészben $8 K^+$ és $2 Cl^-$, a II. edényrészben $4 K^+$ és $4 Cl^-$ lesz
- D. Ugyanezek a koncentrációk maradnak

10. Mindezekből következően, melyik egyenlet helyes (A vagy B)?

(A kapcsos zárójelek az adott ion koncentrációját jelentik az I. vagy a II. edényrészben.)

A.
$$\frac{[K^+]_I}{[K^+]_{II}} = \frac{[Cl^-]_I}{[Cl^-]_{II}}$$

B.
$$\frac{[K^+]_I}{[K^+]_{II}} = \frac{[Cl^-]_{II}}{[Cl^-]_I}$$

11. Szövegkiegészítés:

Ha az oldatot olyan hártya választja el, amely a negatív töltésű fehérje vagy nukleinsav ionok (P^-) számára nem átjárható, akkor a (P^-) oldalon a mozgékony kationok ... a mozgékony anionok pedig ... koncentrációban vannak jelen, mint a (P^-) mentes oldalon.

12. Melyik állítás igaz?

- A. $[K^+]_{II} = [Cl^-]_I + [P^-]_I$
B. $[K^+]_I = [Cl^-]_I * [P^-]_I$
C. $[K^+]_I = [Cl^-]_I + [P^-]_I$
D. $[K^+]_I = [Cl^-]_I + [Cl^-]_I$

Nemcsak az ionok eltérő mozgékonyasága miatt kialakuló potenciálkülönbség befolyásolja azonban az ionok vándorlását. Külső forrásból származó elektromos feszültséggel is befolyásolni lehet az ionmozgást. Ha az például „A” oldalon egy pozitív ion magasabb koncentrációban van jelen, mint a „B” oldalon, akkor kémiai potenciálja magasabb, és ezért a membránon át a „B” oldalra fog diffundálni. Ha azonban az oldatokba helyezett elektródokkal az „A” oldalt negatívvá tesszük a „B”-hez képest, akkor a pozitív ionok elektromos potenciálja a „B” oldalon lesz magasabb az „A”-hoz képest. Megfelelő nagyságú elektromos potenciálkülönbséget létrehozva, a pozitív ionok netto átlépése megszűnik, mivel az ellenkező irányba mutató kémiai és elektromos gradiensek hatása kiegyenlíti egymást. Ionok féláteresztő hártján keresztül kialakuló diffúziójának vizsgálatakor tehát önmagában sem a kémiai, sem az elektromos potenciálok nem elegendőek a spontán létrejövő ionmozgás meghatározására. A kémiai és elektromos potenciált együttesen kell figyelembe venni. Ennek jellemzésére vezették be az **elektrokémiai potenciál** fogalmát.

Az elektrokémiai potenciál egyenlete:

$$\mu = \mu^o + RT \ln c + zFE$$

ahol μ^o a standard körülmények között létrejövő elektrokémiai potenciál, R az egyetemes gázállandó, T az abszolút hőmérséklet, c a moláris koncentráció, z az ion töltésszáma, F a Faraday állandó és E az elektromos feszültség.

Az elektrokémiai potenciál egyenlete segítségével meghatározható, hogy milyen elektromos feszültség alkalmazása esetén lesz az adott ion nyugalmi állapotban, vagyis mikor fogja a kémiai és az elektromos gradiens hatása kiegyenlíteni egymást. Ilyenkor az adott ion elektrokémiai potenciálja a két térrészben azonos:

$$\mu_A = \mu_B, \quad \text{azaz} \quad \mu^o + RT \ln c_A + zFE_A = \mu^o + RT \ln c_B + zFE_B$$

ebből

$$E_A - E_B = - \frac{RT}{zF} \ln \frac{c_A}{c_B}$$

Egyértékű pozitív ionokra számolva, és áttérve tizes alapú logaritmusra, a hőmérsékletet pedig 20,0 °C-nak tekintve, a következő egyszerűbb képletet kapjuk:

$$E_A - E_B = -58 \cdot \lg \frac{C_A}{C_B} \text{ mV}$$

Ez az összefüggés a Nernst-egyenlet, amely alapvető fontosságú az ingerlékeny sejtek nyugalmi és akciós potenciáljával kapcsolatos számítások szempontjából. Segítségével minden ionra nézve meghatározható az egyensúlyi potenciál, Ez az a feszültségérték, amely mellett az adott ion egyensúlyban vagy nyugalmi állapotban van a membrán két oldalán, annak ellenére, hogy koncentrációja különböző a sejten belül és kívül.

Tekintsd meg az alábbi táblázatot, amely egy tintahal óriásaxonjának az adatait mutatják. A nyugalmi membránpotenciál értéke $E_m = -62 \text{ mV}$. A negatív előjel (-) azt mutatja, hogy a sejt belseje negatív a külső környezettel szemben.

	A	B	C	D	E
ion	Na^+ (mmol/l)	K^+ (mmol/l)	Ca^{++} (mmol/l)	Cl^- (mmol/l)	Proteinát ⁻ (mmol/l)
Sejten belül	20	345	0.0001	61	143
Sejten kívül	455	72	2.5	540	0.1

13. Melyik igaz az alábbiak közül

- A. A K^+ kémiai potenciálja sejten belül nagyobb, mint kívül
- B. A K^+ kémiai potenciálja sejten belül kisebb, mint kívül
- C. A Na^+ kémiai potenciálja sejten belül nagyobb, mint kívül
- D. A Na^+ kémiai potenciálja sejten belül kisebb, mint kívül
- E. A Cl^- kémiai potenciálja sejten belül nagyobb, mint kívül

A kísérleti eredmények a tintahal óriásaxon esetében is igazolták, hogy a membrán nem átjárható (nem permeabilis) a fehérjékre (P^-), de a különböző ionokra is eltérő mértékben permeabilis. A hidratált K^+ és Cl^- kb. 0,4 nm átmérőjű, a hidratált Na^+ kb. 0,5 nm átmérőjű. Sok szövetben éppen ezért a K^+ és Cl^- permeabilitása közel azonos nagyságrendű, míg a Na^+ permeabilitása 1/100 része a K^+ -hoz viszonyítva.

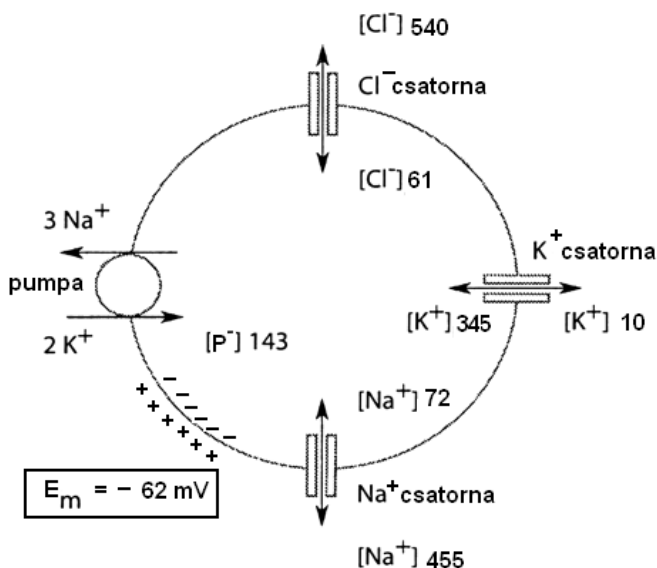
A Na- K pumpa a sejtthártyában elhelyezkedő fehérje, a mi 3 Na^+ pumpál ki a sejtéből, miközben 2 K^+ juttat a sejtbe (lásd ábra).

14. Miért nagyobb átmérőjű a hidratált Na^+ , mint a hidratált K^+ ?

- A. mert a Na^+ több protonnal rendelkezik, mint a K^+
- B. mert a Na^+ a 3. periódusban található, a K^+ pedig a 4.-ben
- C. mert a K^+ az első főcsoportba tartozik a Na^+ pedig a másodikban
- D. mert a Na^+ -nak nagyobb az atomtömege, mint a K^+ -nak.
- E. mert a Na^+ körül nagyobb a térerősség, így a polarizáló képessége nagyobb.

15. Milyen következménnyel járna, ha a pumpa nem cserélné a K^+ -t és a Na^+ -t?

- A. A sejt belsejében nem lenne K^+
- B. A sejt külső terében nem lenne Na^+
- C. A sejt belsejében csökkenne az ionok koncentrációja
- D. A sejten belüli terében



Koncentrációk mmol/liter mértékegységekben

16. Mennyi a Na^+ egyensúlyi potenciálja (E) ?

- A. 96 mV
- B. + 66 mV
- C. 55 mV
- D. + 46 mV
- E. 89 mV

17. Mekkora a Na^+ -ra vonatkozó elektrokémiai potenciálkülönbség $z^*(E_m - E)$?

- A. +27 mV
- B. 108 mV
- C. + 7 mV
- D. 59 mV
- E. + 58 mV

18. Számíts ki a K^+ -ra és a Cl^- -ra vonatkozóan is az egyensúlyi potenciálokat és az elektrokémiai potenciálkülönbségeket! A 16. és a 17. feladatban megadott értékek közül válassz!

K^+ :
 Cl^- :

Nyilvánvaló, hogy egy idő után a pumpa az összes Na^+ -t kipumpálná ha nem térne vissza állandóan a Na^+ -ion a sejtbe. Kiderült, hogy vannak a sejtben olyan ioncsatornák, amelyek állandóan kismértékben nyitva vannak (*szivárgási csatorna*) és a káliumionokat kiengedő csatornák nagyobb áteresztőképességűek, mint a nátriumionokat beengedők. Vannak olyan csatornák is, melyek, akkor nyílnak meg, ha egy kémia anyag (ligand) az ioncsatornához kapcsolt receptorhoz (jelfelfogó) kötődik (*ligandfüggő ioncsatornák*) illetve vannak olyan ioncsatornák, amelyek meghatározott feszültségértékeknél nyílnak meg és eresztik át az ionokat (*feszültségfüggő ioncsatornák*).

19. A fentiek alapján melyik ion játszik kiemelkedő szerepet a nyugalmi potenciál kialakításában?

- A. Na^+
- B. K^+
- C. Cl^-

20.

A nyugalmi potenciál szinte minden élő sejtre jellemző, de megváltozni csak kevés sejt típusban képes pl. idegsejtekben, izomsejtekben, érzékhámsejtekben. Mindazok a hatások, amelyek a nyugalmi membránpotenciál értékét csökkentik, serkentő hatásúak.

Egészítsd ki táblázat utolsó oszlopát: írd be, hogy adott kémiai anyag serkent vagy gátol.

A kémiai anyag neve	A receptor neve	Szerv neve	Milyen ioncsatornát aktivál (közvetlenül vagy közvetve)?	Serkent vagy gátol?
Acetilcolin	muszkarinos	szív	K^+	
Acetilcolin	nikotinos	vázizomzat	Na^+	
GABA	GABA _A	agy	Cl^-	

Az is kiderült, hogy az egyes receptorokhoz sejten kívül kapcsolódó jelátvivő anyagok (pl. adrenalin, dopamin) nem közvetlenül az ioncsatornán keresztül fejtik ki a hatásukat, hanem a receptorhoz való kötődés azt eredményezi, hogy a receptor aktivált állapota révén aktivál más molekulákat, de már a sejten belül. Tehát a receptorok a sejthez kívülről érkező jeleket érzékelve a sejten belül különböző jelátvivő utakat aktiválnak, és a sejtet válaszként készítetik. Egy ilyen sejten belüli jelátvivő molekulák lehet az ún. G fehérjék vagy G proteinek. Az elnevezésük az ATP molekula felépítéséhez hasonló felépítésű GTP-re utalnak. A dopamin dopamin-receptorokhoz kapcsolódva fejtik ki hatását, melyből több típust különböztetünk meg. A D1 típusú dopamin receptorok G proteinen keresztül fejtik ki a hatásukat. Az egyik legfőbb szerepük, hogy egy másodlagos hírvivő, a cAMP aktivitását szabályozzák. A cAMP pedig enzimeken keresztül közvetíti a hatást. A különféle dopamin receptorokat szoros kapcsolatba hozták pl. a csecsemőkori kötődéssel, felnőttkori és gyermekkori temperamentummal, hiperaktivitással, Alzheimer-kórral, Parkinson-kórral, skizofréniával, drogfüggőséggel, alkoholizmussal.

A G proteineken kívül ma már sok más sejten belüli jelátvivő molekulát ismerünk. Vannak olyan receptorfehérjék, amelyek enzimaktivitással rendelkeznek aszerint, hogy kapcsolódik hozzájuk foszfátcsoport vagy sem. Tehát itt a jelátvivő anyag kapcsolódása a receptorhoz (kívülről) elősegíti, hogy foszfátcsoport kapcsolódjon a receptor fehérjéhez (sejten belül) és így aktiválódjon. Az inzulin hatása is így közvetítődik.

Parkinson-betegség

A Parkinson-betegség elsősorban idős korban kialakuló, lassan előrehaladó degeneratív idegrendszeri betegség. A betegség hátterében számos genetikai és környezeti tényezőt azonosítottak. A betegség alapja az automatikus mozgásokat szabályozó motoros rendszer zavara: a középagy fekete magból (substantia nigra) kiinduló és a lencseagban (striatum része) végződő pályarendszerben az egyik fő ingerületátvivő anyag, a dopamin mennyisége csökken a substantia nigra sejtjeinek pusztulása miatt, ez vezet a mozgásszabályozás zavarához.

A Parkinson kór fő tünetei: izommerevség (**rigor**), mozgások meglassulása (**hipokinezis**) és nyugalomban jelentkező remegés (**tremor**). Kísérő tünetek: mimika csökkenése, nyálcsorgás, szaglás csökkenése, írás megromlása (mikrográfia), gondolkodás meglassulása (bradifrenia).

A dopamin átfőmálja a viselkedés szabályozásáért felelős kulcsfontosságú agyi áramköröket. A Parkinson-kór és a drogfüggőség homlokegyenest ellenkező megbetegedések, annak ellenére, hogy mindkettő függ az agyi dopaminszinttől. A Parkinson-kóros betegekben nincsen elég, a drogfüggők pedig túl sokat kapnak belőle. Bár régóta ismert a dopamin szerepe ezekben a betegségekben, a hatásmechanizmust eddig rejtély övezte.

„Két agyi áramkör segít eldönteniünk, hogy tegyünk-e lépéseket óhajaink irányába, vagy sem. Például azt, hogy egy nyári éjszakán felkeljünk-e a kanapéról, hogy lehajtsunk egy hatos csomag jégáldé sörért a partra, vagy inkább henyéljünk tovább a kanapén.”

Az egyik áramkör egy „stop” kör, ami megállít minket abban, hogy a szándékunk irányába cselekedjünk, míg a másik egy „indulj” kör, ami épp a cselekvésre ösztönöz. Ezek az ingerületi körök a striátum-ban (egy agyidegmagban) helyezkednek el, ahol a gondolatok cselekvéssé konvertálódnak. A kutatók elektromosan aktiválták a kérgi rostokat, hogy a mozgásparancsokat stimulálva megemeljék a természetes dopaminszintet. Azonban ami ezután következett, az mindenkit meglepett. Az „indulj” áramkörhöz kapcsolódó agykérgi szinapszis (ingerületátvitel) erősebb és nyomatékosabb lett. Ezzel egy időben a „stop” áramkörben gyengült a kérgi ingerületátvitel.

„Ez lehet a függőség magyarázata” – gondolták. „A kábítószerk által felszabadított dopamin abnormális mértékben erősíti az agykérgi szinapszisokat, melyek a striátum „indulj” áramkörébe vezetnek, míg egyidejűleg gyengülnek a „stop” áramkörök. Mivel ez az esemény a drogbevitelhez kapcsolódik, kialakul egy kontrollálhatatlan motiváció és felkésző magatartás a drog irányába. Egy egészséges agyban kiegyensúlyozottak a motiváló készletések és a szándékos leállítások” – állította Surmeier. „A kutatások alapján, nem csak a megerősödött agyi áramkörök választják ki a cselekvőszándékot - az emelkedett dopaminszintnek megfelelően -, hanem a meggyengült „stop” áramkörök is hozzájárulnak ehhez.”

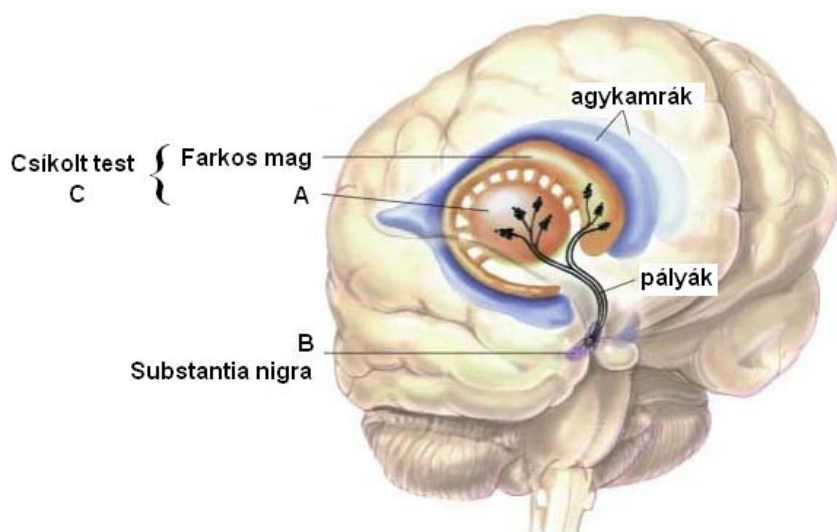
A kísérlet második szakaszában a kutatók olyan állatkísérletes modellt használtak, amelyben az emberi Parkinson-kórnak megfelelően elpusztultak a dopaminerg neuronok. Később megnézték, hogy mi történik az agykérgi cselekvés ösztönzésre. Az eredmény: a „stop” áramkörök megerősödtek, míg az „indulj” áramkörök gyengültek.

„A tanulmány magyarázatot ad arra, hogy miért nehéz a Parkinson-kóros betegeknek az olyan mindennapos cselekvések elvégzése, mit például egy pohár víz elvétele az asztalról, ha éppen megszomjaztak” – magyarázza a kutató. Surmeier egy autó analógiájával példázta a jelenséget. „A tanulmányunk világosan rámutat, hogy a Parkinson-kórosok mozgásindítás képtelensége nem egy passzív folyamat, mintha egy autóból elfogyyna a benzin. Inkább azt mondhatnánk, hogy az autó azért nem mozdul, mert a lábunk rátapadt a fékre. A dopa-

min normális esetben segít szabályozni a fék és gázpedálra lépést. Segít megtanulni, hogy amikor pirosat látunk a kereszteződésben lefékezzünk, míg ha zöld van, lelépjünk a fékpedálról és gázt adjunk. A Parkinson-kóros betegek, akik elvesztették a dopamintermelő idegsejtjeiket, örökre a fékhez ragadtak.” Az agyi áramkörök alapjainak jobb megértése új terápiás célkitűzésekre ösztönzi a kutatókat. Főként, hogy mennyiben szabályozhatók ezek az agyi megbetegedések, beleértve más, dopaminhoz kapcsolt kóros állapotokat, például skizofréniát, Tourette szindrómát (ismétlődő, akaratlan mozgások jellemzik), vagy disztóniát (izomtónus zavart).

Forrás:

<http://esciencenews.com/articles/2008/08/08/unlockin.g.mystery.why.dopamine.freezes.parkinsons.patients>



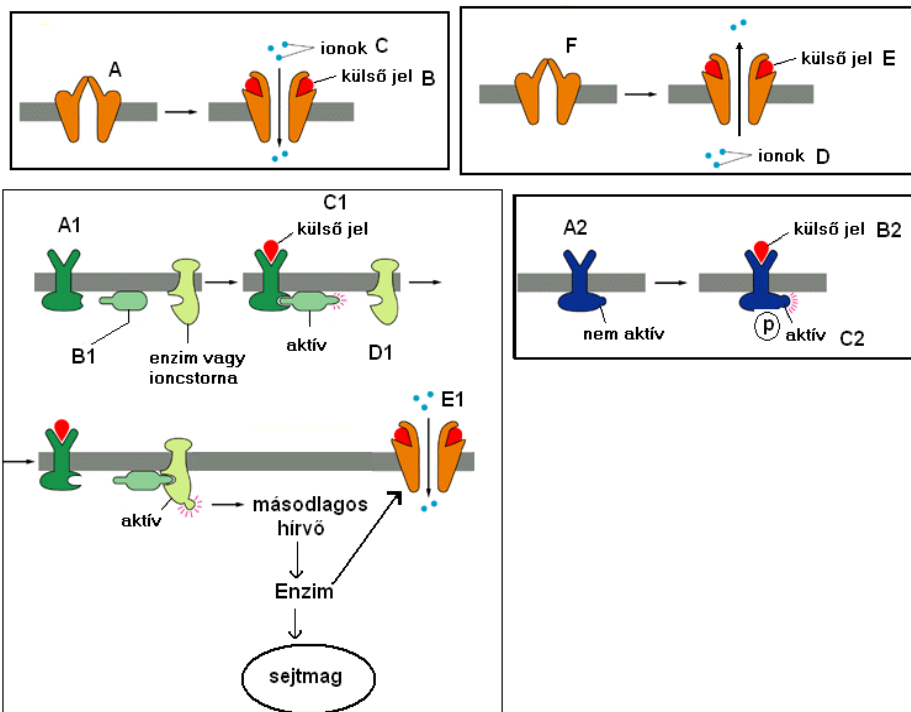
21. Mely agyterületet jelölik a betűk (A, B, C) ?

A: ...

B: ...

C: ...

Tekintsd meg ábrákat, majd egészítsd ki a táblázatot!

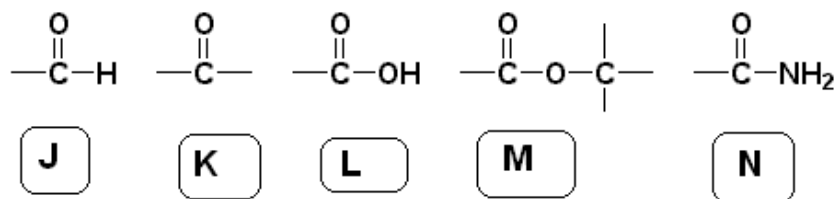
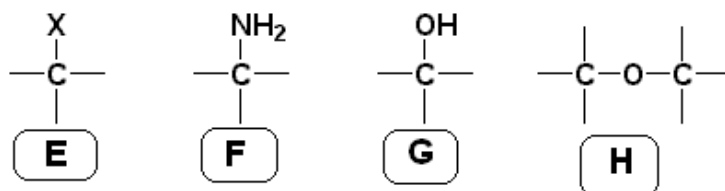
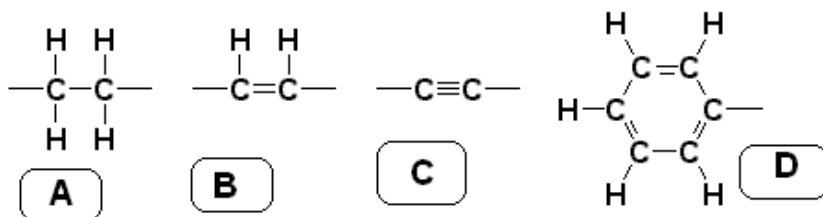


Feladat		Jele az ábrán
22.	GABA receptor r	
23.	Muszkarinos acetilkolin receptor	
24.	Dopamin	
25.	G protein	
26.	Nikotinos acetilkolin receptor	
27.	Acetil-kolin	
28.	inzulin	
29.	K^+	
30.	Cl^-	
31.	D1 Dopamin receptor	
32.	Na^+	
33.	Inzulin receptor	
34.	Foszfátcsoportokkal aktivált enzimreceptor	
35.	GABA	
36.	Na^+ vagy Ca^{2+} ion	

6. rész: Biokémia, burgonya, cukorbetegség

I. A biokémia alapjai

A funkciós csoport az atomok egy molekulán belüli olyan csoportja, amely az adott molekula jellemző kémiai reakcióiért felelős. **Párosítsd a funkciós csoportok, molekularészek betűjeleit a meghatározásokkal! Egy meghatározás mellé több betű is írható.**



Meghatározás	Betűjel
1. A fehérjék peptidkötéseinek kialakításában vesz részt	
2. A természetben, számos esetben észterekben savakhoz kötve (pl. gyümölcsészterek, zsírok) fordul elő.	
3. Egy észterkötés pl. a foszfátidokban	
4. A NAD^+ piridingyűrűjének egyik C atomjához kapcsolódó csoport	
5. Bázisos tulajdonságot ad a vegyületnek. az aminosavak dekarboxileződése során jönnek létre. A szervezetben jelátvivő anyagként működő szerotonin és hisztamin funkciós csoportja is.	
6. Reakciókészségük viszonylag kicsi, innen származik a paraffin nevük (parum affinis = kis reakciókészség). Erősen poláros oldószerek (pl. víz) azért nem oldják, mert az oldószermolekulák asszociációja olyan erős, hogy halmazrendszerükbe a csak kismértékben polározódó ilyen típusú vegyületek nem tudnak behatolni. Nagy mennyiségben állnak rendelkezésre a természetben, a földgázban és kőolajban	
7. Egy vegyértékű gyök; képlete (C_6H_5).	
8. Az oxigénatom tetraédes vegyértékelektronpár elrendeződése miatt nem befolyásolja jelentősen a molekula alakját. A C-O kötés ugyan poláros, de a molekula a kapcsolódó szénhidrogéncsoportok miatt gyakorlatilag apoláris. A glükóz és a fruktóz összekapcsolódása is ezzel a kötéssel történik a szacharóz molekulában.	
9. Formilcsoport. Az oxocsoportnál ezek a vegyületek erősen polárisak, mert a π -kötés elektronjait magához vonzza nagyrészt az oxigénatom. Ez határozza meg a fizikai tulajdonságokat is: kisebb szénatomszámnál elegyednek vízzel nagyobbaknál vízzel oldhatatlanok. Viszonylag erős redukálószer, amit a kimutatásuknál kihasználhatunk (Fehling reakció, ezüsttükör-próba).	
10. Viszonylag reakcióképes vegyületek, ami azzal is magyarázható, hogy a funkciós csoport elektronvonzó hatása miatt lazítja a vele szomszédos szénatomhoz kapcsolódó hidrogénatomot vagy hidrogénatomokat. Ez a funkciós csoport hidroxilcsoportot is tartalmaz, ezért hidrogénkötéseket tudnak kialakítani. A funkciós csoport hidrophil, poláris jellege érvényesül inkább alacsony (<8) szénatomszámú vegyületeinél ezért ezek vízben jól oldódnak.	
11. Ez a kötés a funkciós csoportokon belül kialakult delokalizált elektronrendszer miatt merev. Zsírok és alkoholok kondenzációjával jön létre.	
12. Az alkil-halogenidekben található, szén-halogén kötés, erősen poláris, ezért ezek a vegyületek általában reaktív molekulák, és nukleofil szubsztitúciós reakcióik is könnyen végbemennek.	
13. Telítetlen szénhidrogének	
14. Éhezéskor vagy cukorbetegség esetén a sejtek zsíroxidációs folyamatainak eredményeként keletkeznek az ezt a funkciós csoportot tartalmazó vegyületek. A gyümölcscukor egyik funkciós csoportja.	
15. Glükóz részlete is lehetne	
16. A fenilalanin részlete is lehetne	
17. A dezoxiribóz részlete is lehetne	
18. Az ATP részlete is lehetne	
19. A foszfátidok részlete is lehetne	
20. A tesztoszteron részlete is lehetne	

II. A burgonya

A krumpli nem volt mindig édes és ehető, a növény Dél-Amerikában termő ősei még sütés és főzés után is megőrizték kissé keserű ízüket, és csak az éjszakai fagy hatására lettek egy kicsit édesek. Az Andokban elterjedt fajta a rövid, a chilei pedig a hosszú nappalokhoz alkalmazkodott. Egyes kutatók szerint Európába elsőként az andoki burgonya érkezett meg, amely 200 év alatt adaptálódott a hosszú nappalokhoz. Mások szerint viszont a modern háziasított burgonya őse a chilei variánsból származik, mert az ottani termesztési körülmények nagyon hasonlítottak az európaikra. Azt azonban egész mostanáig nem vették figyelembe, hogy a krumpli történetében Amerika és Európa között nagyon komoly szerepet játszottak a Kanári-szigetek, hiszen egy 1597-es leírás szerint Közép- és Dél-Amerika után először itt jelent meg a krumplitermesztés. A szakértők szerint a szigeteken az andoki variánszt honosíthatták meg, ám erre mostanáig nem találtak genetikai bizonyítékot. David Spooner, a Wisconsini Egyetem kutatója és az Egyesült Államok Mezőgazdasági minisztériumának szakértője ezért úgy döntött, hogy megpróbálkozik az ottani krumpli vizsgálatával. A genetikai minta alapvetően az andoki ősökre utal, nyomokban azonban a chilei rokon is megtalálható benne. Ebből pedig az derül ki, hogy a szigeten különböző időpontokban mind a két fajta megjelent, és az európai növény ezek keveredéséből alakulhatott ki. A további vizsgálatokkal a krumpli teljes történetét szeretnék megismerni, amely a szakértők szerint utat mutathat a krumpli további nemesítése felé is. Az eredményeket a Crop Science legújabb számában tették közzé. Régészeti leletek szerint Dél-Amerikában több mint hétezer évvel ezelőtt már fogyasztották az étkezési burgonyát, ami - a spanyol hódítók által összerabolt arany, ezüst és drágakő szerény útítársaként - az 1570-es években került Nyugat-Európába, majd jutott később kalandos utakon Magyarországra. Elsőként bizalmatlanul fogadták, főként, hogy sokan a mérgező levelét és termését fogyasztották el. A krumpli népszerűsítésében jelentős szerepet játszott Antoine Augustine Parmentier, a francia király gyógyszerésze, aki XVI. Lajos meggyerésével biztosította a burgonya sikerét. Hazai karrierje a 18. század végén vette kezdetét, amikor II. József adókedvezménnyel támogatta a burgonya termesztését. Az új növényt kezdetben földi körtének, vagy földi almának is nevezték, a krumpli szó pedig a német névből (Grundbirne) származik. C-vitaminból 80-100 mg/100 g-ot tartalmaz, amely a tárolás során 60 mg/100 g-ra csökken. Néhány esetben gyökerével együtt tárolják a krumplit.

Forrás: <http://www.mult-kor.hu/cikk.php?article=17483>

1. Egyszerű választás: A burgonya melyik részét (szervét) fogyasztjuk?

- A. A gyökerét
- B. A föld alatti szárát
- C. A föld feletti szárát
- D. A levelét
- E. A termését

2. Egyszerű választás: Az alábbiak közül melyik tényező utal a burgonya eredeti hazájára?

- A. A burgonya tartalék tápanyaga a keményítő
- B. A burgonya virágzási ideje
- C. Chilei fogyasztási szokások
- D. Az európai fogyasztási szokások
- E. A Kanári-szigeteken a 16. században már termesztették

3. Rövid válasz: Miről szólhatott David Spooner Science újságban közölt cikke? Fogalmazd meg röviden!

4. Rövid válasz: Egyes botanikusok (növényekkel fogalalkozó kutatók) szerint nem helyes ha azt mondjuk, hogy krumplit, paradicsomot, karfiolt eszünk. Vajon mire gondolhatnak, miért nem helyes a kifejezés?

5. Számolás: A felnőtt ember napi C vitaminszükséglete 200 mg. Mennyi (hány g) krumpli fogyasztása fedezné a napi C vitaminszükségletét Magyarországon, februárban, egy felnőtt embernek?

6. Rövid válasz: Ha egy 100 cm^3 térfogatú krumplidarabot 200 cm^3 vizet tartalmazó hengerbe tennénk (a vízben teljesen elmerülne), azt várnánk, hogy a vízszint a 300 cm^3 -t mutató jelre emelkedik, mégsem ezt tapasztaljuk, hanem kisebb értéket! Fogalmazzon meg olyan kémia vagy biológiai okot, amely magyarázhatja a tapasztaltakat!

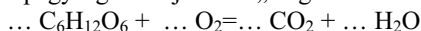
7. Egyszerű választás: Tételezzük fel a krumplit 100 cm^3 térfogatú kockának! Ha szájüregünkben megrágjuk ezt a krumplit, mi igaz az alábbiak közül?

- A. A krumpli össztérfogata nő
- B. A krumpli összfelülete nő
- C. A krumplidarabok élhosszúsága biztosan nő
- D. A krumplidarabok térfogata nő
- E. A krumplidarabok száma csökken

8. Összetett választás: A sokáig rágott pirított (sült) krumplit édesnek érezzük. Mi következhet ebből az alábbiak közül?

- A. A krumpliban alapegységként szőlőcukor van
- B. A krumpli tartalmaz szénhidrátokat
- C. A krumplinak magas a fehérjetartalma
- D. A krumpli tartalmaz növényi olajokat is

9. A krumpli alapegységei a sejtekben „elégnek”. Rendezd az alábbi egyenletet!



10. Rövid válasz: II. József adókedvezményrel támogatta a burgonya termesztését, mostanában viszont egyre nő az étkezési burgonya ára. Hogyan kapcsolható össze ez a tény azzal, hogy az átlaghőmérséklet növekszik a Földön?

III. Cukorbetegség

A **cukorbetegség, diabetes mellitus** vagy rövidítve **diabétesz** a szőlőcukor (glükóz) feldolgozási zavara, melynek oka a hasnyálmirigy által termelt inzulin nevű hormon hiánya, vagy a szervezet inzulinnal szembeni érzéketlensége (inzulinrezisztencia, relatív inzulinhiány) vagy mindkettő. Az abszolút vagy relatív inzulinhiány következtében, mivel a sejtek inzulin hiányában nem képesek a glükóz felvételére, a vércukorszint megemelkedik, és ez okozza a betegség fő tüneteit. A *diabetes mellitus* magyarul „mézédes átfolyás”-t jelent a görög „διαβήτης” = „átmenet, átfolyás” és a latin „mellitus” = „mézédes” szavak összetételéből) a szervezet anyagcseréjének krónikus megbetegedése. Az elnevezés az egyik főtünetre, a cukor vizelettel való fokozott kiválasztására és a megemelkedett vizeletmennyiségre utal. A középkorban a vizelet megkóstolása jelentette a diagnózist.

Forrás: wikipedia.hu

Tanulmányozd az alábbi adatokat, majd válaszolj a kérdésekre!

Az evés után eltelt idő	Glükóz	Glükóz
	(mg / dl) * a vérben	(mg /dl) * a vérben
	A személy	B személy
0.5	100	180
1	110	200
1.5	125	225
2	115	230
2.5	110	225
3	105	215
3,5	100	200
4	90	190

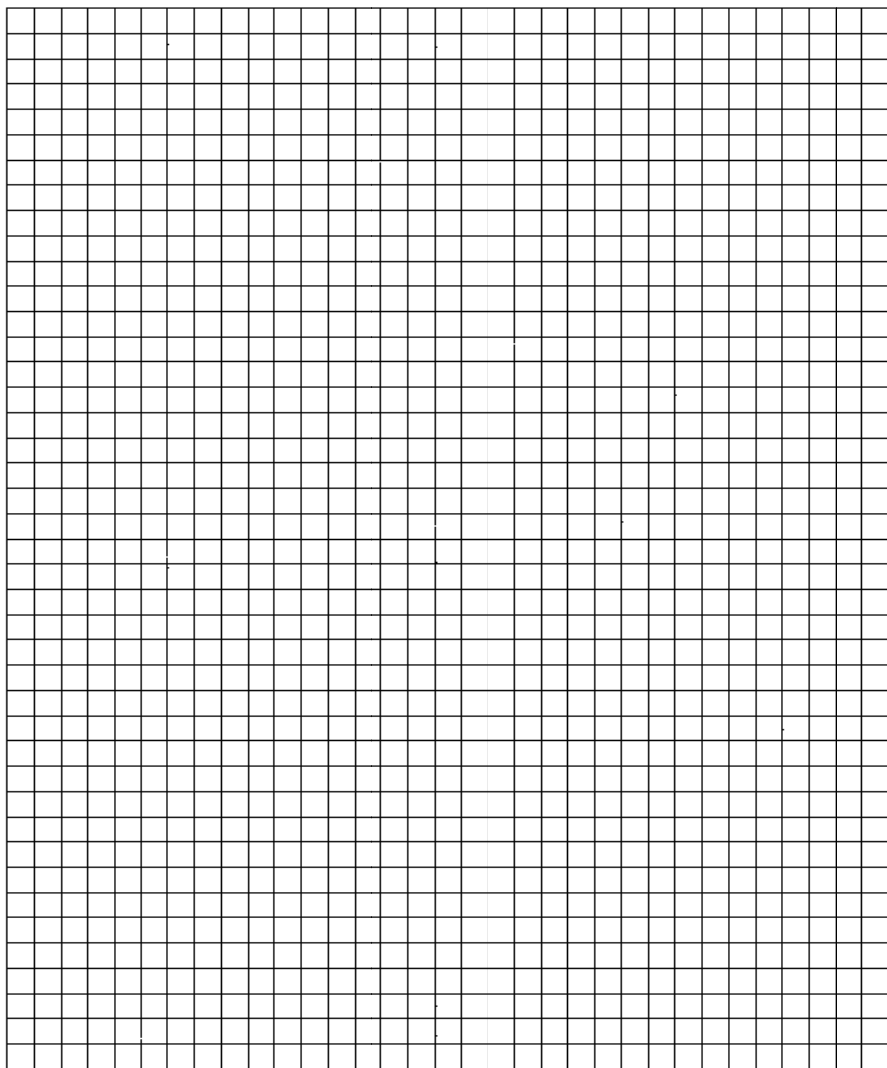
*Valószínűleg olvastál már olyan dokumentumokat, amikor a vércukor szintet **mmol/l** mértékegységben adták meg, vagy ahol **mg/dl**-ben. A konvertáláshoz az adott értéket meg kell szorozni (vagy osztani) 18-cal. (Pl. a 7 mmol/l megfelel 126 mg/dl-nek).

1. Mi a független változó? Válaszodat indokold!
2. Mi a függő változó? Válaszodat indokold!
3. Ha a táblázat adatait grafikusán ábrázolnád, milyen címet adnál a grafikonnak? Válaszodat indokold!
4. Melyik ember a cukorbeteg (A vagy B)?
5. Melyek azok az adatok, melyek alátámasztják a feltevéseidet?

6. Ha megnéznénk az evés után 6 órával a B személy vércukorszintjét, mi a valószínű várható érték? Miért?

7. Ábrázold a két személy vércukoradatait!

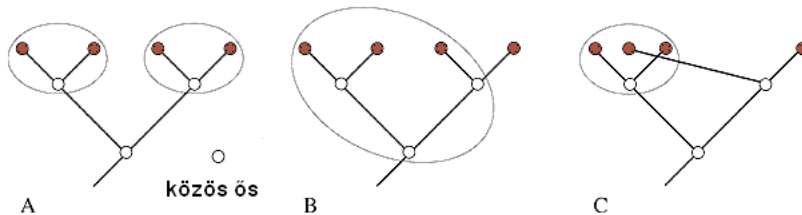
Cím: _____



8. Milyen következtéseket tudsz levonni a grafikonok alapján? Írj legalább kettőt!

7. rész: Rendszertan

A biológiai rendszertanban **monofiletikus csoportnak** nevezzük az egy közös rendszertani őstől származó élőlények összességét (vagyis az őst és összes leszármazottját együttesen). Ha egy élőlénycsoport több ősrre vezethető vissza, akkor **polifiletikus csoportnak** nevezük, tehát a csoport tagjainak hasonló tulajdonságai egymástól teljesen függetlenül jöttek létre. Ha a csoport tagjai visszavezethetők egy közös ősrre, viszont a csoport maga nem tartalmazza annak a bizonyos legközelebbi közös ősnak az összes leszármazottját, akkor **parafiletikus csoportról** beszélünk.



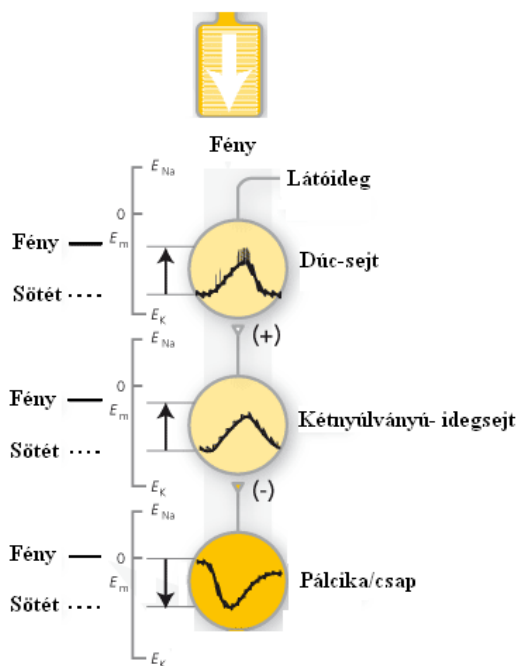
Párosítsd az ábrákat a meghatározásokkal!

1. Polifiletikus csoport
2. Monofiletikus csoport
3. Parafiletikus csoport
4. A hüllők (*Reptilia*) a madarak (*Aves*) nélkül
5. Melegvérű (azaz állandó testhőmérsékletű) állatok: madarak és emlősök
6. A hüllők (*Reptilia*) a madarakkal (*Aves*)
7. Az állkapocs nélküliek (*Agnatha*) az állkapocsosok (*Gnathostomata*) nélkül
8. Röpképes gerincesek: madarak és denevérek
9. A kétszikűek (*Dicotyledonae*) az egyszikűek (*Monocotyledonae*) nélkül
10. A csontos halak (*Osteichthyes*) a négy lábúak (*Tetrapoda*) nélkül
11. Fotoszintézisre képes élőlények: növények és egyes baktériumok

8. rész: Vegyes feladatok

1. Az emberi retina. Tekintsd meg az alábbi ábrát! Valamelyik felirat hibás, mert így nem összefüggő az ábra! Válaszd ki melyik felirat hibás az alábbiak közül!

- A. Az ábrán rosszul szerepel a fény iránya
- B. Az ábrán feltüntetett sejtek nem ebben a sorrendben követik egymást
- C. A Fény és Sötét feliratok nem minden esetben szerepelnek a megfelelő helyen
- D. A kör melletti nyilak iránya egyik esetben nem megfelelő
- E. A körben látható görbék közül egynek nem megfelelő a lefutása



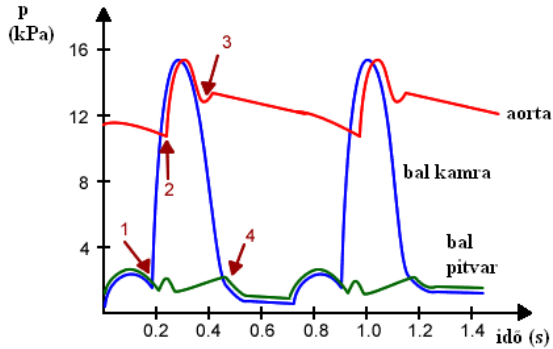
2. Az alábbiak közül melyik fehérje megváltozott vérplazma szintje utal általában vashiányos vérszegénységre?

- A. Transzferrin
- B. Mioglobin
- C. Hemoglobin
- D. Citokróm-a
- E. B₁₂ vitamin

3. Melyik ion egyensúlyi potenciálja megközelítőleg +135 mV, ha a nyugalmi membránpotenciál értéke -90 mV?

3. feladat	A	B	C	D	E
ion	Na ⁺ (mmol/l)	K ⁺ (mmol/l)	Ca ⁺⁺ (mmol/l)	Cl ⁻ (mmol/l)	Proteinát- (mmol/l)
Sejten belül	20	150	0.0001	0.1	76
Sejten kívül	145	4	2.5	76	0.1

4. Mennyi vért továbbít 1 perc alatt ez a szív, ha a pulzustérfogat 70 ml?

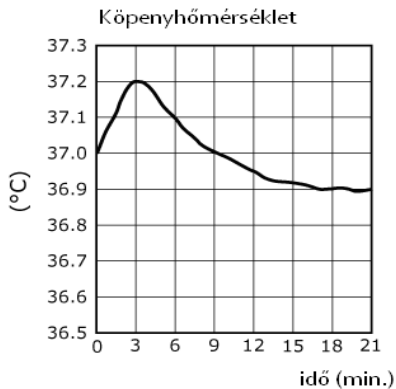


- A. kb. 3 liter
- B. kb. 5 liter
- C. kb. 6 liter
- D. kb. 10 liter
- E. kb. 12 liter

5. A következőket tudjuk: 1 g fehérje égéshője 22 kJ, a szervezetünkben történő égés kapcsán felszabaduló hőmennyiség 17 kJ. Hol kell keresni a különbséget?

- A. a vizeletben
- B. a zsírszövetben
- C. a gyomorban
- D. a vékonybélben
- E. a vastagbélben

6. Mi történhetett az alábbi ábra alapján?



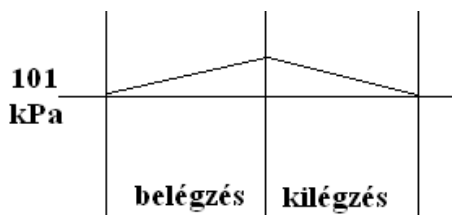
- A. egy embert 15 °C-ra tettek
- B. egy embert 40 °C-ra tettek
- C. egy fürge gyíkot 15 °C-ra tettek
- D. egy fürge gyíkot 40 °C-ra tettek

7. Melyik tüdő félre jut leginkább a félrenyelt falat: a jobb vagy baloldalra? Válaszod indokold!

8. Egy fiatal fiú elhatározza, hogy a bűvárszipkáját 3,2 méteresre növeli, hogy 3 méterrel a vízfelszín alatt tudja figyelni a tenger élővilágát. Milyen problémára hívnád fel a figyelmét a légzés szempontjából?

9. Az alábbi diagram egy élőlény tüdejében végbemenő nyomásváltozásokat mutatja. Melyikét?

- A. fűrgye gyík
- B. gyepi béka
- C. kardszárnyú delfin
- D. kiskócsag
- E. indiai elefánt



10. Tekintse meg az alábbi táblázatot és válassza ki melyik állat jellemzőit tartalmazza!

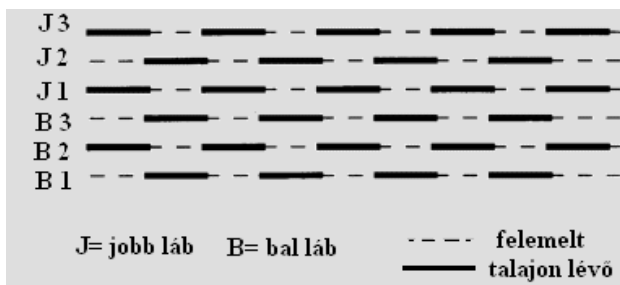
Hajszálér	Ereiben oxigénkötő fém-tartalmú fehérje	Kitin az élőlényben	Héj- vagy csápmirigy	Belső váz
nincs	van	van	nincs	nincs

- A. éti csiga
- B. havasi cincér
- C. közönséges földigiliszta
- D. folyami rák
- E. közönséges tintahal

11. Melyik élőlény esetében nem játszanak szerepet a bordaközi izmok a légzési folyamatában?

- A. mocsári teknős
- B. fűrgye gyík
- C. balkáni gerle
- D. erdei pinty
- E. üregi nyúl

12. Az alábbi diagram egy rovar mozgásmintázatát mutatja be. Milyen következtetést vonhatunk le az ábra alapján?



- A. Mindig egy lábát emeli, egyik oldalon a páratlan számúakat a másik oldalon a párosakat, majd fordítva
- B. Három lábát rakja le egyszerre és mind a három tolja
- C. Három lábát rakja le egyszerre és mind a három húzza
- D. Három lábát rakja le egyszerre, egy húzza, egy tolja, egy pedig tengelyként működik
- E. Felváltva rakja le a lábait és nincs olyan pillanat, amikor minden lába a talajon van

13. Melyik élőlénynek legnagyobb a fajlagos N vesztesége a húgysavval?

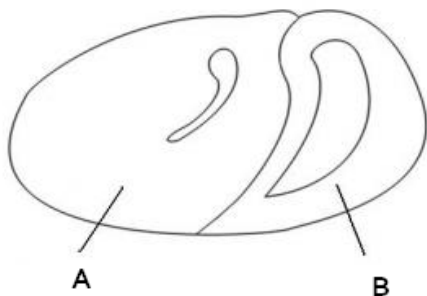
- A. Nyest
- B. Macskacápa
- C. Lazac
- D. Ezüstsirály
- E. Ember

14. Miért csökken a vérnyomás a nagyvérkörben folyamatosan, még az azonos átmérőjű erek mentén is, noha ez a Bernoulli törvényből nem következik?

Bernoulli törvényében a mechanikai energia-megmaradás törvénye érvényesül:

$p + \rho \cdot g \cdot h + 0,5 \cdot \rho \cdot v^2 = \text{konst.}$ (ahol p = sztatikai nyomás, $\rho \cdot g \cdot h$ = hidrosztatikai nyomás, $0,5 \cdot \rho \cdot v^2$ = dinamikai nyomás).

15. Az alábbi ábra a zsiráf szívének keresztmetszeti képét mutatja. A szív mely részeit jelöli A és B? Válaszod indokold!

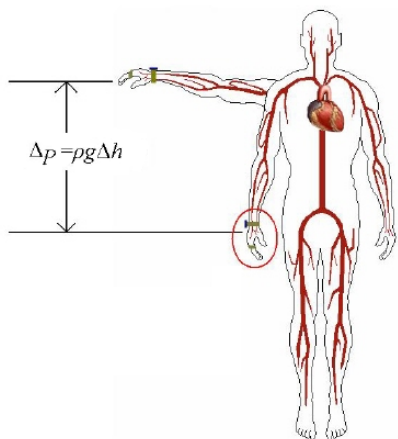


A:
 B:

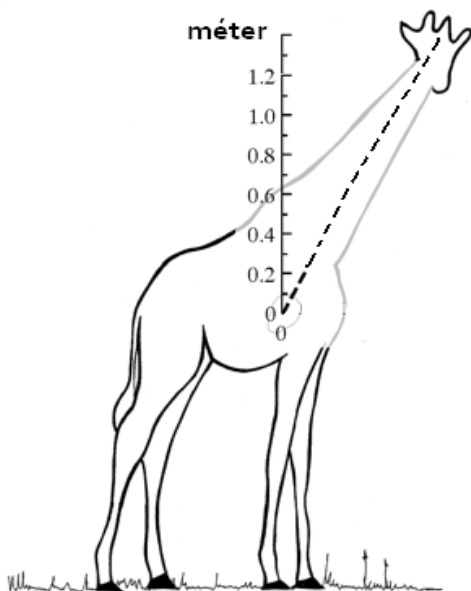
A hidrosztatikai nyomás a lefelé irányuló véráram nyomását növeli, a felfelé irányulóét csökkenti. Ezt a hatást egészséges emberben szabályozási mechanizmusok kompenzálják.

16. Egy egészséges emberben a hirtelen felállás hatására hány Hgmm-t esne a vérnyomás a fej területén? Normál (átlagos) vérnyomásérték 120/80 (Hgmm).

(Segítség és adatok: a vér sűrűsége $1,055 \text{ kg/m}^3$, gravitációs gyorsulás értéke $9,81 \text{ m/s}^2$, Δh a szív és a szerv távolsága, Δp a hidrosztatikai nyomásváltozás).



17. Mekkora a vérnyomása ennek a zsiráfnak?



18. Mennyi lenne ez az érték, ha a zsiráf lehajol füvet enni?

19. A kiszámított helyes érték mellett a zsiráf egyes erei megrepednének. Adj egy hipotézist, hogy ez miért nem történik ez meg. Ellenőrizd szakcikkkel a hipotézisedet!

Adott egy populáció és tekintsük a következő populációdinamikában használatos egyenletet:

$$N'(t) = r \cdot N(t) \cdot \frac{K - N(t)}{K}$$

Ahol $N(t)$: a faj egyedszáma a t időpillanatban

N' : a növekedési sebesség

r : a populáció növekedési rátája

K : a környezet eltartó képessége

20. Mit fejez ki az egyenlet jobb oldalán található tört $(K - N(t) / K)$?

- A. A bevándorolt egyedek számát
- B. A kivándorolt egyedek számát
- C. A környezet eltartó képességének ki nem használt részét
- D. A környezet eltartó képességének növekedését
- E. A környezet eltartó képességének csökkenését

21. Tekintsünk egy ritka 5 tagú táplálkozási láncot! Az első tag a termelő szervezet, a következő a fogyasztó és a fogyasztó mindig csak a láncsorozatban előzőt fogyasztja.

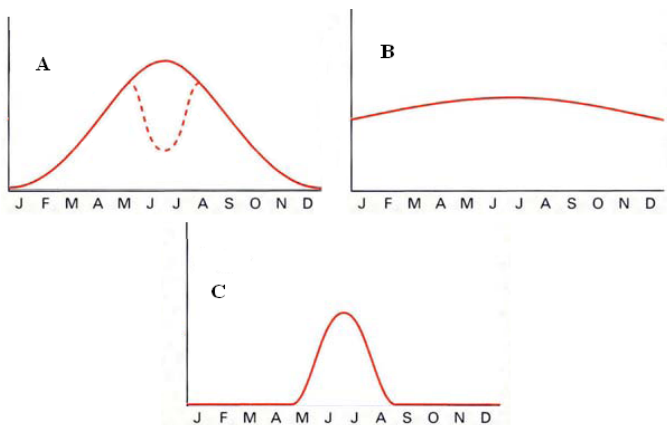
Mekkora tömegű nettó primer produkció (kg/területegység) felel meg a lánc utolsó tag 1 kg-jának?

- A. kb. 50 kg
- B. kb 100 kg
- C. kb. 1000 kg
- D. kb.10 tonna
- E. kb. 100 tonna

22. Feltételezzük, hogy egy populáció exponenciális függvénnyel leírható növekedést mutat. Ha egy populáció létszáma 10 000-ről 20 000-re 1 év alatt növekszik meg, akkor mennyi idő alatt nő meg 20 000-ről 40 000-re?

- A. 0.5 év
- B. 1 év
- C. 2 év
- D. 4 év
- E. Egyik sem

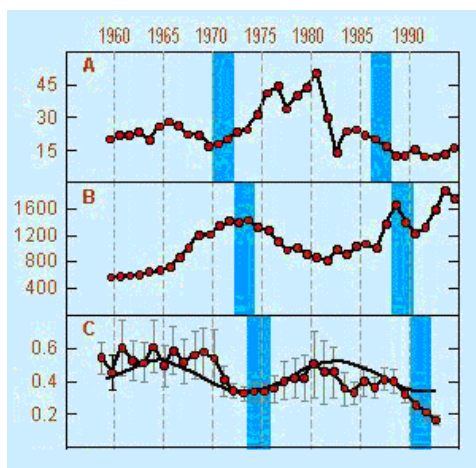
Tekintse meg az alábbi diagramokat, amelyek egy adott éghajlati övezet adott területének nettó primer produkciójának (kg/területegység) eloszlását mutatja éves szinten.



23. Mi mutatja megfelelően az eloszlásokat?

- A. arktikus (A), északi mérsékelt (B), trópusi (C)
- B. arktikus (A), déli mérsékelt (B), trópusi (C)
- C. trópusi (A), arktikus (B), északi mérsékelt (C)
- D. északi mérsékelt (A), trópusi (B), arktikus (C)
- E. déli mérsékelt (A), trópusi (B), arktikus (C)

Egy érdekes tanulmány a Royal szigeten élő szürke farkasok számának (A), jávorszarvasok számának (B) és a növényi produkció (C, balsamfenyő) változását mutatja be.



24. Melyik **nem** következik az grafikonok adataiból?

- A. A jávorszarvasok számának növekedése után csökken a primer produkció
- B. A primer produkció növekedése után nő a jávorszarvasok száma
- C. A farkas állomány növekedését követően csökken a szarvasok száma
- D. A szarvaspopuláció növekedése után nő a farkasok száma
- E. A farkasok számának változása befolyásolja a primer produkció mennyiségét

Fizika

Bevezető

A természettudományos gondolkodás, ezen belül a fizikus világlátása, hasznos és gyorsan megtérülő képességek halmazát jelenti nemcsak a tudományos kutatásban, hanem a mindennapi életben is. A minket körülvevő világot értelmezzük, folyamatait modellezzük, kapcsolatait absztrakt módon leképezzük annak érdekében, hogy megértsük működését, s jóslatokat adjunk a jövőre vonatkozóan. Ha valaki képes arra, hogy a természeti és társadalmi változásokat előre jelezze, magabiztosan tud mozogni ebben a világban, hatékony lesz a problémamegoldásban, sikeres emberként fogja leélni életét, foglalkozzon bármivel. Mi kell mindehhez? Az elvont gondolkodás és a gyakorlatorientáltság megfelelő ötvözete, a bevett eljárások, megoldásmódok ismerete mellet az a képesség, hogy a dolgokat tudjuk a megszokottól eltérő módon szemlélni. Ezek az adottságok a sikeres fizikusok nélkülözhetetlen tulajdonságai. Feladatlapjaimban ezen képességek fejlesztését tűztem ki célul.

A feladatlapok megoldása során fokozatosan nehezedő utat járatsz be. Ezen az úton rávezető kérdések, segítő információk vezetnek előre. A nagyobb sorszámok felé haladva a feladatlapok egyre nehezebbekké válnak, egyre absztraktabb gondolkodásra készítetnek, de magasabb matematikát nem igényelnek sehol sem. A nagyobb sorszámú feladatlapok olykor felhasználják a kisebb sorszámúak anyagát, tehát alapvetően a sorszámok sorrendjében érdemes az anyaggal való foglalkozást megkezdeni, de egy-egy érdekesebb téma kedvéért lehet sorrendi ugrásokat is tenni.

Ha röviden össze kellene foglalnom a fizika feladatlapokban megfogalmazott legfontosabb gondolatot, akkor az a következőképpen szólna:

Minden sokféleképpen végiggondolható, hiszen „*egy a valóság, s ezer a ruhája*”, s mivel az ember, a megismerő nem függetlenítheti magát a megismerés tárgyától, nyugodtan kijelenthetjük: MINDEN NÉZŐPONT KÉRDÉSE!



Térlátás, térhatású kép

Első feladatlapunk a térlátás kérdésével foglalkozik. A térlátás elvét megismerve azt vizsgáljuk, milyen technikai megoldásokkal érhető el, hogy térhatású képet állítsunk elő.

Eötvös Loránd

Egyetemista koromban egyszer egy terepgyakorlaton vettem részt a Balaton mellett. Bázisunk a Geofizikai Intézet Eötvös Lorándról elnevezett kutatóháza volt. Hogy a helyet nem csak a név köti a híres magyar fizikushoz, akkor vált világossá számomra, amikor az ágyakat akartuk elosztani. Tízen voltunk hallgatók: kilenc fiú, egy lány. Az apró épületben lány csoporttársunknak már csak az Eötvös emlékszobában jutott hely, Eötvös ágyába feküdhett. A szobában megtaláltuk Eötvös kedvenc tárgyait is. Engem különösen az a sztereónézője ragadott meg, mellyel a hegymászásai során készített „3D”-s felvételeit nézegette. A képet kétlencsés fényképezőgéppel készítette. A kettős lencse a két szem által látott képnek megfelelő két felvételt készített. A mikroszkóphoz hasonlatos sztereónézőn keresztül a két képet egyszerre szemlélhettük. Így jött létre a térbeliség illúziója. Azóta sok idő telt el. A 3D-s vetítés elterjedőben van mindenütt. Az alkalmazott trükkök sokat változtak, de a megoldás lényege semmit sem.



A térlátás lényege

A két szemünk ugyanazt a tárgyat kissé eltérő szögben látja, így a két szemből eltérő információk jutnak a tárgyról az agyba. Agyunk értelmezi ezt az eltérést, s ebből következtet a tárgyaknak vagy a tárgyak egyes pontjainak szemeinktől vett távolságára.



1. Hol van az Eötvös Emlékmúzeum a Balaton mellett?
2. Mi volt az a Balatonnal kapcsolatos kutatás, amelyben Eötvös Loránd részt vett, milyen általa tervezett eszközt próbált ki ekkor, s milyen eredménnyel?
3. Eötvös kedvenc hegynyelvéén csúcs is őrzí a nevét. Milyen magas ez a csúcs és hol található?
4. Eötvös lányai a női hegymászás első nagyjai voltak. Hogy hívták őket?

Csillagászati távolságok

Ha egy távoli csillagot figyelünk meg, akkor annak iránya a Földről nézve nem változik észrevehetően egy év során. Pedig máshonnan nézzük télen és máshonnan nyáron, hiszen a Föld a Nap körüli pályáján fél év alatt átkerül a pálya átellenes pontjába. Mivel a pálya hozzávetőlegesen 150 000 000 km sugarú kör, ezért a Föld elmozdulása 300 000 000 km, a nagyon távoli állócsilla-gokhoz képest.

A parszek (parallaxis secundum) egy csillagászatban használatos távolságegység. Ha egy csillag tőlünk egy parszek távolságra van az ekliptika síkjára körülbelül merőleges irányban, akkor a Föld pályasugara a csillagról nézve 1szögmásodperc alatt látszik. Tehát egy ilyen csillag „nincs nagyon messze” tőlünk, hiszen elmozdulni látszik a távoli állócsillagokhoz képest.

5. A szöveg alapján készíts vázlatrajzot a *parszek* értelmezésének bemutatására!
6. Magyarázd el, hogyan lehet ezt a távolságot meghatározni számítással vagy esetleg szerkesztéssel!
7. Egy parszek 3,26156 fényév. Váltsd át ezt az értéket km-be és csillagászati egységbe (CSE)! A fényév és a csillagászati egység fogalmát keresd meg a weben!



Merre néz a két szemünk?

Vizsgáld meg az ábrán látható két pontot ellazított szemmel!

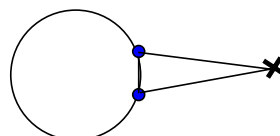


8. Milyen messze kell tartanod a papírt a szemedtől, hogy a két pontot 3-nak lássad?
9. Hogyan alakul ez a távolság, amikor a két pontot négynek látod?
10. Hogyan befolyásolja a pontok kölcsönös helyzetét a papír szemeidtől vett távolsága, illetve az, ha elforgatod a fejed, azaz nem a szemeidet összekötő egyenessel párhuzamos a két pöttyöt összekötő szakasz?
11. Magyarázd el, miért következik be a jelenség!
12. A tűzérségi távcső két szemhez tartozó optikája jóval messzebb van egymástól, mint a két szemünk. Miért alkalmazták ezt a megoldást?



Milyen messze van?

13. Milyen messze van a szemeidtől egy tárgy azon pontja, amelyről az egyik, illetve másik szemedbe érkező fénysugarak 80 fokos szöget zárnak be a szemeidet összekötő szakasszal (azaz 20 fokos szöget zárnak be egymással)?

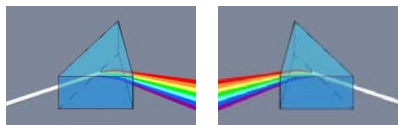


Két szemed távolságát méréssel állapítsd meg, a számítás/szerkesztés menetét rögzítsd!

A kék pöttyök szemeink helyzetét mutatják, a kereszt a vizsgált pontot jelzi. Az ábrán látható egyenlő szárú háromszög alapja a két szemünk távolságával egyenlő, alapon fekvő szögei 80 fokosak.

A színek világa

Newton híres kísérletében egy prizma segítségével összetevőire bontotta a fehér fényt.



14. Magyarázd el, miért bontja a prizma összetevőire a fehér fényt!

Az ábrapár bal oldali ábrájából tükrözéssel állítottuk elő a jobb oldali ábrát.

15. Mit mutat a két ábra, s milyen elv alapján állíthatjuk, hogy mindkét ábra megfelel a valóságnak?

16. Milyen fizikai tulajdonságukban térnek el a fehér fény különböző színű összetevői?

17. Mit jelent a kiegészítő szín fogalma?

18. Nevez meg kiegészítő színpárokat!



Térlátás színszűrőkkel – az anaglyph (anaglif) képek

<http://www.youtube.com/watch?v=pVAoUhp-doE>

A bal és a jobb szem az ábrán látható szemüveg révén más képet lát, amennyiben a fényképet vagy a csatolt link alatt lévő videót a képen látható szemüveggel nézzük.



19. Mi a magyarázata az eltérő látványnak?

20. A bal szemem van a piros szemüveglencse. Melyik részét látja ez a szem a képnek? A pirosat vagy a kékét?

A válaszodat indokold!

21. Hogyan lehet ilyen képet elkészíteni? Nézz utána a weben!



Aktív szemüveg

Ma már tudnak olyan szemüveget készíteni, mely összehangolható egy kivetítővel. Így megvalósítható, hogy amikor a bal szemnek szánt képet vetíti a kivetítő, akkor csak a bal szemünkön lévő „üveg” ereszti át a fényt, s amikor a jobb szemnek szánt kép látszik a kivetítővászonon, akkor a jobb szemünk számára lesz a szemüveg áteresztő. A tévé 120 Hz frekvenciával frissíti a képeket, így a bal és jobb szemünk másodpercenként 60-60 képet lát. Mivel az agyunk a képeket nem folytonosan dolgozza fel (a mozgást állóképek összességeként értelmezzük), a kellő gyakorisággal szemeink elé vetített váltakozó képek sorozata folyamatos látásélményt kelt.



22. Mit jelent a Hz mértékegység, s honnan kapta a nevét?
23. Másodpercenként hányszor sötétül el az aktív szemüveg egy lenszéje, ha a tévé képfrissítési üteme 120 Hz?

A polarizációs megoldás

A fény transzverzális hullám, így polarizálható. A polarizációs megoldás lényege, amelyet például az IMAX mozikban használnak, hogy a bal és a jobb szemnek szánt képek síkban polarizáltak, de a polarizációs síkjuk egymásra merőleges. Az alkalmazott szemüveg lenszéi polarizátorok, melyek úgy vannak beállítva, hogy csak a megfelelő szemnek szánt képet lássák. A polarizátoron nem megy át a hullám, ha a polarizátor polarizációs síkja merőleges a hullám polarizációs síkjára.



24. Mit jelent, hogy a fény transzverzális hullám, s ez hogyan függ össze a fény polarizálhatóságával?
25. Hogyan lehet polarizált fényt létrehozni? Hol találkozhatunk polarizált fénnel a természetben? Mit jelent, hogy a fény síkban polarizált?
26. Hogyan történik ebben az esetben a két szemnek szánt eltérő kép szétválasztása?
27. Mi történik akkor, ha a fenti elv alapján készült térhatású filmet nézve fejünket egy kicsit elforgatjuk (elbillentjük)? Válaszodat indokold!

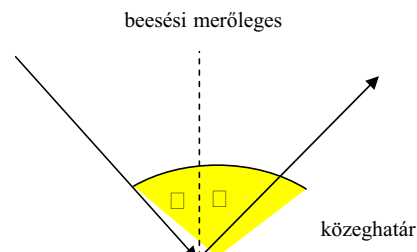
Megoldások, eredmények

- 5) ld. ábra.
- 6) $1 \text{ parszek} = \approx 3,0877 \cdot 10^{13} \text{ km} \approx 206400 \text{ CSE.}$
- 12) A térlátásban segít.
- 13) Ha d a két szem távolsága és h a pont merőleges távolsága a szemeink síkjától:
$$\frac{d/2}{h} = \text{tg}40^\circ$$
- 14) Más a törésmutatója a különböző frekvenciájú összetevőkre. (Más a különböző frekvenciájú összetevők terjedési sebessége a prizmban.)
- 15) A fehér fény színekre bontható, majd prizmával újra fehér fénné egyesíthető. A fény útja megfordítható.
- 16) Frekvenciájukban térnek el.
- 17) Az alapszín és a kiegészítő szín összeadó színkeverés esetén együtt fehéret ad.
- 19) A szemüvegen keresztül az egyik szemünk csak a piros vonalat, a másik csak a kéket látja.
- 20) A piros szemüveggel a kék képet látjuk.
- 22) 1/s – Gustav Hertz német fizikusról.
- 23) 60-szor.
- 24) A hullámtér pontjainak rezgésiránya merőleges a hullám terjedési irányára. Csak a transzverzális hullám polarizálható.
- 25) Polárszűrővel polarizálható a fény. Pl.: a tükröző felületekről visszaverődő fény részben vagy egészben poláros. A síkban polarizált fény terjedése során egy a terjedési irányra merőleges rezgési síkot tüntet ki.
- 26) Rezgési sík szerint.
- 27) Életlen lesz a kép, mert a fejünkkel együtt a szemüveglencsék polarizációs síkja is elfordul.

A fény visszaverődésének törvénye és a Fermat-elv

Néha a megszokottól eltérő megközelítése a dolgoknak meglepően hatékony eljárásokat eredményezhet. Egy ilyen megközelítés a geometriai optikában a Fermat-elv.

A geometriai optika leírása szerint a fény egyenes vonalban terjedő sugárként modellezhető. A fény visszaverődésének ismert törvényét az alábbi ábra mutatja be. A beeső és a visszavert fénysugár azonos szöget zár be a beesési merőlegessel, azaz $\alpha = \beta$.



A fény visszaverődésének törvénye

A Fermat-elv

Pierre Fermat francia matematikus 1657-ben megfogalmazott egy általános elvet, amely a geometriai optika összes ismert törvényével összhangban van. A törvényeket ebből az elvből – a Fermat-elvből – is le lehet vezetni.

A Fermat-elv lényege, hogy a fény két pont között mindig úgy halad, hogy leghamarabb célba érjen. Az elv azonban nem magyarázat, hanem egy megállapítás. Miért pont a Fermat-elvnek megfelelően halad a fény? A fény nem választ, nem gondolkodik. Honnan „tudja”, merre kell mennie?

Érdekes és általánosítható gondolat, hogy egy valóságban ténylegesen megfigyelhető folyamatot úgy értelmezzünk, hogy az az összes számba vehető lehetőség közül az egyik, valamilyen szempontból kitüntetett, különleges, optimális változat.



A kosárlabdázó elhajítja a labdát adott irányba, adott sebességgel, a labda pedig pont belehullik a kosárba. De vajon milyen pályán halad elhajítás után a kosárig? Korábbi tanulmányaink alapján tudjuk persze, hogy a labda parabolapályán halad. De vajon van-e valami szempont, mely szerint a valóság (a parabolapálya) az összes lehetséges pálya közül az optimális? Van-e szempont, amely szerint jobb, mint például egy két egyenesből és egy rövid derékszögű kanyarból összetett pálya, mely szintén a kosárhoz vezet? A válasz egyértelmű igen. A Fermat-elv és általánosítása új megközelítést adja a fizikai törvények keresésének.

Ha a Fermat-elv érvényességének okát nem keressük, akkor is kihasználhatjuk egyszerűségét, s a fényre vonatkozó ismereteinket elegánsan táגיthatjuk segítségével.

Ha a fény egy adott közegben halad, nem lép ki belőle, s így a sebessége nem változik, akkor a legrövidebb idő elve nyilván a legrövidebb út elvével azonos.

A fény két pont között a legrövidebb úton halad, ha nem változik a sebessége (és nincs akadály, ami eltérítse, pl.: egy tükör) — ez pedig az egyenes út.

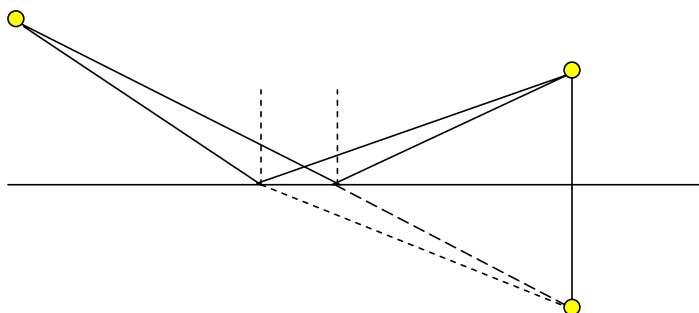
A fény egyenes vonalú terjedése tehát összhangban van a legrövidebb út elvével.

A fény, átlépve egy másik közegbe, azért törik meg, mert változik a sebessége. A törés mértéke nem független ettől a sebességváltozástól.

A Fermat-elv szemléltetése a fény visszaverődésének törvénye kapcsán, avagy a teve és a folyó problémája

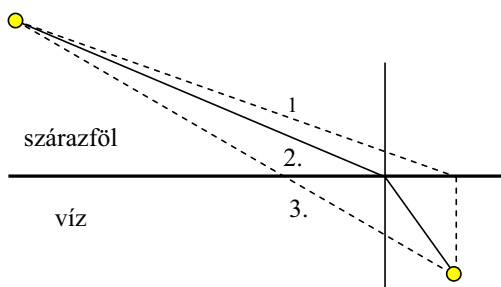
A szomjas teve, bár szeretné mihamarabb elérni úti célját, csak úgy juthat el a kiindulási ponttól odáig, ha közben érinti a folyót, hogy ihasson.

1. Egészítsd ki és értelmezd az ábrát, s magyarázd el, hogyan függ össze a Fermat-elvvel! Hogyan értelmezhető a Fermat-elv segítségével a fény visszaverődésének törvénye?



Az elvet Fermat a fény törését leíró Snellius—Desartes-törvény kapcsán fogalmazta meg. Ábránk a fény törését is mutathatja, de az is lehet, hogy a tengerpartot ábrázolja: a felső tartományban a sárga pont egy úszómester napernyőjének helye, az alsó sárga pontban pedig valaki fuldoklik.

Merre szaladjon az úszómester, ha meglátja a fuldoklót? Melyik utat válassza? Melyik úton ér leghamarabb célba? Az úszómester a parton vagy a tengerben halad gyorsabban, ha a 2-es úton ér leggyorsabban a fuldoklóhoz? Milyen érv szól a másik két út választása mellett, s mi szól ellene?

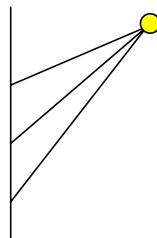


2. Elemezd a történetet!

A gömbtükörök leképezése

Egy tükör valódi képet hoz létre, ha egy tárgy tetszőleges pontjáról kiinduló fénysugarakat a tükör egy pontba gyűjti össze. Ha erre a helyre egy ernyőt teszünk, a pont képe felfogható.

3. Mutasd meg a fény visszaverődésének törvénye segítségével, hogy egy siktükör nem hoz létre valódi képet, azaz az egy pontból kiinduló fénysugarak egy siktükörről visszaverődve nem találkoznak egy pontban.



Következő rajzunkon az „O” pont a homorú gömbtükör középpontja. (Ez azt jelenti, hogy egy gömbfelületet használunk tükör gyanánt, melynek homorú oldala tükröz.)

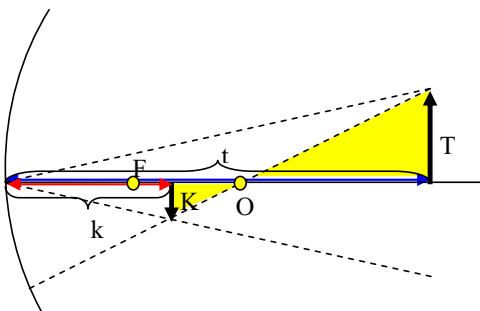
A homorú gömbtükör jó közelítéssel valóban valódi képet hoz létre. Ez kipróbálható akár egy kanál segítségével is.

4. Vetítsd egy kanál segítségével a gyertyaláng képét a falra! Készíts vázlatrajzot, mely bemutatja az elrendezés geometriáját!

Ha véletlen akad otthon gömbtükör, kanál helyett az is megfelel! ☺

A tárgy képét egy pontjának leképezésével szerkesztettük meg, néhány könnyen azonosítható sugármenetet felhasználva. Abból a (helyes) feltevésből indultunk ki, hogy egy függőleges helyzetű tárgy képe is függőleges helyzetű lesz.

A T tárgy K képét két jellegzetes sugármenet segítségével szerkesztettük meg. Az egyik a gömbtükör és az optikai tengely metszéspontjába tartó és az optikai tengelyre szimmetrikusan visszaverődő fénysugár, a másik az origón átmenő, ezért a gömbtükör felületére merőlegesen beérkező, s így önmagába visszaverődő fénysugár. A gömbtükör sugara r , középpontja O pont. A tárgy távolsága a tükörtől t , a kép távolsága k .



5. Az ábrán jelölt sárga háromszögek hasonlóságát felhasználva igazold, hogy:

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

Amennyiben érvényes az a megállapítás, hogy a homorú gömbtükör az optikai tengelyével párhuzamos sugarakat az úgynevezett fókuszpontba (F) gyűjti össze, ahol F távolsága a tükörtől az optikai tengely mentén $f = \frac{r}{2}$, a fenti összefüggés a következő alakot veszi fel:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$. Ez a gömbtükörök leképezési törvénye. Az összefüggés a domború gömbtükör és a lencsék leképezésére is igaz.

Fókuszálja-e valóban a gömbtükör az optikai tengellyel párhuzamos sugarakat?

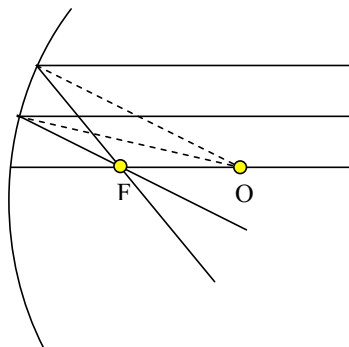
A homorú gömbtükör a közvélekedés szerint fókuszálja a fényt. Legalábbis így tanítjuk. Ez azt jelenti, hogy a szimmetriatengelyével (optikai tengely) párhuzamos sugarakat egy pontba gyűjti. Ez valóban pontosan így van?

Az ábra segítségével igazoljuk, hogy amennyiben a gömbtükör az optikai tengellyel párhuzamos fénysugarakat az $f = \frac{r}{2}$ távolságra lévő F fókuszba gyűjti, akkor az F ponttól a tükör pontjai rendre $\frac{r}{2}$ távolságban

vannak, vagyis ugyanannak a körnek a pontjai egyszerre helyezkednek el egy O középponttól r távolságra, s egy F középponttól $\frac{r}{2}$ távolságra, ami lehetetlen!

Azaz a gömbtükör nem gyűjtheti az optikai tengellyel párhuzamos sugarakat az F pontba.

Feltételeztük, hogy a gömbtükör fókuszálja az optikai tengellyel párhuzamos sugarakat. Bebizonyítottuk, hogy feltevésünk logikai lehetetlenségre vezet. Így a feltevés nem igaz. Ezt az eljárást hívják *indirekt bizonyításnak*.



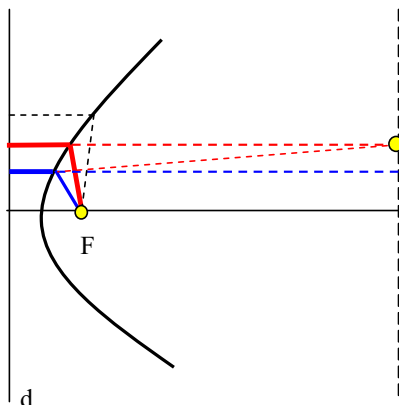
És a parabolatükör...

Ma már minden épületen van parabolaantenna, amely a távoli műholdak jeleit gyűjti össze. Ennek alapján nem meglepő az a kijelentés, hogy a párhuzamos sugarakat a parabolatükör, illetve antenna fókuszálja.

6. Az ábra segítségével és a Fermat-elvet felhasználva igazold, hogy egy parabolatükörrel szemközt tetszőleges „P” pontból a tükör érintésével a fókuszba tartó fénysugár a legrövidebb úton akkor halad, ha az optikai tengellyel párhuzamosan közelíti meg a tükröt!

A bizonyításhoz használd fel a parabola alábbi definícióját:

A parabola azon pontok halmaza (mértani helye), melyek egy „F” ponttól és egy „d” egyenestől azonos távolságra esnek.

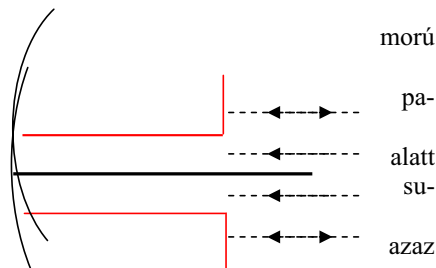


7. Elemezd, hogy a fenti bizonyítás mennyiben igazolja azt az állítást, hogy a parabolatükör az optikai tengelyével párhuzamos sugarakat fókuszálja?

A gömbtükör nem fókuszál, de használjuk...

Mennyiben, milyen mértékben fókuszálja a homogömbtükör a párhuzamos sugarakat?

Annyiban, amennyiben a homorú gömbtükör egy parabolatükrökhöz hasonlít. A hasonlóság az optikai tengely közelében nyilvánvaló. A tengely felett és a két tükör igencsak eltér egymástól. Az itt haladó sugarak a gömbtükör esetében gömbi torzulást (szférikus aberrációt) okoznak a keletkező képen, rontják a kép élességét. Ha csökkenteni akarjuk a torzítást, akkor szűrni kell az optikai tengelytől távol eső sugarakat! Meg kell akadályozni, hogy elérjék a tükröt!



8. Ha a gömbtükör torzít, miért gyártanak gömbtükröket? Miért nem csak parabolatükröket használunk?

Ferde hajítás másképpen

Galilei fogalmazta meg azt az állítást, hogy *a természet nagy könyve a matematika nyelvén íródott*. De mit jelent ez? A fizikai problémák megoldásában egészen a XIX. századig elsődlegesen geometriai eljárásokat alkalmaztak. Sokszor nehéz meghatározni egy fizikai probléma megoldása kapcsán, hogy a geometriai eljárás lépései hogyan felelnek meg a mai, algebrai módszereinknek. Pedig aki ismeri a „szótárt”, érdekes új ötletek birtokába juthat.



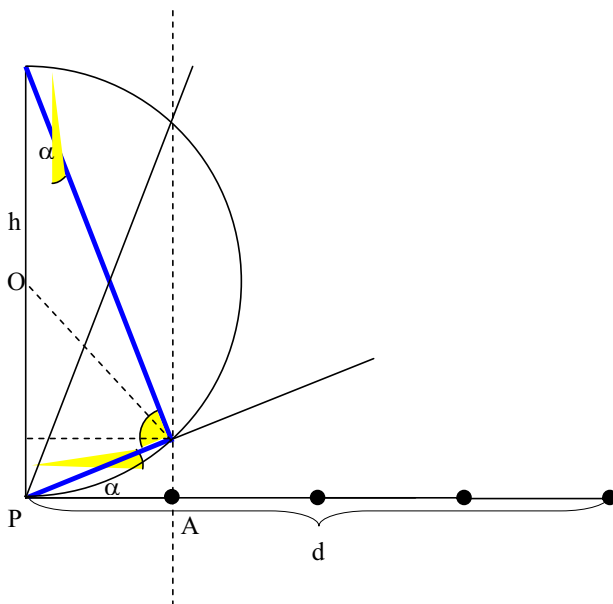
Makó Pál, a jeles XVIII. századi magyar fizikus leírása alapján bepillantunk a geometria ezen szokatlan alkalmazásának területére, s feltárjuk, hogy az ajánlott lépések miért működnek.

v kezdősebességgel α hajlásszögben elhajított test repülési távolságának meghatározása szerkesztéssel

A szerkesztés lépései:

1. Vizsgáld meg, milyen magasra emelkedne fel a test, ha függőlegesen hajítod el (h)!
2. Vegyél fel egy h hosszúságú (értelemszerűen azzal arányos) függőleges szakaszt!
3. Állíts rá egy merőleget az alsó pontjából!
4. A függőlegesre, mint átmérőre, állíts kört a merőleges oldalán!
5. A két szakasz metszéspontjából mérd rá a vízszintesre a hajítás szögét, s húzz egy egyenest!
6. A kör és az egyenes metszéspontjából állíts merőleget a vízszintesre!
7. Az így keletkező két párhuzamos egyenes távolságának négyszerese az elhajított test repülési távolsága.

A Makó-féle eljárás helyességének igazolása során alkalmazott szerkesztést felhasználjuk egy ismert trigonometriai összefüggés bizonyítására.

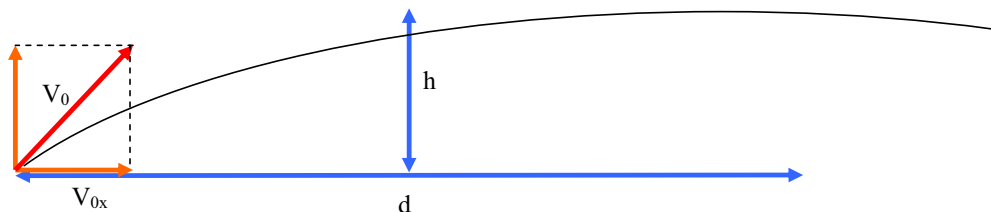


1. Az ábra felhasználásával igazold az ismert trigonometrikus összefüggést:

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

2. Makó Pál szerkesztésének igazolása

- Igazold, hogy $\overline{PA} = h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$!
- Írd fel d értékét a szerkesztés alapján!
- Határozd meg d értékét a jelenleg használt fizikai elvek és eljárások alapján, a ferde hajtást összetett mozgásként értelmezve!



- Mutasd meg a két eredmény azonosságát!

Ha egy adott kezdősebességgel ferdén elhajítunk egy testet, általában két olyan összetartozó hajtási irányt (hajlásszöget) találunk, amely esetén a test azonos távolságra jut el.

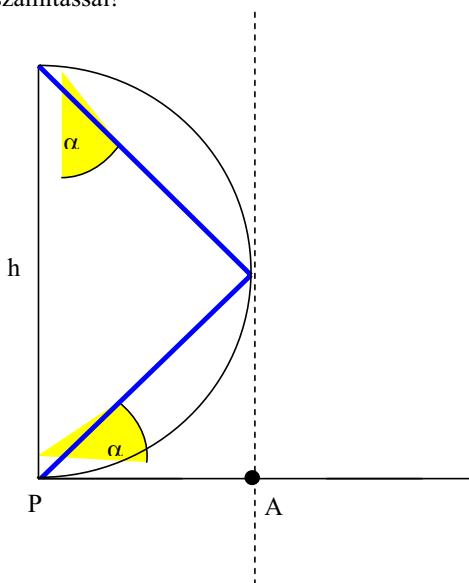
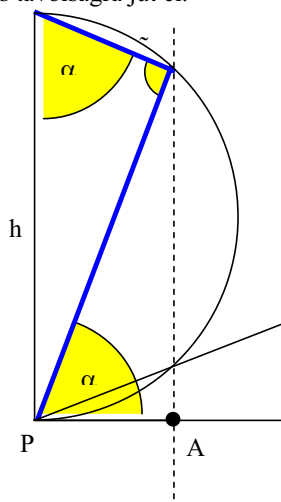
3. Milyen összetartozó szögpárokra érvényes az állítás?

4. Igazold — a szerkesztés alapján vagy a klasszikus levezetést felhasználva — a szögpárok közötti összefüggést!

- $\overline{PA} = h \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha$

5. Milyen irányba kell a testet elhajítani, hogy a legmesszebb repüljön? Mekkora lesz ez a távolág?

Állításodat igazold Makó Pál szerkesztésével, majd számítsd!



Makó Pál egy fontos munkájában a villámokkal foglalkozott.

6. Mi volt munkájának címe?
7. Hol és mikor jelent meg először?
8. Milyen címen és kinek a fordításában jelent meg magyarul?
9. Ez mikor történt és hol adták ki a könyv magyar fordítását?

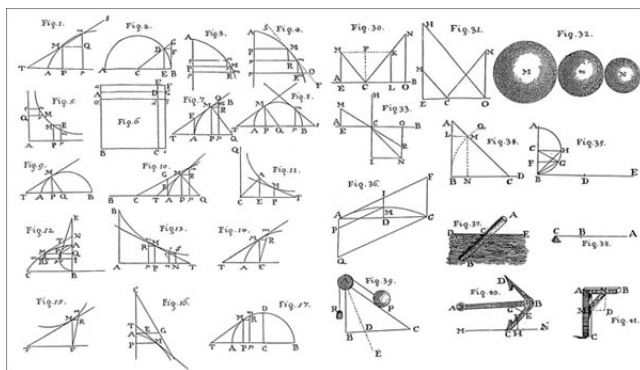
Az alábbi feladatok megoldására Makó Pál stílusában add meg a szerkesztési algoritmust!

10. Milyen irányba kell elhajítani egy v_0 kezdősebességű testet, hogy d távolságra repüljön el?

Legyen $v_0 = 10 \text{ m/s}$; $d = 8 \text{ m}$

11. Mekkora kezdősebességgel dobjunk el egy testet, hogy vízszintes talajon α szögben elhajítva éppen d távolságra érjen talajt?

$\alpha = 35^\circ$; $d = 10 \text{ m}$.



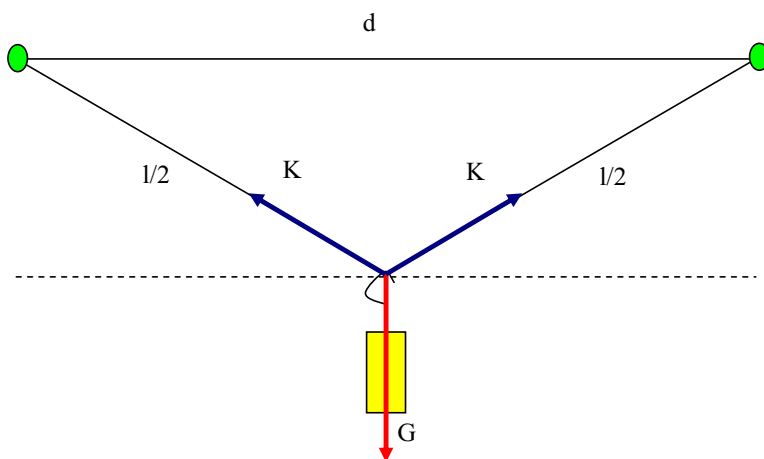
Ábralap Makó Pál egyik tankönyvéből

Statika: a kötélben ébredő erő

Látszólag egy egyszerű statika feladat egyre bonyolódó változatait nézzük végig. Közben ki fog derülni, hogy mindez másra is jó, mind a fizikában, mind a matematikában.

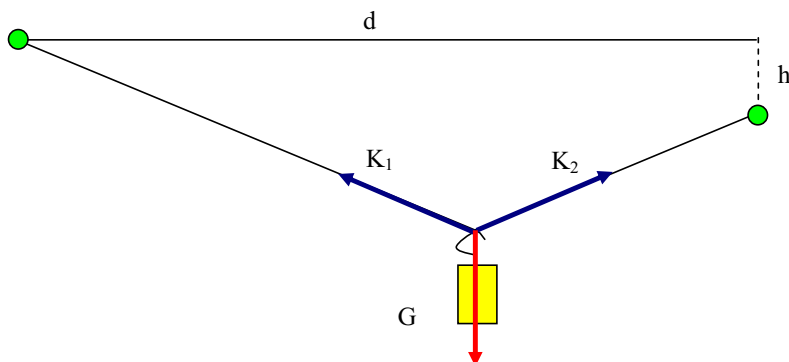
A feladatok megoldásának logikája egy matematikus szemszögéből meglehetősen furcsa bizonyításhoz vezet egy nem éppen könnyű matematikai tétel esetében.

Egymástól d távolságra, azonos magasságban rögzítjük egy l hosszúságú kötélt két végét ($l > d$). A kötéltre egy a kötélen könnyen csúszó kámpó segítségével m tömegű testet akasztunk. Hol fog elhelyezkedni a test? Mekkora erő ébred a kötélben?



1. Határozd meg a K erő nagyságát, amennyiben $d = 4$ m; $l = 5$ m; $G = 10$ N.
2. Mekkora a K erő, ha a kötélt a vízszintessel 30° -os szöget zár be?

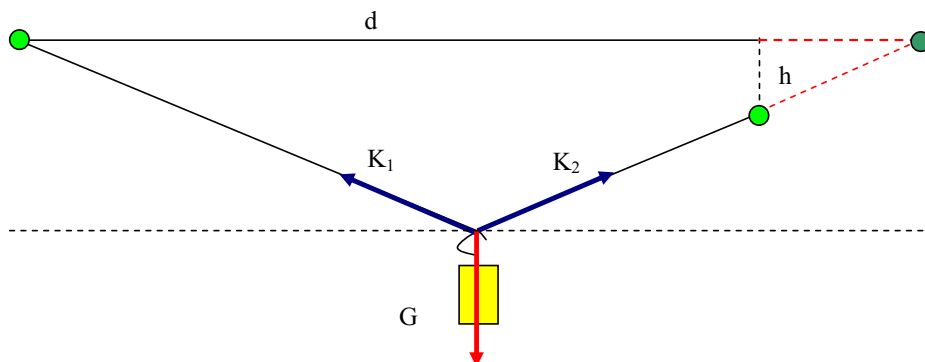
A feladat lényegesen nehezebbé válik, ha a kötélt rögzítései nem azonos magasságban vannak. Ábránkon a jobb oldali rögzítési pont került lejjebb.



Most az elsődleges nehézséget a vízszintessel bezárt szögek meghatározása jelenti.

3. Vajon mit állíthatunk K_1 és K_2 viszonyáról? S mi következik ebből a kötélszárak vízszintessel bezárt szögeinek viszonyára? Válaszodat indokold!

A válasz megadásában és a megfelelő indoklás megtalálásában segít az ábra.



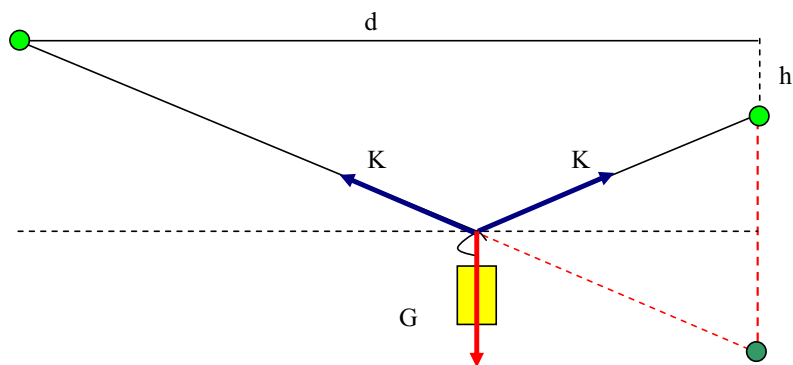
De vajon hogyan alakulnak az elrendezés geometriai viszonyai?

4. Mekkora a K erők?

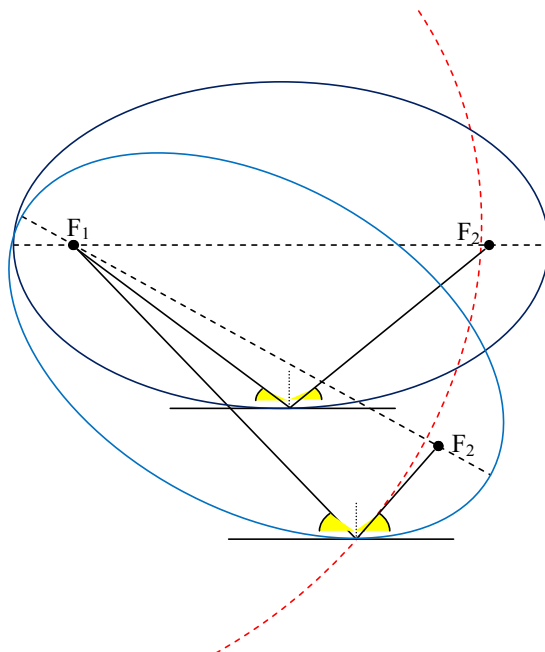
A feladat megoldása során használjuk a következő konkrét adatokat:

$d = 4 \text{ m}$; $l = 5 \text{ m}$; $h = 0,5 \text{ m}$; $G = 10 \text{ N}$.

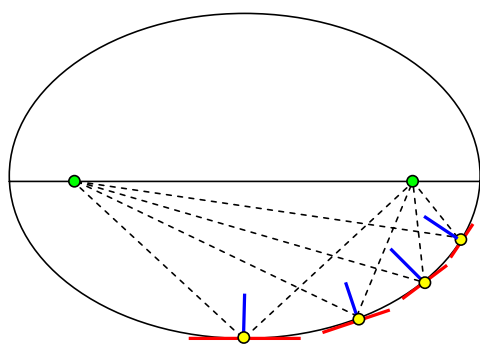
A probléma megoldásában segít az alábbi ábra:



5. Milyen síkidomot ír le a kampó, ha a feszesen tartott kötél mentén mozgatom az m tömegű testet úgy, hogy a két rögzítési pont állandó?
6. Milyen sajátága van az egyensúlyi helyzetnek? Melyik kitéüntetett pontja ez a pont a görbének?
7. Hogyan változik a feladat, ha a jobb oldali rögzítési pontot (F_2) egy F_1 középpontú kör mentén mozgatom lefelé, azaz a két rögzítési pont távolságát állandónak tartom?
Befolyásolja mindez az egyensúlyi helyzetről és a kampó által leírt görbéről megállapítottakat?



Azzal, hogy a két rögzítési pont távolsága nem változott és a két ponttól vett távolság összege, azaz a kötél hossza is változatlan maradt, a kampó helye (egyensúlyi helyzet) egymáshoz képest elforgatott, egybevágó ellipszisek alsó pontjait jelölte ki. Itt a kötélerők a korábbiakból következően egyenlők, így a kötelek azonos szöget zárnak be a vízszintessel. Mivel a két fix pont kölcsönös helyzetét tetszés szerint változtathattuk, így az egyensúlyi helyzetek lényegében ugyanazon ellipszis tetszés szerinti pontját írják le. Ezen pontokra érvényes lesz a kötélerőkre, így a kötelekre is vonatkozó megállapítás a szimmetriáról, ami egyenértékű egy, az ellipszisse vonatkozó fontos geometriai tétel megállapításával.



8. Mi lehet ez az állítás?

A kapott eredmény a fény visszaverődésének törvényével összevetve érdekes megállapítást hordoz az ellipszis tükréről.

9. Mi ez az ellipszis tükrökre vonatkozó megállapítás?

10. Hogyan érvényesül a Fermat-elv ebben az esetben? (ld. 2. feladatlap)

Ami a fényhullámokra érvényes, ebben az esetben érvényes a hanghullámokra is. Ha egy ellipszis alakú helyiség egyik fókuszában szütnak, a másik fókuszában a szöveg remekül hallható.

11. Keress egy példát a jelenség irodalmi, történelmi, kultúrtörténeti feldolgozására!



Az ütközések problémája, ahogy 200 évvel ezelőtt látták

Ahogy erről korábban már volt szó, a fizika teljes matematizálása újkeletű dolognak tekinthető. Ebben a feladatlapban azt vizsgáljuk, hogyan tárgyalta a rugalmas és rugalmatlan ütközést a XIX. század elején egyik első tankönyvünkben Varga Márton a megmaradási tételek és a matematikai apparátus nélkül.

Hogyan használhatjuk, tájíthatjuk eredményeit, s mindez hogyan jelenik meg a mai tankönyvekben?

Az alábbiakban egy szokatlan „szövegértési feladattal” foglalkozunk, melynek követéséhez némi fantáziára is szükség van a régies nyelv miatt.

Varga Márton, a magyar nyelvű természettudomány úttörője

Varga Márton 1767. március 20-án született Monostorapátiban. Alsóbb iskoláit és gimnáziumi tanulmányait Szombathelyen és Székesfehérváron végezte. Ezután Győrben filozófiát tanult, majd Komáromba került. Itt a bencés rendi gimnázium tanára lett 1796-tól 1798-ig. 1798-ban a nagyváradi akadémián a *Természet Tudományának, a természet Históriajának és a Mezei Gazdaságnak Királyi rendes Tanítója* lett. Akadémiai tanárként a természettudományok magyar nyelven való tanításának fontosságát hirdette, s valósította meg háromkötetes tankönyvében.

„Használni igyekeztem, az bizonyos. Nemzetem dísze ditsősége, java, a vallásra való buzditás voltak fő ösztönim, az erkölcsök jobbitgatása, hogy nem deákul, mely kevesebbe került volna, hanem magyarul irtam. Megmutattam, hogy anya nyelvünk ereje megbirja a Filozófiát, hogy lehet Fisikát olly tökéletesen rajta írni, mind a deák oskolás könyveink vannak.”¹

Varga Márton tankönyvsorozatának első két kötete *A gyönyörű természet tudománnya* címmel jelent meg 1808-ban Nagyváradon, míg a különálló harmadik kötet *A tsillagos égne és a Föld golyóbissának az ő tüneményeivel együtt való természeti előadása, s megesmértetése* egy évvel később, ugyancsak Nagyváradon. Az első két kötetet a magyar nyelven megjelent fizika tankönyvek legfontosabbjaként tarjuk számon.

Kinizsi Pál, aki holta után is törököt ölt

Varga Márton fizikakönyvében arra törekedett, hogy az olvasó elé tárt ismereteket minél közérthetőbben mutassa be. Ennek érdekében számos történetet, gyakorlati vonatkozású utalást helyezett el mondandójában:

„A' vissza rúgó valamelly mozdúlhatatlan vissza rúgóval ütköznén meg, azon gyorsasággal ugrik vissza, a' mellyel megütközött: mert ha vissza rúgó nem volna. nyugodni kellene néki, de mivel az, a' második időpontban az egész gyorsaságát vissza nyeri. Kinisi Pál márvány oszlopára Nagyvásonyban egy esmérős török reá lövött, talán vas golyóbissal, boszszút akarván holta után is álni a „Törökség” hajdani ostorán; de magának volt a' töröknek ezen lövés halálos; mivel a vissza ugrott golyóbis keresztül ment rajta. Innét támadott a' hír: Kinisi holta után is törököt öl.”

Bár Varga Márton törekedett a képszerűsége és a nyelvi egyszerűsége, szövegének megfejtése és mai fogalmakra való átültetése mégsem könnyű.



¹ Varga Márton: *A gyönyörű természet tudománnya* I. kötet. Nagyvárad. 1808.

1. Mit jelentenek az alábbi kifejezések a szövegben: *vissza rúgó, mozdulhatatlan?*
2. Milyen törvényszerűséget fogalmaz meg Varga Márton a szövegben? Newton melyik törvényére utal, annak megnevezése nélkül? Mit állíthatunk a leírt ütközésről, ismer-tes és értelmezd saját szavaiddal!

A rugalmatlan és rugalmas ütközés Varga Márton leírásában

(a helyesírást a továbbiakban egyszerűsítettem)

A rugalmatlan ütközés

A nem rugó kemény testek egyenes ütközetének törvényei ezek. Ha a lassabban sietőbe ütközik az utána gyorsabban futó, mind a kettőnek egy közösleges célja vagyion, az ütközet után mind a kettőnek egyenlő a gyorsasága, mert a lassabban haladó a sebesebben rohanónak mindad-dig akadálya, míg oly nagy mozdulással nem bír, hogy amennyit a rohanó utána siet, annyival ő előbbre lóduljon. Evégre szükséges, hogy a rohanó annyi gyorsaságot közöljön vele, amen-nyi az egyenlőségre megkívántatik, másként az akadályozás fennmaradna. Ha ez megvan, világos, hogy egyenlő gyorsasággal kell nekik haladni az ütközet után. Kitetszik innen, hogy a lassabban haladó nagyobb gyorsaságot nyer az ütközetben, a rohanó pedig vesz annyi, amennyit amaz nyer a hatás és visszahatás törvénye szerint. Másrésről mind a kettőnek együtt nincs se nagyobb, se kisebb gyorsasága az ütközet után, mint együttvéve mindegyiknek az ütközet előtt volt.

Együttvéve az ütközet előtt $MC+mc$, az ütközet után való ismeretlen gyorsaságot X -nek ne-veztük, lesz tehát, ha ezt a masszának summájával sokasítjuk $X(M+m) = MC+mc$. Oldjuk fel

ezen egyenletet, lészen $X = \frac{MC+mc}{M+m}$, azaz a közösleges gyorsaság az ütközet után egyenlő

az ütközet előtt volt mozdulás nagyságának summájával, elosztva a masszák summájával.

3. Hogyan fogalmaznád meg mai nyelven a fentieket?
4. $M = 3$ kg tömegű, $v_1 = 4$ m/s testet utolér egy $m = 1$ kg tömegű, $v_2 = 8$ m/s sebességű test, és tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz a testek sebessége az ütközés után?
5. $M = 3$ kg tömegű, $v_1 = 4$ m/s test szembetalálkozik egy $m = 1$ kg tömegű, $v_2 = 7$ m/s sebességű testtel, és tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz a testek se-bessége az ütközés után?

A tökéletesen rugalmas ütközés

„A tökéletesen izmos visszarúgóknak egyenes ütközetéről minekelőtte szólunk, szükséges közöslegesen megjegyezni, hogy ezek a testek először magukat összenyomják és ez az első ütközet, másrésről hogy az összenyomott részek midőn az előbbeni figurájukat visszanyerik, megint egymásba ütköznek, és ez a második ütközet. Mivel a testek tökéletesen visszarúgóknak tételnek, az is feltétetik, hogy az összenyomó erőkkkel a visszarúgók egyenlők. Mind a két ütközet úgy megy végbe, mint a nem rúgóknak, csak az a különbség, hogy ha va-lamelyik test vesz, vagy nyer gyorsaságot, a vesztes is dupla és a nyereség is, mivel kettős az ütközet és így sokkal erőszakosabb változás történik a visszarúgók ütközetében, mint a nem rúgóknál. Az ütközés törvényét hogy megértsük, vegyünk fel egy példát megfejtés végett. Legyen a rohanó test masszája M , a lassabban az előtt mozduló m . M legyen 2, m pedig 1. A



rohanó gyorsasága az ütközet előtt $C = 6$, az elől haladóé $c = 3$. A közönséges gyorsaság, mivel ismeretlen, legyen X . Az ütközés első idejében, ha a testek visszarúgók nem volnának,

$$X = \frac{MC + mc}{M + m} \text{ vagy } \frac{12 + 3}{3} = 5, \text{ tehát a rohanónak vesztesége } 6 - 5 = 1, \text{ az elől haladónak}$$

nyeresége $5 - 3 = 2$. Az első ütközetben tehát az elől menőnek nyeresége $X - c$, a másodikban is ennyit nyer, lesz tehát $2X - 2c$ az egész nyereség. Ehhez még hozzá kell adni az ütközet előtt való gyorsaságot, mely c , léssen annak okáért az eredmény $2X - 2c + c$, mely tesz $2X - c$.

A rohanónak vesztesége az első ütközetben $C - X$, a másodikban is ennyi, tehát az egész veszteség $2C - 2X$. Ezt ki kell húzni az ütközet előtt valóból, léssen tehát $C - 2C + 2X = 2X - C$.

A felvett példa legyen ennek megvilágosítója. Az $X = 5 - 3 = 2$, $5 - 3 = 2$, tehát a nyereség az elől menőben $= 4$, volt pedig a gyorsaság 3 , együtt tehát 7 az egész gyorsasága az ütközet után. A rohanónak vesztesége $6 - 5 = 1$ és másodszor is $6 - 5$. Így összességében $= 12 - 10$, ezt kihúzával $6 - 12 + 10 = 4$.

6. Mit jelent az az állítás, hogy két ütközés zajlik a tökéletesen rugalmas ütközés („tökéletesen izmos visszarúgás”) esetén?

Oldjunk meg együtt egy feladatot, a Varga Márton által alkalmazott logikát követve:

Egy $m = 2$ kg tömegű testet utolér, s azzal rugalmasan ütközik egy $M = 3$ kg tömegű test. Az m tömegű test sebessége $v_1 = 1$ m/s, az M tömegűé $v_2 = 6$ m/s.

Ha a két test tökéletesen rugalmatlanul ütközne, összetapadna, s együtt menne tovább, közös sebességük a lendületmegmaradás törvényével összhangban $X = \frac{MC + mc}{M + m}$ összefüggésből

$$\text{lenne számítható. } v_k = \frac{3 \cdot 6 + 2 \cdot 1}{5} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A lassabb test tehát 3 m/s sebességet nyerne, ha az ütközés tökéletesen rugalmatlan lenne („első ütközet”), de mivel tökéletesen rugalmas, a nyereség 6 m/s. Így az m tömegű test végső sebessége 7 m/s lett.

A gyorsabb test az első fázisban 2 m/s sebességet veszít. A veszteség a második fázisban is ugyanennyi, azaz összesen 4 m/s. Így az M tömegű test ütközés utáni sebessége 2 m/s lesz.

Oldd meg az alábbi feladatokat:

$M = 3$ kg tömegű, $v_1 = 4$ m/s testet utolér egy $m = 1$ kg tömegű, $v_2 = 8$ m/s sebességű test, és tökéletesen rugalmasan ütköznek.

7. Mekkora lesz a testek sebessége az ütközés után?

$M = 3$ kg tömegű, $v_1 = 4$ m/s test szembetalálkozik egy $m = 1$ kg tömegű, $v_2 = 7$ m/s sebességű testtel, s tökéletesen rugalmasan ütköznek.

8. Mekkora lesz a testek sebessége az ütközés után?

Amikor a két test összeütközött, egy „pillanatig” együtt mozogtak, azonos lett a sebességük. Közöttük ebben a fázisban rugalmas erő lépett fel, ez gyorsította a lassabb, és lassította a gyorsabb testet. A deformációk megszűnése után (második fázis) ugyanaz az erő ismét sebességváltozást idézett elő, mindkét testben pontosan az első fázisnak megfelelőt (az összenyomott „rugó”, visszanyerte alakját).

9. Varga Márton rugalmas ütközésre vonatkozó leírása alapján írd fel paraméteresen a két ütköző testnek a rugalmas ütközés során szerzett sebességeit!

Az alábbi paramétereket használd:

Tömeg: m , M .

Ütközés előtti sebességek: v_1 , v_2 .

Ütközés utáni sebességek: u_1 , u_2 .

Varga Márton eredményeire a rugalmas ütközés vizsgálata során az energiamegmaradás és a lendületmegmaradás törvényének egyidejű használatával juthatunk.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a testek azonos irányban haladnak egy egyenes mentén:

A lendületmegmaradás törvénye szerint

$$m \cdot v_1 + M \cdot v_2 = m \cdot u_1 + M \cdot u_2$$

A mozgási energia megmarad, hiszen az ütközés tökéletesen rugalmas, ezért

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} M \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} M \cdot u_2^2$$

10. Oldd meg a fenti két ismeretlenes egyenletrendszer, s igazold Varga Márton formuláit!

Varga Márton gondolatmenete a kétlépcsős ütközésről, ahol mindkét ütközés azonos mértékű változást okoz, jobban megérthető, ha nézőpontot változtatunk. Vizsgáljuk meg a 7. és 8. feladatot egy olyan megfigyelő szemszögéből, amelyik az első ütközés végén, azaz a két test pillanatnyi összetapadása során együtt mozog a testekkel! Ez megfelel a tökéletesen rugalmatlan ütközés végén kialakult közös sebességgel mozgó megfigyelőnek.

11. Határozd meg, hogy a 7. és 8. feladatban mekkora sebességgel mozgott ez a megfigyelő, s hozzá képest mekkora sebességgel, illetve mekkora lendülettel közeledtek, illetve távolodtak a testek a tökéletesen rugalmas ütközések során!



12. Foglald össze a mozgó megfigyelő tapasztalatait a 7. és 8. feladatban mind a tökéletesen rugalmatlan, mind a tökéletesen rugalmas ütközésre vonatkozóan!

A kvantummechanika kezdetei

1913. március 31-én Zemplén Győző a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja „A röntgen-sugarak rezgésszáma és az elemi energia-adagok hyphotesise” címmel tartott előadást. Az akadémikusok magas szintű tudományos előadásai teljességgel érthetetlenek voltak egy laikus számára, és azok most, majd száz év elteltével is. Hogy Zemplén Győző előadását mégis megértheti egy mai művelt középiskolás, ez annak köszönhető, hogy a kvantummechanika 1913-ban még csak 13 éves volt. Einstein két évvel később Nobel-díjjal jutalmazott tanulmánya a fotonok létének igazolásáról pedig ekkor még csak 8 éves. Ebben az évben születik a Bohr-modell, s ekkor születik Max von Laue – utóbb szintén Nobel-díjjal jutalmazott – felfedezése a röntgensugarak diffrakciójáról természetes rácsokon. Mindezt összevetve elmondható, hogy Zemplén Győző cikke a kvantummechanika legfrissebb eredményeivel foglalkozott. A cikkben megfogalmazott következtetés megkérdőjelezi Planck kvantumhipotézisét. De vajon hol a hiba Zemplén gondolatmenetében? Nyomozzuk ki együtt!

Ismerkedjünk meg a cikk szerzőjével a Magyar Életrajzi Lexikon alapján:

Zemplén Győző (Nagykanizsa, 1879. okt. 17. – Monte Doloro, Olaszország, 1916. júl. 29.): fizikus, műegyetemi tanár, az MTA I. tagja (1908).

1896–1900-ban az Eötvös-kollégium tagjaként végezte a budapesti egyetemen tanulmányait. 1898-ban a gázok belső sűrűlódásáról írt dolgozatával Pasquich-díjat, a kutatás továbbfolytatásáért 1901-ben Than-díjat nyert. 1902-ben avatták doktorrá, Eötvös Loránd mellé került gyakornoknak, majd tanársegédnek. Két év múlva Göttingenbe és Párizsba ment tanulmányútra. 1905-től a tudományegyetem magántanára. 1907-től a József Műegyetem magántanára, 1912-től az elméleti fizikai tanszék tanára. Kutatásaiban a relativitáselmélettel és a radioaktivitással foglalkozott. A Michelson-kísérletnek új magyarázatát adta: a fény a fényforrástól különböző irányokban, különböző sebességgel terjed. Előadásaiban a Maxwell-féle elektrodinamikát és a kinetikai gázelméletet ismertette. 1914-ben a fronton az ütegek helyének megállapítására hangbemérő módszert dolgozott ki. Lefordította Pierre Curie és Maria Skłodowska Radioaktív anyagokra vonatkozó vizsgálatait (Budapest, 1906) című művét. Az I. világháborúban elesett. Nevéről hidrodinamikai tételt neveztek el.



A Zemplén Győzőről szóló megemlékezés a *Nyugat* című folyóiratban:

<http://epa.niif.hu/00000/00022/00203/06288.htm>

Olvasd el figyelmesen Zemplén Győző írását, s válaszolj a kérdésekre! Segítségére lehetnek tankönyveid és a világháló.

(A cikket kismértékben rövidítettem, a mértékegységeket a ma használatosokra cseréltem, de sem a szóhasználaton, sem a számértékeken nem változtattam. A tehetséggondozó feladatsorhoz tartozó honlapon az eredeti cikk is megtalálható.)

Zemplén Győző 1.-tagtól

Régóta kutatnak a physikusok a Röntgen-sugárzás körében *elhajlás-* (diffractio-) és *interferencia-jelenségek* után, remélvén, hogy ez úton e sugarak természetéről tudomást szerezhetnek. Minden jel arra mutat, hogy igen közel vagyunk e problémának végleges megoldásához, mely szerint a Röntgen-sugárzás is elektro-mágneses rezgések hullámszerű tova-terjedése, akárcsak a fény és a Hertz-féle hullámok. Már régebbi vizsgálatok valószínűvé tették, hogy ha a Röntgen-sugarak elektromágneses rezgések, hullámhosszúságuk minden esetre jóval (több ezerszer) kisebb, mint az eddig ismeretes legrövidebb ibolyántúli fény-hullámoké. Ily csekély hullámhosszúság mellett nem igen lehetett remélni, hogy az optikai rácsok mintájára előállított szerkezetekkel a Röntgen-sugarak diffractióját ki lehessen mutatni. Laue-nek támadt az a merész gondolata, hogy optikai rácsnak ez esetben egy kristály molekuláinak rendszerét használják fel; a molekuláris elmélet szerint a kristályokban a molekulák szabályos térbeli rácsot alkotnak, melyen a kristályra eső elektromos hullám elhajlást szenved; ezeknek az elhajlított sugaraknak interferálniuk kellene. Laue és társai az elméletnek megfelelően diffractió-képeket kaptak, ha a Röntgen-sugarak keskeny nyalábját a kristályon keresztül bocsátották.

Hogy a diffractió-képből a sugarak hullámhosszúsága kiszámítható legyen, ismerni kell a rácsállandót, a jelen esetben két molekulaközéppont legkisebb távolságát. A molekuláris elmélet alapján ma már elég megbízható eljárásokkal tudjuk meghatározni az ú. n. Avogadro-féle számot, az egy gramm molekulában foglalt molekulák számát; ismerve a vizsgált kristály molekulatömegét, sűrűségét és a molekulák térbeli eloszlásának rendszerét, minden adatunk megvan a rácsállandó meghatározására.

LAUE társai legpontosabb méréseiket egy czinkszulfid-kristályon végezték, mely a szabályos rendszerbe tartozik s így a molekulák egyszerű derékszögű térbeli rácsot alkotnak benne. LAUE számításai szerint a keletkező diffractiókép magyarázatára öt különféle hullámhosszúságú sugárzás jelenlétét kell feltételezni, melyeknek hullámhosszúsága:

$$\lambda = 1,27 \cdot 10^{-9}; 1,90 \cdot 10^{-9}; 2,24 \cdot 10^{-9}; 3,55 \cdot 10^{-9}; 4,83 \cdot 10^{-9} \text{ cm} \quad (1)$$

A LAUE-féle számítás egyetlen adata, melynek helyességében kételkedni lehet, az Avogadro-féle szám; ma azonban ezt is már oly biztossággal ismerjük, hogy a különféle, egymás közt igen eltérő eljárásokkal meghatározott számértékek alig térnek el több mint 10 százalékkal egymástól, úgy hogy a LAUE-féle eredmények nagyságrendjét mindenesetre helyesnek kell elfogadnunk.

Minthogy ilyenformán igen nagy rezgésszámú elektromágneses jelenség létezéséről szereztünk tudomást, nem lesz éreztelen ezeket az eredményeket összevetni egy igen általános és a physika különféle ágaiban szép eredményekkel kecsegtető hypothesis-sal. Értem az elemi energia-adag hypothesisét, melyet Planck legelőször a hősugárzásbeli jelenségek elméletében állított fel és a mely szerint az energia — csak úgy, mint az anyag — bizonyos legkisebb részeknél kisebb adagokra nem osztható és a rendszerek energiatartalma mindig ezen „elemi energia-adagnak” egész számú többszöre. Ez az első pillanatra annyira idegenszerű föltételezés igen sok eddig rejtélyesnek látszó tünemény kielégítő magyarázatát szolgáltatotta, úgy, hogy minden valószínűség szerint egy igen mélyenjáró természeti igazság előfutárja.

Plancknak, hogy a thermodynamika alapelveivel összeütközésbe ne jusson, föl kell tennie, hogy az elemi energia-adag nem ugyanaz a különféle elektromágneses rezgések esetében, hanem egyenesen arányos a rezgések szaporaságával; e szerint, ha e az elemi energiaadag,

$$\varepsilon = h \cdot \nu \quad (2)$$

ahol ν a másodpercenkénti rezgések száma, h pedig egy universalis állandó, mely a fekete test sugárzása alapján kísérlettel meghatározható:

$$h = 6,55 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

A legkisebb energia-adag e szerint a lassú elektromágneses rezgések esetében; pl. a drótnélküli telegraphiában használatos hullámoknál (λ -t 500 méternek véve):

$$\varepsilon = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6,55 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^2} \approx 4 \cdot 10^{-28} \text{ J} \quad (3)$$

Oly csekély mennyiség ez, mely a kísérletben megfigyelés alá jutó összes energiához képest rendkívül csekély, nem remélhető tehát, hogy e hullámok energiájának adagoltságáról kísérleti úton meggyőződhesünk.

Nem úgy a nagyobb rezgésszámú sugárzásoknál; már fénysugaraknál az elemi adag a (3) alattinak kb. ezermilliószorosa, vagyis $4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Röntgen-sugaraknál az említett mérések szerint az elemi adag a különböző hullámhosszúság szerint:

$$1,55 \cdot 10^{-14} \text{ J} \text{ és } 4,11 \cdot 10^{-15} \text{ J} \quad (4)$$

határok közé esik.

A következőkben arra figyelmeztetek, hogy kísérleti adatok alapján eldönthető, vajjon az elemi energia-adagoknak ez a következménye összeegyeztethető-e a Röntgen-sugarakra vonatkozó egyéb tapasztalatainkkal.

Tudjuk, hogy a Röntgensugárzás úgy keletkezik, hogy kathódsugarak őket elnyelő akadályokba ütköznek, a kathódsugarak pedig a mai felfogás szerint negatív töltésű részecskékből — elektronokból — állanak, melyek nagy sebességgel röpködnek tovább. A Röntgen-sugarak keletkezését részleteiben a következő módon képzelhetjük el magunknak: a negatív elektron a súlyos anyag molekuláiba ütközve, megosztja velük energiáját, melynek egy része a molekulák eleven erejét (hőmérsékletét) növeli, míg egy része a molekulákkal kapcsolatos elektromos töltésű részecskéket hozza rezgésbe, vagy pedig maga az elektron lép be rezgésszerűen valamely molekula kötelékébe; mindkét esetben e rezgések Röntgen-sugarak forrásaivá lesznek. Arra nézve, hogy a kathódsugarak energiájának hányadrésze alakul át Röntgen-sugárenergiává, pontos mérések adnak felvilágosítást. A legmegbízhatóbb ilyen méréseket WIEN würzburgi laboratóriumában végezték WIEN és tanítványai. A továbbiakban E. CARTER méréseire támaszkodunk, melyek szerint a keletkezett Röntgen-sugárzás energiájának (E_r) és a sugárzást keltő kathódsugárzás energiájának viszonya platina antikathód használata mellett:

$$\frac{E_r}{E_k} = 1,07 \cdot 10^{-3} \quad (5)$$

Ez a viszonyszám persze az egész kathódrészecske-rajra és az általa keltett összes Röntgen-sugarakra vonatkozik, azonban azt mindenesetre bajos elképzelni, hogy nem minden kathódelektron kelt Röntgen-sugárzást s így jogosnak látszik az a föltevés, hogy a viszonyszám minden egyes ütközésre külön-külön érvényes.

Az idézett Carter-féle adat 59000 Volt feszültségre vonatkozik (a kísérletekből kitűnik, hogy a «hatásfok» a feszültséggel arányos). E feszültség mellett egy kathódrészecske energiája: $U \cdot e = 8,85 \cdot 10^{-15} \text{ J}$, ahol e az elektron elemi töltése, mely a legújabb mérések szerint kerekszámban $1,5 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Eszerint egyetlen elektron energiája: $8,85 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ volna. Ámde ennek az energiának csak mintegy ezredrésze ld. (5) alakul át Röntgen-sugárzás energiájává, tehát az egyetlen kathódösszeütközés alkalmával kisugárzott Röntgenenergia:

$$E_r = 9,46 \cdot 10^{-18} \text{ J} \quad (6)$$

Ez a számérték körülbelül 440-szer kisebb, mint a Röntgen-sugarak legkisebb rezgésszámának megfelelő (4) alatti energiaadag, míg a legnagyobb rezgésszámmra vonatkozó energia-adag az egyetlen ütközés alkalmával átadott energiamennyiséget majdnem 1700-szorosan múlja fölül.

Azok az adatok, a melyeken e számítások alapulnak, nem teljesen megbízhatók, azonban kizártnak tekintendő egy oly rendű hiba, mely ezt az energia-adag hypothesis és a közönséges elektromágneses elmélet eredményei között mutatkozó nagy eltérést megmagyarázhatná.

*

A következőkben néhány ellenvetést czáfolok meg, melyekkel a fenti okoskodást meg lehetne támadni.

1. Azt lehetne állítani, hogy Laue és társainak mérései nem a primär Röntgen-sugarak hullámhosszúságát adják meg, mert hiszen a kristályban keletkező secundär sugárzás szolgáltatja az interferentia-képeket. Ezzel azonban az ellenmondás nem szűnik meg. Kísérjünk ugyanis figyelemmel egyetlen elektront, mely az antikathódra ütközve Röntgen-sugárzást kelt; e Röntgensugárzásnak energiája a (6) alatti E . A primär sugárzás a kristály molekulába ütközve secundär sugárzást indít meg, melynek energiája nem lehet nagyobb, mint E ; e szerint megint csak arra az eredményre jutunk, hogy a secundär sugárzásban kisebb energiarészeklet vannak jelen, mint az az energia-adag, a mely a Planck-féle hypothesis szerint c sugárzás rezgésszámának megfelel. Ha a (6) alatti E volna a primär Röntgen-sugárzás energia-adagja, akkor ebből a közönséges Röntgen-sugarak hullámhosszúságára nézve $2 \cdot 10^{-8}$ m-nyi érték következnek, a mi az összes eddigi kísérletek eredményeivel ellenmondásban van.
2. Azt lehetne esetleg képzelni, hogy nem minden kathód-elektron kelt Röntgen-sugárzást, hanem némelyiknek energiája mozgásenergiává alakul át, másoké pedig Röntgen-sugárzássá; e felfogás mellett szólna az a körülmény, hogy egyetlen kathód-elektron energiája ugyanolyan rendű mennyiség ($8,26 \cdot 10^{-15}$ J) mint a Röntgen-sugarak elemi energia adagja. A jelenség mechanizmusát úgy lehetne elképzelni, hogy az elektronok a molekulák között végigfutva csak az antikathód belsejében ütköznek össze molekulákkal s az ott keletkező Röntgen-sugárzás az anyagban szenvedett absorptio következtében részben visszaalakulna hőmozgássá. E felfogás azonban nem egyeztethető össze azzal a kísérleti tapasztalattal, hogy a kathód-elektronokat a fémek sokkal nagyobb mértékben nyelik el, mint a Röntgen-sugarakat, tehát azokból a rétegekből, a hol az elektronok elnyeletnek, a Röntgen-sugárzás még úgyszólván minden gyöngülés nélkül távozik el. De ez esetben ismét a Röntgen-sugárzás absorptiója következtében lépnének fel az elemi adagnál kisebb energiarészeklet.
3. Még legkomolyabbnak kell tekintenem azt a feltevést, hogy a primär Röntgen-sugarak nem maguk fedezik a secundär sugárzás energiaszükségletét, csak *kiváltják* a secundär sugárzást, mely a kristály atomenergiájának rovására szabadulna fel. Ez a felfogás ez idő szerint kísérleti adatokkal meg nem czáfolható, de persze nem is bizonyítható; ha azonban beválnék, akkor Laue és társai kísérleteinek fontossága igen lényegesen megnövekednék, mert a *mesterséges radioaktivitás* első példáit szolgáltatnák.

*

Mindebből kitűnik, hogy a Röntgen-sugarakra vonatkozó legújabb kísérleti tapasztalatok nem hozhatók összhangzásba az elemi energia-adag hypothesisének következményeivel. Mégsem tekintem az elmondottakat a Planck-féle föltevés döntő czáfolatának, egyrészt mert ahhoz is még szó fér, vajjon a Röntgensugarak valóban nagy rezgésszámú elektromágneses

sugarak-e, másrészt mert az idézett ellenmondás esetleg az energia-adag hypothesisének átfogalmazása által megszüntethető.

Föl lehetne például tenni, hogy az energiának elemi adagok szerinti eloszlása csak akkor történik meg, ha adott energiamennyiséget sok resonator között kell elosztani, egy elszigetelt katód-elektron ütközésére tehát nem érvényes; az energiának elemi adagok szerinti eloszlása csak akkor következne be, a mikor már bizonyos energiamennyiség sok katód-elektron összeütközése következtében felhalmozódott. A föltevés ebben az átfogalmazásban ama módosításra emlékeztet, a melyet eredeti hypothesisén Planck maga eszközölt a legújabb időben; e szerint a resonatorok energiafölvétele folytonosan történnék és csak az energiaki-bocsátás történne elemi adagok szerint. A jelenség mechanizmusába azonban az ilyen alapon kifejtett elmélet esetében nehezen tudunk betekinteni.

Hasonló átfogalmazások segítségével az elemi energia-adag hypothesisé bizonyára megmenthető, azonban a szükséges mellékföltevések feltétlenül elhomályosítják az eredeti elmélet tisztaságát.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1913 márcz. 31.-én tartott üléséből.)

**

1. Hogyan következtethetünk a fény rácson való elhajlásából a fény hullámhosszára?

A cikk elemzése során induljunk ki Max von Laue hullámhossz méréseinek eredményéből.

2. Mekkora a Laue által megadott hullámhosszú röntgen-fotonok energiája?

A számítás során a ma elfogadott adatokat használd!

A Planck állandó: $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}$ a fény sebessége: $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Hasonlítsd össze eredményeidet Zemplén Győző számításaival!

A röntgensugárzás cikkben említett forrása a katódsugárcső.



Max von Laue (1879-1960)

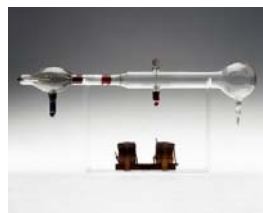
3. Mi a katódsugárcső működésének elve? Hogyan keletkezik a röntgensugárzás?

Az 59 000 V feszültségen gyorsított elektron mozgási energiája 59 keV lesz.

4. Mit jelent ez az állítás? Hány Joule ez az energia?

Az elektron töltése $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Ha az anódba becsapódó elektron teljes mozgási energiája egyetlen röntgen foton formájában szabadul fel az anód anyagával való kölcsönhatás során, akkor egy elektron becsapódása során 59 keV energiájú röntgen-foton keletkezik.



5. Mekkora lesz ennek a fotonnak a frekvenciája és a hullámhossza? Hogyan viszonyul ez a Laue által mért hullámhosszakhoz?

Bár az 1913-ban ismert fizikai állandók értékét mára pontosították, Laue hullámhosszmérése és Zemplén Győző fotonhullámhossz-számítása sem tartalmaz akkora hibát, hogy a Zemplén Győző által észlelt eltérést magyarázza. Az is helyes állítás, hogy az anódba csapódó elektronok energiájának csak csekély része alakul át röntgensugárzássá. Ennek az aránynak a meghatározására Compton adott összefüggést, mely szerint $\eta = 1,1 \cdot 10^{-4} \cdot Z \cdot U$ kifejezés számértéke megadja, hogy az anódba csapódott elektronok energiájának közelítőleg hány

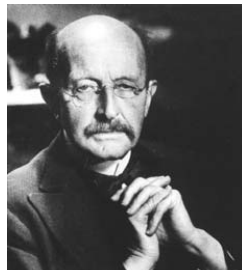
százaléka alakul át röntgensugárzássá, ahol Z az anód anyagának rendszáma, U pedig a gyorsító feszültség kV-ban mérve.

- 6. Mekkora az energiaátalakulás hatásfoka a Zemplén Győző által tárgyalt esetben? Hasonlítsd össze számítási eredményedet a cikkben szereplő értékkel!**

Az ellentmondás feloldását Zemplén Győző is megtalálta, s mint egy lehetséges ellenvetést saját gondolatmenetével szemben le is írta cikkének végén (ellenvetések cáfolata 2. pont).

- 7. Keresz olyan cikket az Interneten vagy könyvben, amely igazolja Zemplén Győző második ellenvetését, s feloldja az általa felismerni vélt ellentmondást a Planck-féle fontonelmélet és a röntgensugarak hullámhosszára vonatkozó kísérleti eredmény között!**

- 8. Foglald össze saját szavaiddal a cikk lényegét, s mutasd meg, hol hibás a szerző érvelése és miért!**



Max Planck (1858-1947)

Minden nézőpont kérdése

Ez a feladatlap egy meglehetősen összetett problémával foglalkozik. Megoldása ugyanakkor egyszerűbbé is válhat, ha felismerjük, hogy *minden nézőpont kérdése*.



Egy 45° -os lejtőre h magasságból kis méretű, tökéletesen rugalmas gumilabdát ejtünk. Egy pattanás után hol (az első lepattanás helyétől milyen távolságra) éri el másodszor a gumilabda a lejtőt? A feladatot lépésről lépésre fogjuk megoldani.

1. Határozzuk meg, mekkora szögben éri el a labda a lejtőt!

2. Mekkora lesz a visszaverődés szöge?

A labda olyan törvényszerűség szerint pattan vissza a lejtőről, ahogyan a fény verődik vissza a tükörről.

3. Fogalmazd meg azt a törvényszerűséget!

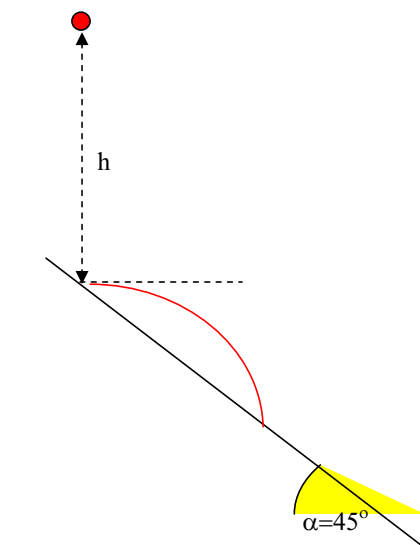
A labda „visszaverődésének” törvénye a következők alapján értelmezhető: a becsapódó labda sebességvektorának lejtőre merőleges komponense előjelet vált, a lejtővel párhuzamos komponens megmarad.

4. Mi indokolja a lejtőre merőleges komponens előjelváltását? Milyen ütközésként lehet felfogni ezt a kölcsönhatást?

5. Hogyan következik mindebből a labda „visszaverődésének” törvénye?

Ha a fényt rugalmas részecskéknak tekintjük (Descartes), akkor a fény visszaverődésének törvényét hasonlóan lehet értelmezni.

Vizsgáljuk meg, hogy a 45° -os hajlásszögű lejtő esetén hol ér másodszor lejtőt a h magasságból leeső test!



6. Mekkora a gumilabda sebessége a lejtőt érés pillanatában? h legyen 1,25 méter!

7. Milyen irányban fog elindulni a gumilabda az ütközés után?

A vízszintesen elhajított test egyszerre mozog szabadeséssel függőlegesen lefelé, s egyenes vonalú egyenletes mozgással vízszintesen. A két mozgás eredője határozza meg pályáját. Mi-

vel a lejtő 45° -os, a vízszintes irányú elmozdulás és a függőleges irányú elmozdulás azonos az első és második becsapódás között.

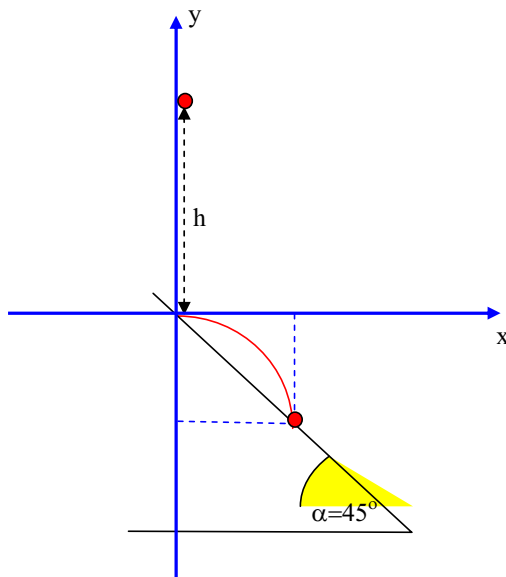
A vízszintes irányú egyenes vonalú egyenletes mozgás és a homogén gravitációs térben történő szabadesés (függőleges hajítás), azaz a függőleges mozgást leíró összefüggés általánosságban a következőképpen írható fel:

$$x = v_{0x}t, \quad y = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$$

A függőleges hajítás önmagában is összetett mozgás. Függőleges irányú egyenes vonalú egyenletes mozgásból és nulla kezdősebességű szabadesésből van „összetéve”.

8. Ezek alapján értelmezd a konkrét feladatban az „y”-ra vonatkozó összefüggést!

Hogy a helyes előjelviszonyokat áttekinthessük, koordináta-rendszert helyezünk az ábránkra. Ebben az esetben tehát $x = -y$



- 9. Mennyi idő telik el az első és második pattanás között? Mekkora lesz eközben a vízszintes és függőleges elmozdulás? Mekkora távolság van az első és a második pattanás helye között? ($g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)**

Vizsgáljuk meg a problémát abban az esetben, amikor a lejtő hajlásszöge 30° !

Az alább látható ábra segítségével válaszolj a következő kérdésekre:

- 10. Mekkora lesz a gumilabda sebessége az első pattanás után? Mekkora szöget zár be a gumilabda sebességvektora a vízszintessel ebben az esetben? Mekkora a lejtővel bezárt szög?**
- 11. Ha a lejtő 30° -os, a második pattanás helyére nem az $x = -y$ összefüggés lesz az érvényes, hanem a 30° -os lejtőnek megfelelően $x = -\sqrt{3}y$. Vajon miért?**
- 12. Számold ki az első pattanás utáni sebesség vektorának vízszintes és függőleges összetevőit, helyettesíts be a megadott képletbe, add meg a második pattanás koordinátáit, és számold ki a két pattanás távolságát!**

;

;

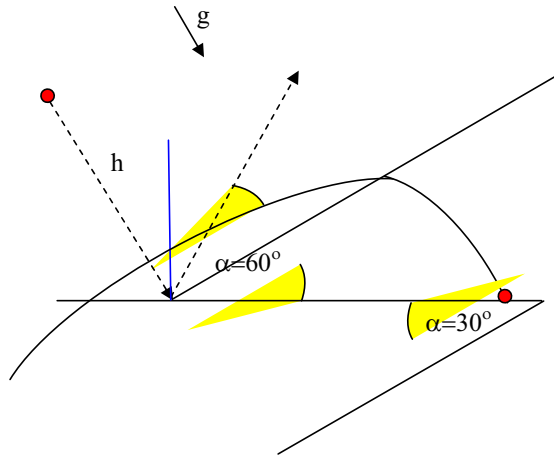
;



Nem lehetne másképpen? Hiszen minden nézőpont kérdése!

Az alsó ábra úgy keletkezett, hogy a felsőt 30° -kal elforgattuk. Az alsó ábrában a lejtőnek nyoma sincs, ez egy egyszerű ferde hajítást mutat, viszont van egy meglepő sajátysága az alsó ábra világának. Itt ugyanis a gravitációs gyorsulás vektora nem függőleges, hanem azzal 30° -os szöget zár be, és előre mutat.

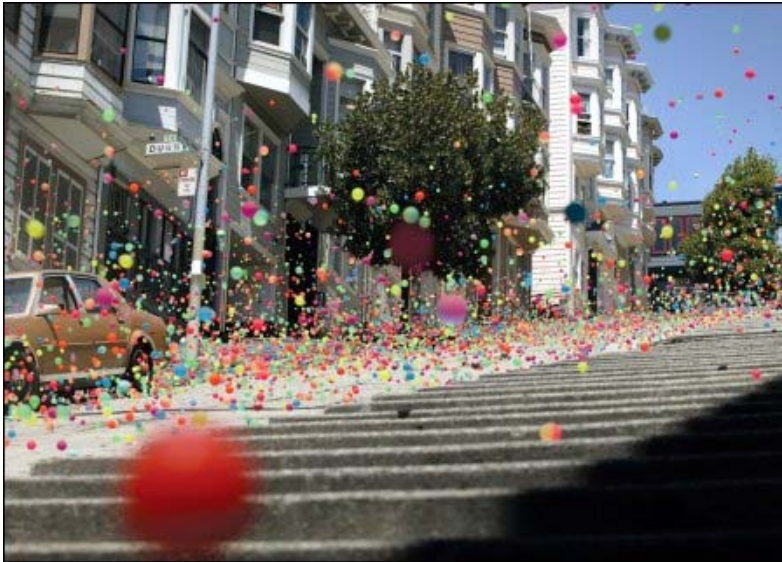
Ebben a világban a mozgások vízszintes irányban sem egyenletesek, hanem gyorsulók.



13. Számold ki a g gyorsulás „vízszintes” és „függőleges” komponensét, majd az alábbi, módosított egyenletrendszer megoldásával határozd meg az x' értékét! Mutasd meg, hogy az eredmény azonos a 12. feladat megoldásával!

$$x' = v_{0x'}t + \frac{g_{x'}}{2}t^2$$

$$y' = v_{0y'}t - \frac{g_{y'}}{2}t^2$$



Hidrosztatika

(avagy út egy művészettörténeti rejtély megoldásához:

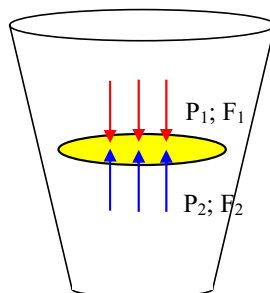
Miért nem pipával ábrázolta Csontváry Kosztka Tivadar az öreg halászt?)

A folyadékok közismert tulajdonsága, hogy bennük a nyomás minden irányba gyengítetlenül terjed. Ez a tény a folyadékok összenyomhatatlanságának következménye. Ezt igazolja az ismert kísérlet a vízbuzogánnyal:

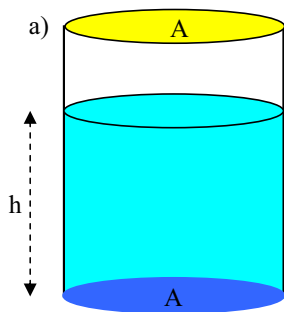


1. Hogyan értelmezhető a kísérlet, s mennyiben igazolja a vízben a külső nyomás minden irányban egyenletes, gyengítetlen terjedését?

Mindez azt jelenti, hogy a folyadék belsejében elhelyezett, elhanyagolható vastagságú lapra alulról és felülről azonos nyomás és ezért azonos erő hat. $P_1 = P_2$; $F_1 = F_2$



2. Javasolj olyan mérést, melynek segítségével igazolható, hogy az alulról ható nyomás csak attól függ, milyen mélyen van a felület!



Határozzuk meg, hogy mekkora a nyomás egy adott folyadék (pl.: a víz) belsejében, h mélységben! A számítás könnyen elvégezhető, ha egy egyenes henger alakú, vízzel h magasságig megtöltött pohár fenekére ható nyomóerőt vizsgáljuk.

3. Határozd meg a víznek a pohár aljára gyakorolt nyomását!

a., Számítsd ki a víz térfogatát!

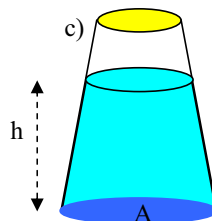
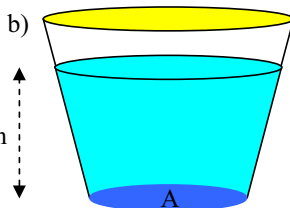
b.

Határozd meg a súlyát, ami a nyomóerővel egyenlő!

c., Írd fel paraméteresen a nyomást!

(A víz sűrűségét ρ_v -vel jelöljük, a gravitációs állandó g .)

A hidrosztatikai paradoxon kimondja, hogy a nyomás akkor sem lesz más h magasságú vízoszlop alján, amikor az edény alakja az egyenes hengertől eltérő.



A b) esetben az edényben nagyobb súlyú víz van, mint az egyenes henger (a) változat) esetében, a c) esetben pedig az edényben lévő víz súlya kisebb, mint a víz által kifejtett nyomóerő. A hidrosztatikai paradoxon szerint a nyomások s így a nyomóerők is azonosak az edények alján az a), a b) és a c) esetben. Mindez a folyadékokban terjedő nyomás fentebb leírt sajátágaival magyarázható.

4. De vajon hogyan? (Készíts rajzot!)

- A b) esetben hogyan nyomja a folyadék az edény falát (illetve az edény fala a folyadékot)? Hogyan magyarázható mindebből, hogy az edényben lévő folyadék súlyánál kisebb nyomás hat az edény aljára?
- A c) esetben hogyan nyomja a folyadék az edény falát (illetve az edény fala a folyadékot)? Hogyan magyarázható mindebből, hogy az edényben lévő folyadék súlyánál nagyobb nyomás hat az edény aljára?

A hidrosztatikai paradoxon egyenértékű állítás az alábbi kijelentésekkel:

A folyadék belsejében lévő vízszintes felületre kifejtett nyomóerő nem függ a felület felett lévő folyadék mennyiségétől, hanem csak a folyadék sűrűségétől, a felület felszín alatti mélységétől, a felület nagyságától és a gravitációs állandótól függ. ($F = P \cdot A = h \cdot \rho \cdot g \cdot A$)

Érvényes a közlekedőedények elve.

5. A előző feladatok megoldása alapján indokold a folyadékok nyomására vonatkozó $p = h \cdot \rho \cdot g$ összefüggés általános voltát! Ismertesd a közlekedőedények elvét, mutass be egy példát az elv alkalmazására és egyet a természetben való megnyilvánulására.

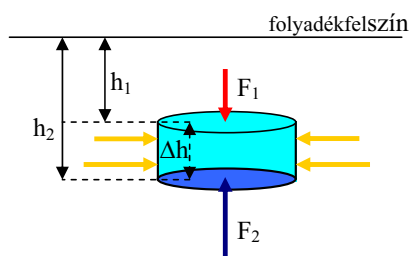


Tapasztalataink szerint egy folyadékba merített testre felhajtóerő hat. Ez az erő megnyilvánulhat abban, hogy a test, miután lenyomtuk a folyadékba és elengedtük, elindul felfelé, azaz a felhajtóerő meghaladja a test súlyát; vagy megnyilvánulhat abban is, hogy a testet kisebb erővel lehet a folyadék belsejében egyensúlyban tartani, mint a folyadékon kívül.

A felhajtóerő oka, hogy a testre az őt körülvevő közeg nem egyenletes nyomást gyakorol. A nyomás alulról nagyobb, mint felülről. Felhasználva a folyadékok súlyából származó nyomásnak korábban tárgyalt összefüggését ($P = h \cdot \rho \cdot g$), valamint azt a tényt, hogy a testet körülvevő folyadék minden irányból nyomást gyakorol a testre, egy szabályos test (henger) esetében meghatározzuk a felhajtóerőt.

Az oldalnyomásból származó erők kiegyenlítik egymást.

6. Az ábra alapján határozd meg az F_1 és F_2 értékét, s a $F_{fe} = F_1 - F_2$ erőt. A felhajtóerő kifejezését alakítsd úgy, hogy abban a test $V = A \cdot \Delta h$ térfogata szerepeljen!



A felhajtóerő kapott összefüggését vizsgálva megfogalmazható Arkhimédész törvénye. A folyadékba merített testekre felhajtóerő hat, melynek nagysága megegyezik a test folyadékba merült részének térfogatával megegyező folyadék súlyával. (Felhajtóerő a gázokba merülő testekre is hat, de ezzel a kérdéssel most nem foglalkozunk.)

Ismert (de hibás) változata az Arkhimédész-törvénynek a következő verseike:

Minden vízbe mártott test

A súlyából annyit vesz,

Amennyi az általa

Kiszorított víz súlya.

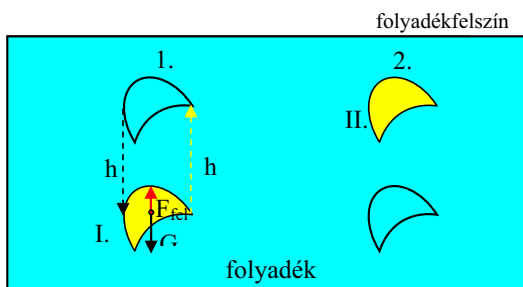
7. Miért pontatlan és hibás a verseike? Találd meg a hibahelyeket!

- A felhajtóerő nagyságára vonatkozó törvény levezetése erősen épített arra, hogy a test (henger) szabályos: a folyadékfelszínnel párhuzamos és arra merőleges felületei vannak. Az alábbiakban a munkatétel felhasználásával egy általános levezetést mutatunk be.

Némi segítséggel a levezetést magad is megtalálod!

8. A felhajtóerő kiszámítása munkatétellel:

Az ábrán sárga színű szabálytalan test merül folyadékba. A testre az I. ábrának megfelelően nagyobb súlyerő hat, mint felhajtóerő.



- Mekkora erővel lehet a testet egyensúlyban tartani?
 - Mekkora erővel lehet a testet egyenletesen felfelé mozgatni?
 - Mekkora munkát végzünk, miközben a testet h -val megemelve egyenletesen az I. helyzetből a II. helyzetbe hozzuk?
 - Mennyit nőtt közben a test helyzeti energiája?
 - Változott-e a folyamatban az edényben lévő folyadék (világoskék) helyzeti energiája?
 - Nőtt vagy csökkent? Mennyi az energiaváltozás?
 - Mennyi a rendszer teljes energiaváltozása?
 - Mennyi a rendszeren végzett munkánk?
 - Írd fel a megfelelő egyenletet és határozd meg belőle a felhajtóerő értékét!
- A fenti levezetésben nem használtuk ki a test geometriájának sajátosságait.

S végül nézzünk egy ördögi feladatot:

A halász pipája, avagy fény derül a rejtélyre

A képen lévő halászt Csontváry Kosztka Tivadar festette. A halásznak valamikor volt két pipája. De mi történt azután?



A halász a pipákat a tóba dobta. Talán le akart szokni a dohányzásról? A következőket tudjuk a pipák elvesztésének körülményeiről:



A halász az egyik pipáját a partról dobta bele a tóba. A másikat akkor hajította ki, amikor a csónakjában ülve éppen a tó közepén várta a kapást. A vízszint mindkét esetben ugyanannyit változott! A tó partfala mindenütt függőleges!☺

Mekkora a pipa sűrűsége?

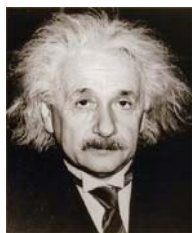
9. Oldjuk meg együtt a feladatot lépésenként, rávezető kérdések segítségével!

- Hogyan változik a tó vízszintje, ha a halász a partról bedobja a tóba a pipáját?
- Mennyiben befolyásolja a változást az a tény, hogy a pipa elsüllyed a tóban vagy úszik?
- Mennyi vizet szorít ki a pipa az első, illetve a második esetben?
- Mennyi vizet szorít ki a pipa, ha a halász csónakjában van?
- Mennyivel változik a vízkiszorítás, ha a pipa kiesik a csónakból, és elsüllyed a tóban?
- Mennyivel változik a vízkiszorítás, ha a pipa kiesik a csónakból, és úszik a tó felszínén?
- Ha eddig eljutottál, lehetséges, hogy valamilyen ellentmondást észlelsz! Ezt feloldhatja, ha végiggondolod: Mit is jelent az, hogy a két esetben *a tó vízszintje ugyanannyit változik*?
- Ha rájöttél a trükkre, innen hamar eljutsz a megoldásig! Akkor elsüllyed a pipa a vízben vagy úszik?
- Tehát akkor mely mennyiségek egyenlők? Szavakkal fogalmazd meg, ne képlettel!
- Mekkora a pipa sűrűsége?

A speciális relativitáselmélet

Galilei relativitási elve szerint két, egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerben (Galileinél egy álló és egy egyenletesen mozgó hajó szerepelt) a testek mozgásait, az ezt kiváltó erők és a mozgás jellemzőinek viszonyát azonos törvények írják le, azaz a két rendszer nem különíthető el egymástól pusztán a testek mozgásának (viselkedésének) megfigyelése révén. Einstein általánosította Galilei relativitási elvét, s ki mondta, hogy két, egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerben a fizikai törvények és a fizikai állandók egyaránt azonosak.

A relativitási elv Einstein-féle általánosításának következménye, hogy a fény légüres térben mért sebessége, mint alapvető fizikai állandó, független a vonatkoztatási rendszertől.



Az Einstein által kidolgozott speciális relativitáselmélet a következő állításokat fogalmazza meg a fényre:

- A fény légüres térben mérhető sebessége egyfajta határsebesség, semmilyen információ nem terjedhet ennél gyorsabban.
- A fény légüres térben mérhető sebessége vonatkoztatási rendszertől független állandó, azaz az egymáshoz képest mozgó megfigyelők egy fényjel sebességét azonosnak tapasztalják.

A sebességek összeadásának nehézségei

A sebességek összeadhatóságának klasszikus módszerét Galilei adta meg. Ennek a szemléletes elvnek a lényege, hogy ha egy vonatkoztatási rendszer hozzánk képest egy egyenes mentén v_{rel} relatív sebességgel mozog, s ebben a rendszerben egy test sebessége v_1 ugyan-ezen egyenes mentén ugyanabban az irányban, akkor a test sebessége hozzánk képest $v_2 = v_1 + v_{rel}$ lesz. Tehát ha egy száguldó vonaton előre világítunk, akkor a klasszikus sebesség-összeadási elv szerint lámpánk fénye a fény légüres térben mért sebességénél nagyobb sebességgel terjed a sínekhez képest. A relativitáselmélet érvénytelenítette a klasszikus sebesség-összeadási képletet. A helyes, relativisztikus összefüggés fenntartja a fénysebesség határsebesség jellegét, kis sebességek esetén pedig visszaadja a klasszikus formulát. A képletben szereplő mennyiségek egy egyenes mentén való mozgásra vonatkoznak.

$$v_2 = \frac{v_1 + v_{rel}}{1 + \frac{v_1 \cdot v_{rel}}{c^2}}$$

Ebben a képletben a két megfigyelő v_{rel} sebességgel mozog egymáshoz képest. v_1 a mozgó test sebessége az egyik, v_2 a másik megfigyelő szerint. A c a fénysebességet jelöli.

1. Számold ki v_2 értékét abban az esetben, amikor $v_1 = 72 \text{ km/h}$, $v_{rel} = 108 \text{ km/h}$!

A fény sebessége $300\,000 \text{ km/s}$. Mennyivel tér el az eredmény a klasszikus Galilei-féle képletből kapható $180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}$ -tól?

2. Végezd el a számítást akkor is, ha 72 km/h sebességgel haladó vonaton fénysebességgel világítunk előre! Mekkora lesz a fény sebessége a sínekhez képest?
3. Mekkora lesz v_2 értéke, ha $v_1 = 250\,000 \text{ km/s}$, $v_{rel} = 200\,000 \text{ km/s}$?

A klasszikus fizika leírása szerint két tetszés szerinti esemény között eltelt idő és a megtörténtük helye közötti távolság független a megfigyelőtől. Azaz míg az időpont és a hely valamilyen viszonyítási ponthoz képest értelmezhető (pl.: Krisztus születése, a kiválasztott koordinátarendszer origója), addig két esemény *között* eltelt idő vagy két esemény helye közötti távolság már a megfigyelőtől független. Einstein fénysebességre vonatkozó alapfeltevései ennek a klasszikus képnek a megváltoztatására kényszerítenek. Ezek lényege, hogy sem a két esemény között eltelt idő, sem a két esemény helye közötti távolság nem független a megfigyelőtől. Mindezt megérthetjük, ha átlátjuk az egyidejűség problémáját.

Az órák szinkronizálása

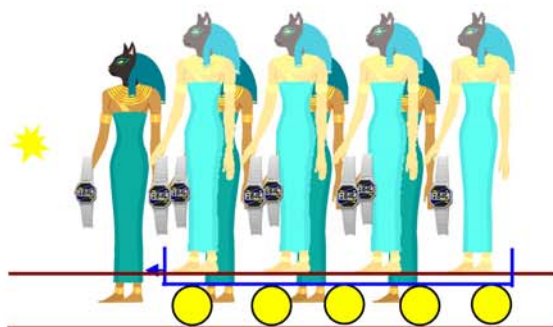
Két, egymáshoz képest mozgó megfigyelő óráinak szinkronizálása korántsem egyszerű feladat. Hogyan állapítható meg, hogy kinek jár pontosan az órája, és kinek siet vagy késik? A speciális relativitáselmélet szerint nem dönthető el, hogy az egymáshoz képest egyenletesen mozgó megfigyelők órái közül melyik jár pontosan. Nem értelmezhető tehát az abszolút idő, a megfigyelőknek (a vonatkoztatási rendszereknek) saját idejük van. Ez két esemény vonatkozásában azt jelenti, hogy egyidejűségük relatív.



Miből következnek ezek a kijelentések? Vizsgáljuk meg az órák szinkronizálásának problémáját!

Tételezzük fel, hogy tőlünk balra és jobbra egy egyenes mentén megfigyelők állnak, akiktől azt váránk el, hogy óráik ugyanúgy járjanak, mint a miénk. Előre eldönthetjük, hogy az órák egyeztetését egy fényjel segítségével fogjuk végezni. Ez a fényjel ott fog felvillanni, ahol mi vagyunk, merthogy ott hozunk létre egy fényfelvillanást. A fényfelvillanás pillanata lesz a nulla óra nulla perc a mi világunkban. Mivel tisztában vagyunk azzal, hogy a fény terjedéséhez idő kell, ezért a tőlünk balra és jobbra 100 méterre lévő megfigyelőket figyelmeztetjük, hogy óráikat ne nullára állítsák, hanem annyival állítsák előre, amekkora időre van szüksége a fénynek ahhoz, hogy 100 méter utat megtegyen. Amikor meglátják a fényjelet ezek a megfigyelők, akkor kell majd elindítaniuk a már jó előre beállított óráikat, így az ő óráik és a mi óráink együtt járása biztosított. Természetesen a tőlünk 200-300 méterre lévő megfigyelők távolságuknak megfelelően még jobban előre kell hogy állítsák óráikat, hiszen hozzájuk a szinkronizáló fényjel később érkezik meg. Ezzel a módszerrel nagy biztonsággal szinkronizálhatjuk egy egyenes mentén elhelyezkedő rendszerünk összes óráját!

Képzeljünk el most egy másik rendszert, amelyhez szintén egy egyenes mentén elhelyezkedő megfigyelők sokasága tartozik! Helyezkedjenek el ezek a megfigyelők ugyanazon egyenes mentén, mint amely mentén a mi rendszerünk megfigyelői elhelyezkedtek! Mozogjon ez a rendszer hozzánk képest állandó sebességgel a közös egyenesünk mentén! Úgy is elképzelhetjük ezt, mint egy végtelen hosszú vonatot, amely egy végtelen hosszú sínen halad. A mi rendszerünk a sín mellett állók gyülekezete, a hozzánk képest mozgó rendszer a vonaton lévő csapat.

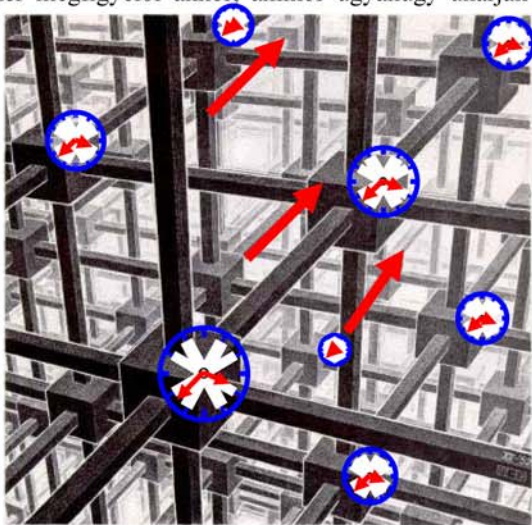


A hozzánk képest mozgó megfigyelők rendszere a mi eljárásunkat követve próbálja óráit szinkronizálni. A fényfelvillanás pillanatában rendszerük középpontja a fényfelvillanás helyén, azaz a mi rendszerünk középpontjában van. A mozgó rendszer középpontjától jobbra és balra ugyanúgy előre állították már korábban az órákat, ahogy ezt mi is megtettük a szinkronizálás előkészületei során. A mozgó rendszer óráit is ugyanaz a fényjel fogja elindítani, mint az állót.

Vajon helyesen járnak el a mozgó rendszer megfigyelői akkor, amikor ugyanúgy akarják szinkronizálni óráikat, ahogy ezt mi, állók korábban felvázoltuk? Joggal feltételezhetjük, hogy a mozgó rendszer megfigyelői hibát követnek el, hiszen az ő óráik mozognak. A felénk közeledő órák előbb indulnak el a kelleténél, hiszen szembejönnek a fényjellel, a tőlünk távolodó órák pedig később indulnak el, hiszen azok távolodnak a fényfelvillanás helyétől, s így beindításukig nagyobb utat kell megtennie a fénynek, mint ha állnának. Azaz a közeledő órák valójában sietnek, annál jobban, minél messzebb vannak tőlünk, a távolodók meg késnek, szintén távolságukkal egyenesen arányos mértékben.

Mivel azonban a nyugalom és a mozgás relatív, semmilyen eljárással nem dönthető el, hogy ki mozog igazából. A hozzánk képest mozgó megfigyelők magukat tekintik nyugalomban lévőnek, s minket mozgónak. Az órákra levont következtetésük azonos, csak-hogy nem a saját, hanem a mi óráinkat tartják pontatlannak. Amit biztosan tudunk: hogy az egymáshoz képest mozgó megfigyelők nem fognak egyetérteni abban, hogy kinek járnak szinkronban az órái, azaz az egyidejűség relatív.

Az ábrán látható mozgó rácsrendszer egy nyugvó rácsrendszeren hatol keresztül. A két vonatkoztatási rendszer órái nem járnak szinkronban.

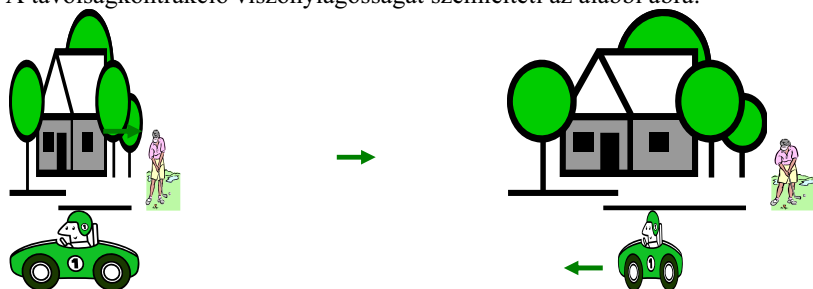


A mozgó megfigyelő órái lassabban járnak. Ezt nevezik idődilatációnak (időmegnyúlás), melynek értéke: $\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v_{rel}^2}{c^2}}$, ahol $\Delta t'$ két olyan esemény között eltelt idő a mozgó rendszerben, melynek időbeli távolsága Δt volt a nyugvó rendszerben.

A mozgó rendszer rúdjai rövidülnek, ezt nevezik távolságkontrakciónak (távolságösszehúzóds), melynek értéke: $\Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1 - \frac{v_{rel}^2}{c^2}}$, ahol $\Delta x'$ a nyugalomban Δx hosszúságú rúd kiterjedése a mozgó rendszerben.

Persze az továbbra is relatív, hogy ki mozog, tehát a dilatációt és kontrakciót az egymáshoz képest mozgó megfigyelők a másikra vonatkoztatva állapítják meg! Azaz nincs valamiféle „objektív”, „tényleges” lassulás vagy rövidülés.

A távolságkontrakció viszonylagosságát szemlélteti az alábbi ábra:



Ahogy az autós látja a hozzá képest mozgó házat és a golfozót.

Ahogy a golfozó látja a hozzá képest álló házat és a hozzá képest mozgó autót.

Vizsgáljuk meg az idődilatáció és a távolságkontrakció jelenségét konkrét példákon!

A műonok élete és halála

A műon a légkör magasabb rétegeiben, a Föld felszíne felett kb. 45 km-rel keletkező elemi részecske, amelynek felezési ideje a kísérletek tanúsága szerint 0,0000015 másodperc, azaz ennyi idő alatt bomlik el a műonok fele, újabb 0,0000015 másodperc idő alatt a felének a fele stb.

4. Közelítőleg hányad része ér földet (nem bomlik el) a közel fénysebességgel a Föld felé tartó műonoknak, ha nem vesszük figyelembe (helytelenül) sem az idődilatációt, sem a távolságkontrakciót?

(Ha megvizsgálod, mennyi idő alatt érnék el a műonok a Földet, s figyelembe veszed, hogy mennyi idő alatt feleződik a műonok száma, az eredményt könnyen megkaphatod!)

A mérési eredmények ezzel szemben azt támasztják alá, hogy a műonok nyolcad része eléri a Földet. Ezt a tényt úgy tudjuk értelmezni, hogy a nagy sebességgel mozgó műonok ideje annyival lassabban telik, hogy az ő rendszerükben csak három feleződés történt:

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, azaz 3 felezési idő, $3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 0,0000045$ másodperc telt el.



5. A fénysebesség hányad részével tér el a műion sebessége a fénysebességtől?

A műion rendszeréből nézve a Föld mozog nagy (közel fénysebességgel) a műion felé, így a kezdő pillanatban a Föld és a műion között lévő 45 km-es távolság kontrahálódik, azaz összehúzódik. Ebben az esetben az $1/8$ -nyi műion földet érésének oka nem a műion idejének dilataciója (hiszen a műion rendszerében a Föld ideje dilatólódott), hanem a kezdeti Föld-műion távolság jelentős kontrakciója, vagyis az, hogy a műionoknak kisebb utat kellett megtenniük, mint 45 km.

6. Milyen nagyságúra kontrahálódott a műionhoz rögzített koordinátarendszerben a 45 km-es távolság?

Utazás távoli csillagokba — az idődilataciót kihasználva



7. Mekkora sebességgel kell utaznunk egy űrhajóval ahhoz, hogy az idő az űrhajóban a földiek szerint fele olyan gyorsan teljen, mint a Földön?

Használd az idődilatacióra vonatkozó képletet!

8. Milyen messze jut el a Földtől az űrhajónk a földiek szerint, mialatt a Földön 5 év telik el?

Az űrhajó 5 év múlva visszafordul, s ugyanazzal a sebességgel vissz-

zatér a Földre.

9. Hány évet öregedett az űrhajó legénysége az út során?

10. Az álló űrhajó hossza 50 méter. Milyen hosszú volt az űrhajó menet közben odafelé és visszafelé a Föld vonatkoztatási rendszerében?

Az űrhajó utasai semmit sem észleltek az idő dilataciójából. Óráik normálisan jártak, biológiai folyamatok ennek megfelelően normális ütemben zajlottak. Mindössze annyi történt, hogy oda- és visszaútjuk során kevesebbet öregedtek, mint a földiek. Mivel ismerték a speciális relativitáselméletet, ezen egy cseppet sem lepődtek meg.

Az űrhajó személyzetéhez tartozott egy fiatal technikus, aki jó eszű, de fizikában kevésbé képzett ember volt. Ő a következő kérdést tette fel visszaérkezésükor:

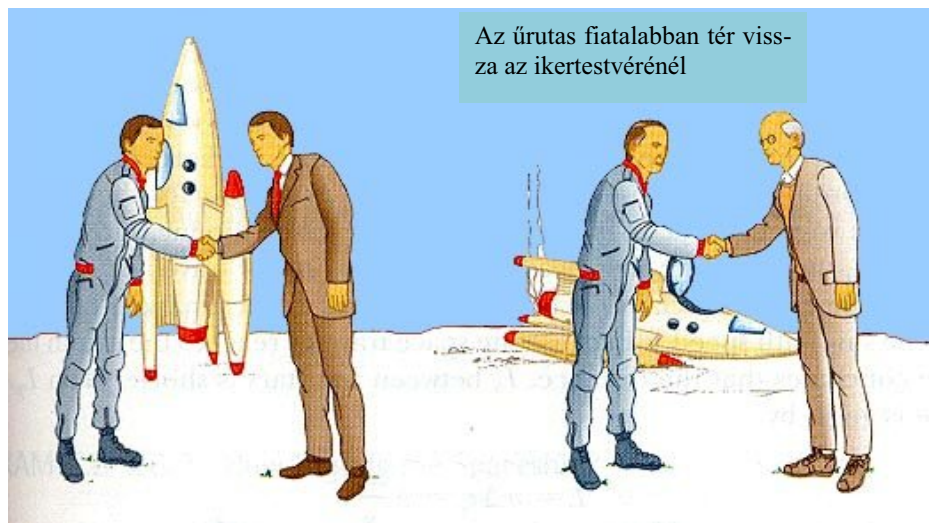
Mivel egyenletesen mozgottunk űrhajónkkal a Földtől távolodva és a Földhöz közeledve is, akár azt is kijelenthetjük a relativitás elvének megfelelően, hogy mi álltunk, s a Föld mozgott hozzánk képest. Ebben az esetben viszont az ő idejüknek kellett lassabban telnie, s visszaérkezésünk után azt kellett volna tapasztalnunk, hogy a földiek öregedtek kevesebbet. Miért nem ez történt?

Mi a különbség a két vonatkoztatási rendszer között?



11. A technikus logikája szerint mennyi időnek kellett az űrutazás során eltelnie a Földön? Mekkora a két időmérleg különbsége?

12. Saját ötleteidre vagy internetes információkeresésre hagyatkozva oldjad fel a fentebb megfogalmazott ellentmondást, amit egyébként ikerparadoxonnak neveznek! Írj részletes, szöveges magyarázatot!

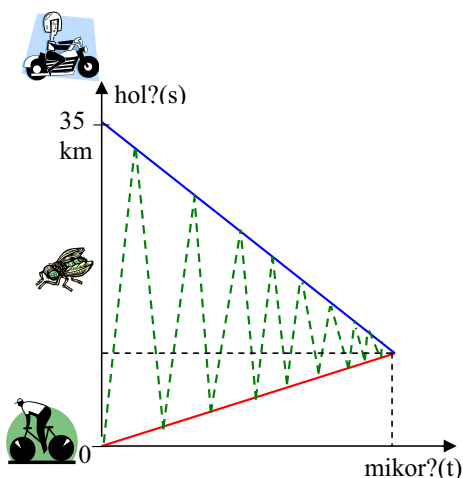


Egyenes vonalú egyenletes mozgás

Az alábbi feladatok megoldása rugalmasságot és ötletességet igényel. A megoldásban segítenek a rávezető kérdések, gondolatok, de egy dolgot mindig tarts a szemed előtt: *Minden nézőpont kérdése!*

A légy útja

Egy 10 km/h egyenletes sebességgel haladó kerékpáros és egy 25 km/h egyenletes sebességgel haladó motoros egyszerre indul egymás felé. Az indulás pillanatában 35 km távolságra vannak egymástól. A kerékpáros és a motoros között ez idő alatt egy légy repked ide-oda 40 km/h-s sebességgel. A légy a kerékpárostól indul el a motoros felé pontosan akkor, amikor a kerékpáros is elindul, de amint eléri a motorost, visszafordul és visszarepül a kerékpárhoz. Amint újra találkozik a kerékpárossal, megfordul és újra a motoros felé repül, s aztán így repked tovább, amíg a kerékpáros és a motoros találkoznak.



1. Mikor és hol találkozik a kerékpáros és a motoros?
2. Mekkora utat tesz meg a légy a találkozás időpontjáig?

A grafikonról leolvasható a légy útja. De vajon hány darabból áll ez az út? Az útszakaszok összeadásánál jobban járunk, ha az időre koncentrálnunk.



Sodródás a folyón

Egy folyóban sodródó úszóövön egy ember ül. Elhalad mellette két motorcsónak úgy, hogy ellenkező irányból, de egyszerre érnek az emberünkhöz. A motorcsónakok a parttal párhuzamosan haladnak,



sebességük állóvízben azonos lenne (a motorteljesítményük azonos). 1 perccel később a csónakok egyszerre megfordulnak és azonos motorteljesítménnyel visszafelé haladva közelednek a folyóban sodródó emberünk felé.

Melyik ér vissza az emberhez előbb?

Az ábra azt mutatja, hogyan alakulnak a sebességek a parthoz képest.

Ám az úszógumin ülő megfigyelő szempontjából minden másképpen néz ki. Ezt a következő ábra mutatja:



Az ábra egy autót mutat, melynek platóján hangyák menetelnek, miközben az autó egyenletesen halad előre. Ha azonos a sebességük és egyszerre haladtak el a sárga ék mellett, s azután egyszerre fordulnak

vissza az ék felé, vajon melyik ér vissza előbb az ékhez?

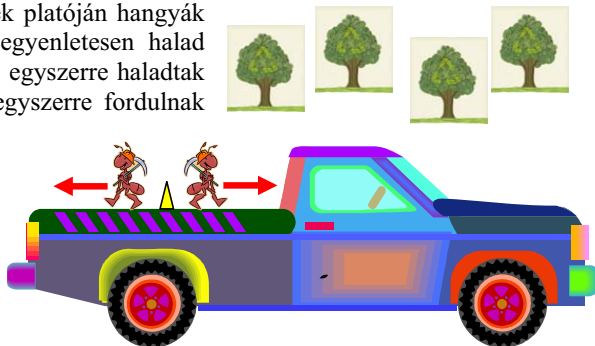
Mi köze van mindennek a folyós feladathoz?

3. Melyik ér vissza előbb?

Válaszodat indokold!

A halász és az elvesztett lélekmelegítő

Egy halász evez a csónakjában a folyón felfelé. Egyszer csak észreveszi, hogy a lélekmelegítőnek szánt itókás üveg kiesett a csónakból. Biztosan a hídnál történt, gondolja, majd megfordul, és az evezés erősségét fenntartva elindul a folyón lefelé. Így a híd alatt 200 m-rel a megfordulást követően 5 perc múlva eléri a palackot.



4. Mekkora a folyó sebessége?

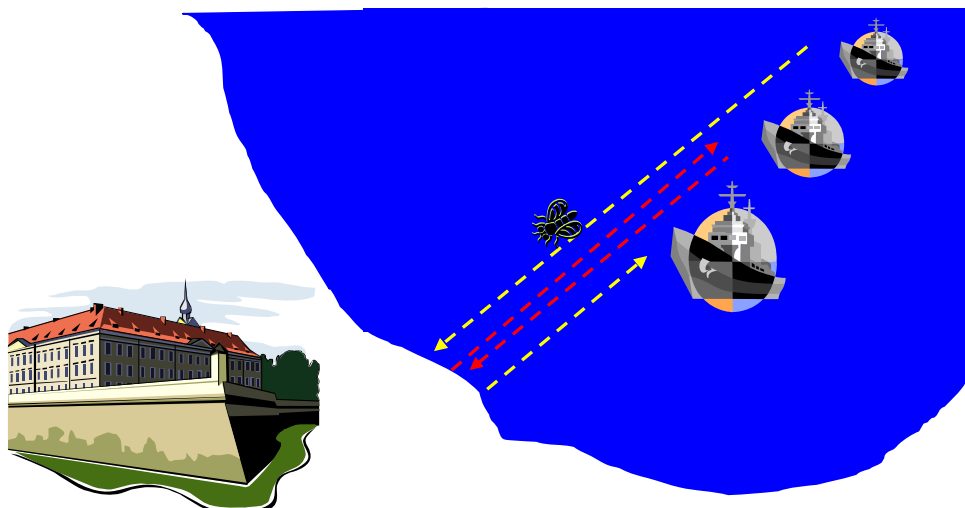
A feladat első pillantásra adathiányosnak tűnik. Hogyan is lehetne megoldani, ha nem tudjuk, mekkora sebességgel evez a halász!

De a helyzet korántsem ilyen reménytelen. A palackra rászállt egy légy, s amit a légy lát, nagy segítség lehet mindnyájunknak!

A légyradar

Egy megfelelően idomított légy akár radarnak is használható. A hajó közeledik a part felé. A hajóról a légy elrepül nyílegyenesen a partig, majd visszarepül a hajóra, ezután megállás nélkül újra a part a cél, majd megint a hajó. A légy az első oda- és visszaútat 35 perc alatt tette meg, a második oda- és visszaútra elegendő volt 25 perc. A légy sebessége 30 km/h.

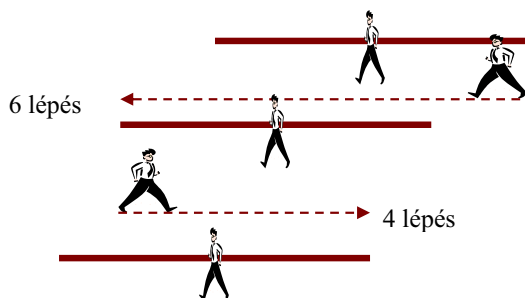
5. Mekkora a hajó sebessége? Hol volt a hajó kezdetben, s hol a második légyrepülés után?



Mekkora utat tett meg a hajó az alatt, mialatt a légy kétszer megfordult? Ha figyelmesen szemléled az ábrát, erre könnyen rájöhetsz! A többi már gyerekjáték!

A rúd hossza

Egy ember visz egy rudat. Egy másik gyors léptekkel elhalad mellette, s 6 lépést megtéve a rúd végétől az elejéig ér. Azután nyomban megfordul, s 4 lépést megtéve visszajut a rúd mozgásával szemben haladva az elejétől a végéig.

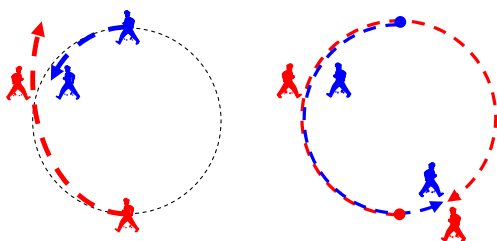


6. Hány lépésnek találná a rudat, ha a rúd állna?

Vajon mit jelent a „lépés” kifejezés ebben a feladatban? Távolságot? Időt? Mindkettőt? Mennyit ment előre a rúd, mialatt emberünk a végétől újra a végéig ért? Mennyit halad előre a rúd gyorsléptű emberünk minden lépése során?

Körben, szemben

Két ember körpályán, két átellenes pontból indulva szemben halad. 2 perc múlva találkoznak, elmennek egymás mellett, majd találkoznak megint.

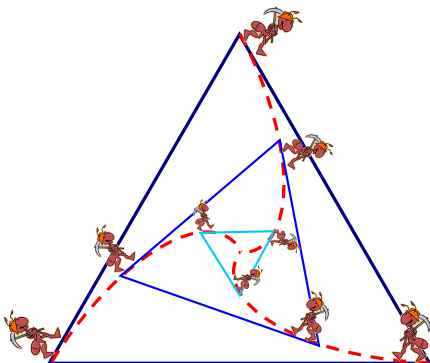


7. Mennyi idő múlva következik be a második találkozó?

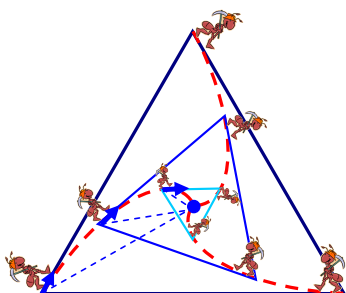
A rajz sokat segít!

Hangyák találkozója

Egy 50 cm oldal élű egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban 3 hangya csücsül. Majd egyszerre elindulnak egymás felé 1 cm/s sebességgel oly módon, hogy mindegyik hangya baloldali szomszédja felé tart folyamatosan.



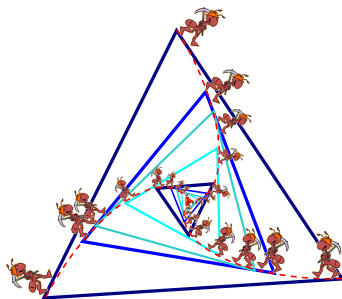
8. Mennyi idő múlva, s mekkora út megtétele után találkoznak a háromszög közepében?



A hangyák útját a rajzon piros, szaggatott vonal jelöli. Hangyák nem kicsinyednek persze útközben, de így érdekesebb a rajz ☺! A hangyák mozgásiránya mindig változik. Sebességük állandó, s állandó sebességgel közelednek a háromszög középpontja felé.

9. Mekkora ez a sebesség?

10. Mekkora utat kell megtenniük a középpont irányába, hogy megérkezzenek? Ha a hangyák világa abban az ütemben zsugorodna, amilyen ütemben a hangyák közelednek egymáshoz (vagyis a hangya-mértékegységek is zsugorodnának), akkor a hangyák egy *hangyányival* sem kerülnének közelebb egymáshoz! ☺



Gravitációs tér és elektromos tér összehasonlítása

Ha két különböző jelenségek között azonos szerkezetű törvények írják le, akkor az egyik jelenségkörben elsajátított trükköket a másik jelenségkörben is alkalmazhatjuk. Ez még akkor is megoldható, ha a két jelenségkörben némileg eltérő fogalomrendszert használunk.

Gravitációs vonzó erő	Elektrosztatikus kölcsönhatási erő
Általános tömegvonzás törvénye $ F = f \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$ ahol f a gravitációs állandó. $f = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ m a pontszerűnek tekinthető test tömege, R a két tömegpont távolsága. A gravitációs erő mindig vonzóerő. Az erő mindig a két pontszerű testet összekötő egyenes mentén hat.	Coulomb törvény $ F = k \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2}$ ahol k a Coulomb állandó. $k = 8.99 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$ q a pontszerűnek tekinthető test töltése, R a két töltött test távolsága. Az elektrosztatikus kölcsönhatást leíró erő azonos előjelű töltések között taszító erő, különböző előjelű töltések között vonzóerő. Az erő mindig a két pontszerű testet összekötő egyenes mentén hat.

1. Hasonlítsd össze két elektron között fellépő gravitációs vonzóerő és elektromos taszítóerő nagyságrendjét!

$$m_e = 3 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; \quad q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Gravitációs tér (mező)	Sztatikus elektromos tér (mező)
Egy test környezetében gravitációs tér jön létre. Ezt a teret egy egységnyi próbatömeg segítségével tudjuk feltérképezni. Az adott test gravitációs terének erősségét a test környezetében elhelyezett egységtömegre ható erő adja meg. $ E_g = \frac{ F }{m} = f \frac{M}{R^2}$ ahol m a próbatömeg nagysága, M a gravitációs teret létrehozó tömeg.	Egy töltés környezetében elektromos tér jön létre. Ezt a teret egy egységnyi próbatöltés segítségével tudjuk feltérképezni. Az adott töltés elektromos terének erősségét a töltés környezetében elhelyezett egységtöltésre ható erő adja meg. $ E = \frac{ F }{q} = k \frac{Q}{R^2}$ ahol q a próbatöltés nagysága, Q a teret létrehozó töltés.

A gravitációs térerősség, mint egységnyi tömegre ható erő, a gravitációs gyorsulásnak felel meg. Mértékegysége: $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Gravitációs tér (mező)	Sztatikus elektromos tér (mező)
A gravitációs tér jellemzésére erővonalakat használunk. A térerősség irányát egy adott pontban az erővonalakhoz húzott érintő iránya határozza meg, nagyságáról az erővonalak sűrűsége árulkodik.	Az elektromos tér jellemzésére erővonalakat használunk. A térerősség irányát egy adott pontban az erővonalakhoz húzott érintő iránya határozza meg, nagyságáról az erővonalak sűrűsége árulkodik.

Az ábra segítségével megmutatható, hogy az egységnyi felületre jutó erővonalszám úgy csökken a pontszerű töltés vagy kisméretű test környezetében a távolság függvényében, ahogy a térerősség függ a távolságtól.

Az A_1 felület az R_1 sugarú gömb felületének éppen ugyanakkora hányada, mint az A_2 felület a R_2 sugarú gömb felületének.

Így felírható a következő összefüggés:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

Mivel az A_1 és A_2 felületen áthaladó erővonalak száma azonos N (hiszen minden erővonal átmegy minkét felületen), ezért a felületegységre jutó erővonalszám a két esetben a következőképpen alakul:

$$\frac{N}{A_1} = k \frac{Q}{R_1^2}$$

$$\frac{N}{A_2} = k \frac{Q}{R_2^2}$$

azaz a térerősség egyenesen arányos a felületegységre jutó erővonalszámmal.

Levezetésünk egy gömbszimmetrikus ponttöltés terére vonatkozik, de általános érvényű.

- 2. Felhasználva az $E = k \frac{Q}{R^2}$ összefüggést, határozd meg, hogy mekkora legyen a Q töltésből kilépő erővonalak száma, hogy a felületegységre jutó erővonalszám éppen egyenlő legyen a térerősség nagyságával!**

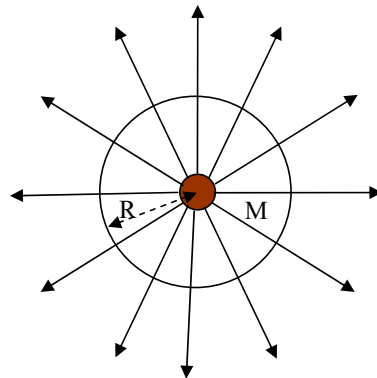
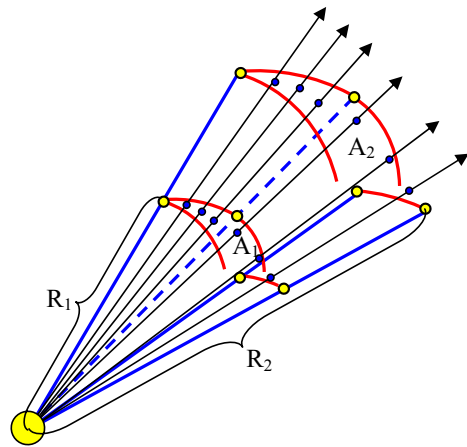
Végezzük el a levezetést a gravitációs térre:

$$\frac{N}{4R^2\pi} = f \frac{M}{R^2} \Rightarrow N = 4\pi \cdot fM$$

A fenti logika alapján, némi bátor általánosítással kijelenthető, hogy a felületegységre jutó erővonalszám számszerűen is megadja a térerősséget (akár elektromos, akár gravitációs térről van szó), amennyiben az előző két esetben meghatározott számú erővonal indul ki a tér forrásából (ami az elektrosztatikus térben a töltés, a gravitációs térben a tömeg).

Ha egy térrészt olyan felülettel veszünk körül, amelynek mentén a térerősség állandó nagyságú, az erővonalak a felületre merőlegesek. Mivel a felületen áthaladó erővonalak összes száma meghatározható a körülvevő térrészben lévő anyag tömegéből, a felület mentén a térerősség nagysága meghatározható.

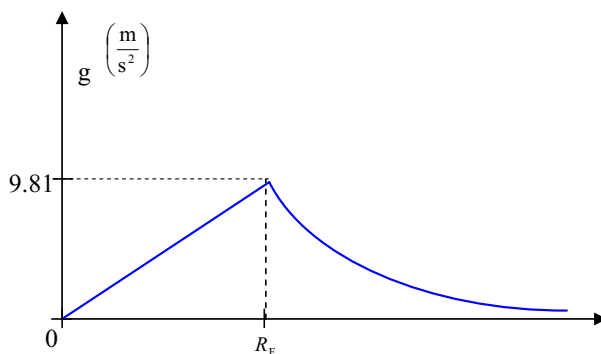
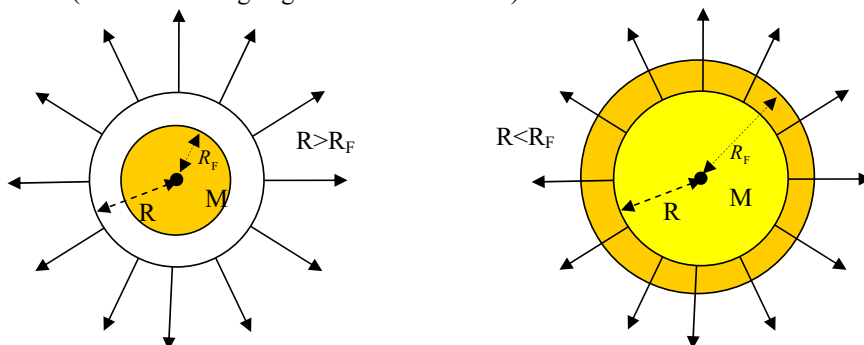
- 3. Mít állíthatunk egy Q töltéssel feltöltött szabályos fémgömb elektromos terének nagyságáról a gömbön kívül?**



A Föld gravitációs tere a Föld felszínén kívül és belül

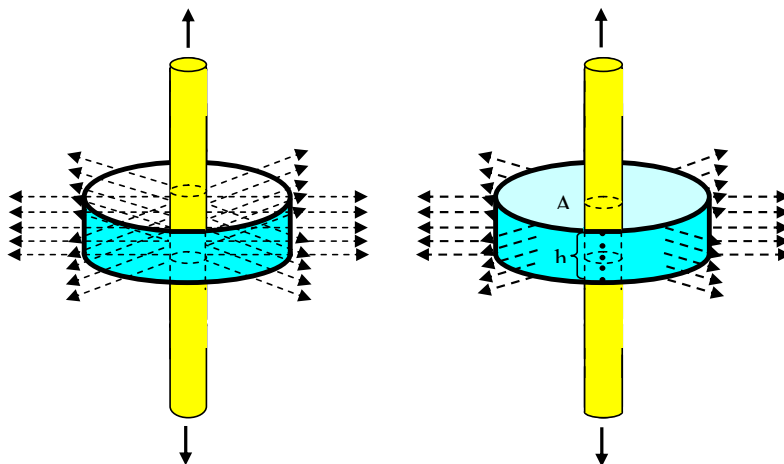
4. Az alábbi két ábra elemzésével igazold, hogy a gravitációs tér a Földön belül és kívül a lap alján látható függvény szerint alakul!

(A Földet homogén gömbnek feltételezve.)



Gravitáció a „ceruzabolygó” környezetében

5. A felületegységre jutó erővonalszám meghatározásával állapítsd meg, hogy hogyan függ a gravitációs tér a tengelytől vett távolságtól a „ceruzabolygó” környezetében, a rúd végeitől távol! Használd a rávezető kérdéseket!



Feltételezve, hogy a ceruzabolygó két végétől elég távol vagyunk, az erővonalakat a rúd felületére merőlegesnek tekinthetjük.

- Hány erővonal lép ki a rúdnak a hengerrel körülvelt darabjából?
- Szimmetria okokból a henger palástja mentén a gravitációs térerősség állandó. Mekkora a felületegységre jutó erővonalszám, azaz a gravitációs térerősség?
- Hogyan függ ez az érték a rúd középvonalának távolságától?

Keringés a ceruzabolygó körül

Tételezzük fel, hogy a ceruzabolygó körül egy úrhajó kering a rúd tengelyére merőleges síkban. A körpályára az úrhajót a rúd gravitációs vonzása kényszeríti.

6. Írd fel a körmozgás dinamikai feltételét!

7. Határozd meg a mesterséges hold sebességét, majd a keringési idejét a rúdbolygó tengelyétől vett távolságának függvényében!

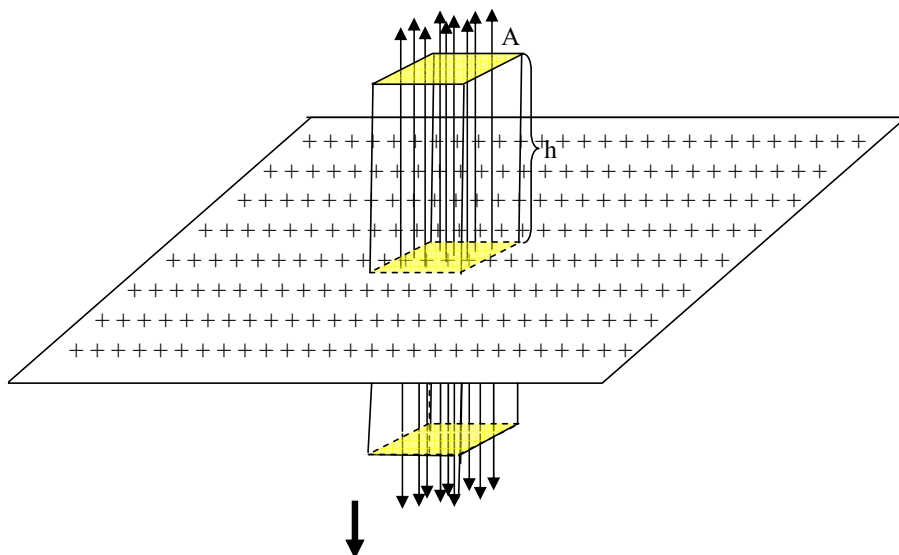
(Kepler 3. törvénye rúdbolygóra.) Milyen érdekességet vehetünk észre?

Elektromos tér végtelen, töltött síklap környezetében

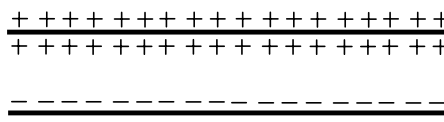
8. $\sigma \left[\frac{C}{m^2} \right]$ felületegységre jutó töltéssűrűséget feltételezve az ábra segítségével határozd

meg a töltött síklap széleitől távol, a síklap felett h magasságban az elektromos térerősséget! Igazold, hogy a fenti feltételek mellett a tér homogén!

- Határozd meg a kilépő erővonalak számát a felület és a felületi töltéssűrűség segítségével!
- Vegyed észre, hogy az erővonalak két irányban lépnek ki a síkból!



9. Milyen egy síkkondenzátor elektromos tere a kondenzátorlemezek széleitől távol, ha a síkkondenzátor



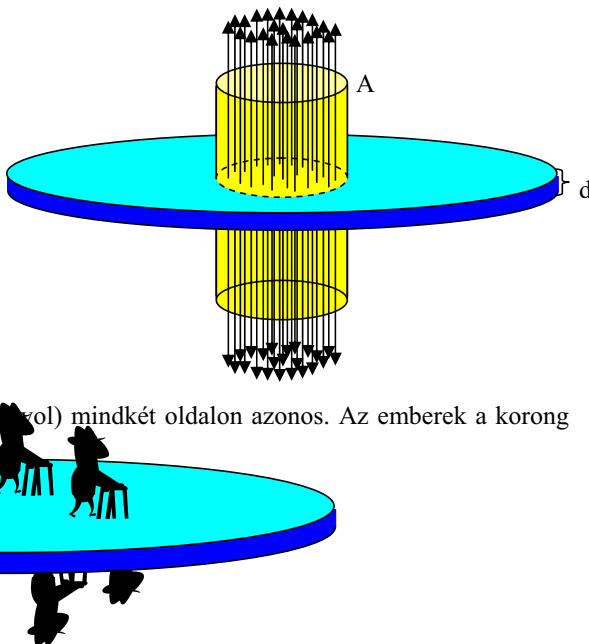
két, egymástól d távolságra lévő, azonos felületi töltéssűrűségű, pozitív, illetve negatív töltésű síkramezként írható le?

Ha a Föld egy lapos korong volna

Mekkora lenne a gravitációs gyorsulás a Föld felszínén, ha a Föld egy lapos korong volna?

Az eredményt a szélektől távol vizsgáljuk, s tételezzük fel, hogy a lapos Föld átlagos sűrűsége az általunk lakott Föld sűrűségével azonos!

Mint láthatjuk, a lapos korong Föld felszíne felett a gravitációs tér homogén a szélektől távol. A „ g ” érték tetszés szerinti távolságra a korong felületéről (de még mindig a szélektől távol) mindkét oldalon azonos. Az emberek a korong mindkét oldalán élhetnek.



10. Mekkora legyen a d vastagság, hogy a korong Föld szélektől távoli részein a gravitációs gyorsulás

$(g/10) = 0,981 \frac{m}{s^2}$ legyen? (A Föld átlagos sűrűsége 5515 kg/m^3 .)



11. Mit ábrázol a középkori metszet?

Ismertesd azt a korai csillagászati elképzelést, amely megfelel a rajznak!



Tehetlenségi erők (Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás)

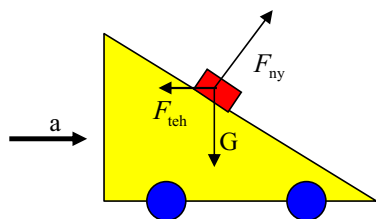
Ha egy buszon utazunk, s az hirtelen fékez, előreesünk. Olyan, mintha egy erő taszítana minket előre ilyenkor. Kívülről, az út mellől nézve a következő történik. A buszt egy erő lefékezte, mi pedig a buszban azért estünk előre, mert mozgásállapotunkat megőriztük. Mivel ránk nem hatott fékezőerő (hacsak nem „erősítettük” magunkat a buszhoz a kapaszkodó segítségével).

Az az erő, melyet a fékező buszban érzünk, a gyorsuló rendszer tehetlenségi ereje. Nagysága a gyorsulás esetén $\vec{F} = m\vec{a}$. Iránya ellentétes vonatkoztatási rendszerünk gyorsulásának irányával. A tehetlenségi erő a gyorsuló vonatkoztatási rendszer sajáttereje, amit csak akkor érzünk, ha a világot ebből a gyorsuló vonatkoztatási rendszerből szemléljük. Kívülről (inerciarendszerből) nézve nem létezik.

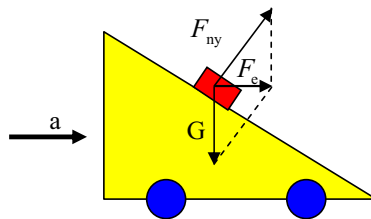
Gyorsuló lejtőn nyugalomban lévő test

Oldjuk meg kétféleképpen:

1. Mekkora gyorsulással mozogjon a lejtő, hogy a rajta lévő test nyugalomban maradjon? A súrlódás elhanyagolható.



Az első változatban a lejtőn lévő test ugyanúgy vízszintes irányú a gyorsulással mozog, mint maga a lejtő. Ebből a feltételeknek megfelelő gyorsulás és a lejtő hajlásszöge (α) közötti kapcsolat határozható meg. Határozd meg a lejtő gyorsulását!



A második változatban a mozgást a lejtőhöz rögzített koordináta-rendszerben írjuk fel. Ekkor a lejtőn lévő test nyugalma azt jelenti, hogy a rá ható erők eredője nulla. Igazold, hogy ha az előbbi feltevésből indulunk ki, a gyorsulás értékére az előzővel azonos eredmény adódik!

Gyorsuló lejtőn adott gyorsulással lefelé mozgó test

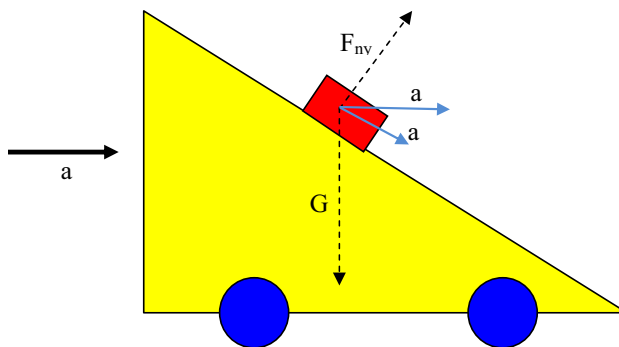
Amennyiben a test a gyorsuló lejtőn nincs nyugalomban, a problémát hasonlóan vizsgálhatjuk! Tételezzük fel, hogy egy test a gyorsuló lejtőn a_l gyorsulással csúszik le! Értelemszerűen $a_l < g \sin \alpha$, azaz a test gyorsulása kisebb, mint a nyugvó, súrlódásmentes lejtő esetében. (Ha $g > a_l > g \sin \alpha$ feladat még megoldható, amennyiben a lejtő az eddigivel ellentétes irányba gyorsul!)

Vizsgáljuk a problémát kívülről (inerciarendszerből) nézve:

A testre továbbra is csak két erő, a gravitációs erő és a nyomóerő hat.

A test gyorsulása egyenlő a lejtő vízszintes gyorsulásának, valamint a test lejtő menti gyorsulásának vektori összegével.

Ha kiszámoljuk a test eredő gyorsulását, az $\vec{a}$ és $\vec{a}_l$ vektorok



összegzésével, nem jutunk közelebb a megoldáshoz!

A probléma szokatlanságát azt jelenti, hogy a gyorsulás-összetevők és az erők rendre nem esik egy egyenesbe.

Tetszés szerinti komponensekre bonthatjuk az erőket és a gyorsulásokat.

Egyaránt ésszerű lehet vízszintes és függőleges komponenst használni (ekkor a $\underline{G}$ és $\underline{a}$ vektorokat nem kell felbontani), vagy lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges komponenseket használni (ekkor az $\underline{F}_{ny}$ és $\underline{a}_t$ vektorokat nem kell felbontani).

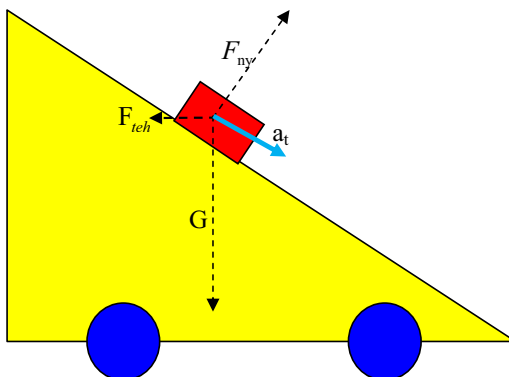
Oldd meg a feladatot mindkét változatban, írd fel Newton II. törvényét vízszintes és függőleges, valamint lejtő irányú és lejtőre merőleges koordinátatengelyeket választva!

2. Igazold, hogy a két eredmény azonos!

Vizsgáljuk a problémát gyorsuló koordinátarendszerből nézve!

Ebben a változatban háromféle erő hat a lejtőn lévő testre, melynek gyorsulása lejtő irányú.

3. Írd fel Newton II. törvényét lejtő irányú és arra merőleges koordinátatengelyeket alkalmazva! Igazold az előző feladatrészen kapott eredményt!

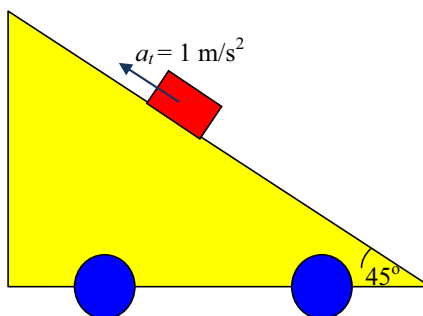


Felfelé a lejtőn

Az előbbi pontban alkalmazott eljárások alapján oldd meg a következő feladatot:

4. Mekkora vízszintes gyorsulással mozogjon az a 45° -os hajlásszögű, kerekekre szerelt lejtő ahhoz, hogy rajta $1 \frac{m}{s^2}$ gyorsulással felfelé mozogjon egy pontszerűnek tekinthető test?

$a = ?$



A súrlódás a lejtő és a test között elhanyagolható.

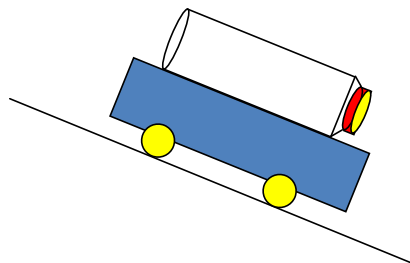
A feladatot akár inerciarendszerből, akár gyorsuló koordinátarendszerből is megoldhatod!

A „lecsúszó” család

Figyeld meg:

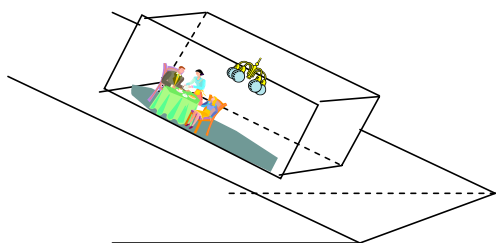
Akadálymentesen guruló kiskocsira szerelj kicsi, átlátszó gyógyszeres üveget, melyet félig töltsél meg festékes vízzel! Figyeld meg a vízszint elhelyezkedését, miközben a kiskocsi lecsúszik a lejtőn.

5. Írd le, mit tapasztalsz!

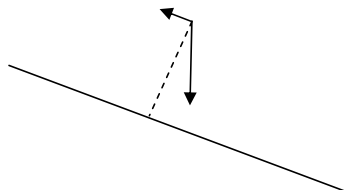


A következő feladatot gyorsuló koordinátarendszerből oldjuk meg!

Egy súrlódásmentes lejtőn ablaktalan lakókonténer csúszik le. A konténerben élő család éppen vacsorázik. Mit érzelnek a lejtőn való gyorsuló mozgásból?



Hogyan helyezkedik el a mennyezetre függesztett lámpa? S a leves a tányérjukban? Mi történik, ha a kisfiú leejti a villáját? Hol ér talajt?



6. Mekkora a lakókonténer gyorsulása a súrlódásmentes lejtőn?

7. Mekkora és milyen irányú tehetetlenségi erő hat ebben a rendszerben?

8. Milyen irányú eredő erő hat a lakókonténerben a lámpatestre és az elejtett villára?

A folyadék vízszintje mindig merőleges a folyadékra ható erők eredőjére.

9. Mit jelent mindez a lecsúszó lakókonténer esetében?

Következtetéseidet vedd össze a tapasztalataiddal (vízzel félig telt, kiskocsin leguruló gyógyszeres fiola)!

10. Miben hasonlít és miben tér el a szabadesés jelensége a csúszó lakókonténerben és a normális, külső világban?

A súrlódás nem elhanyagolható!

Hogyan érzékelhető a konténer belsejében, ha a csúszás nem súrlódásmentes? (A gyorsulást tekintsük továbbra is egyenletesnek!)

A kérdésre többféle válasz is adható.

Az egyik válasz a következő:

Ekkor a mennyezetre felfüggesztett tárgyak nem állnak „függőlegesen”, azaz a talajra merőlegesen. Az eltérés értékéből a súrlódási együttható a lakókonténer alja és a lejtő között közvetlenül megállapítható!

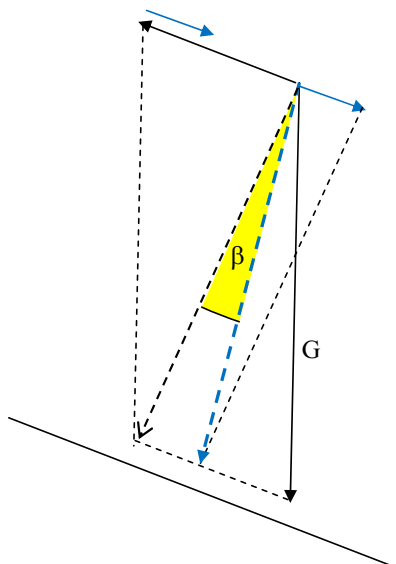
Vajon hogyan?

11. Mekkora a konténer gyorsulása, ha a lejtő és a konténer között μ súrlódási együtthatójú súrlódás van?

12. Mekkora a tehetetlenségi erő?

13. Ez az erő mennyivel kisebb, mint a súrlódásmentes állapothoz tartozó tehetetlenségi erő?

14. Mekkora β szögeltérést jelent ez egy felfüggesztett test esetében a súrlódásmentes állapothoz képest?



Az ábra segít a válaszok megadásában!

Ajánlj egy más módszert a súrlódás felismerésére!

Tehetetlenségi erők (Egyenletes körmozgás)

Egy egyenletesen forgó korongon ülő megfigyelő az ábrán látható módon egy rugó segítségével egy golyót tart nyugalomban az asztalon. A rugóban ébredő erőt a rugó megnyúlása mutatja.

1. Hogyan értelmezzük a rugó megnyúlását, a folyamatot kívülről szemlélve, az egyenletes körmozgás dinamikájának ismeretében?

A centrifugális erő

A korongon ülő és azzal együtt forgó megfigyelő számára a golyó nyugalomban van annak dacára, hogy a rugóban ébredő erő a középpont felé húzza. Mivel az egyensúly feltétele az erők eredőjének nulla volta, a megfigyelő egy sugárirányban kifelé mutató erőt feltételez, mely az egyenletes körmozgást végző rendszerben nyugalomban lévő testekre hat. Ez a centrifugális erő. Nagysága a rugóerővel egyenlő, azaz

$$F_{cf} = m \frac{v^2}{r}.$$

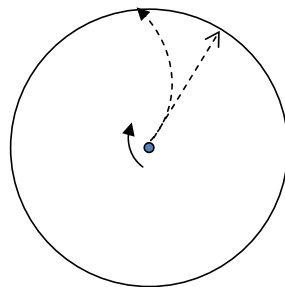
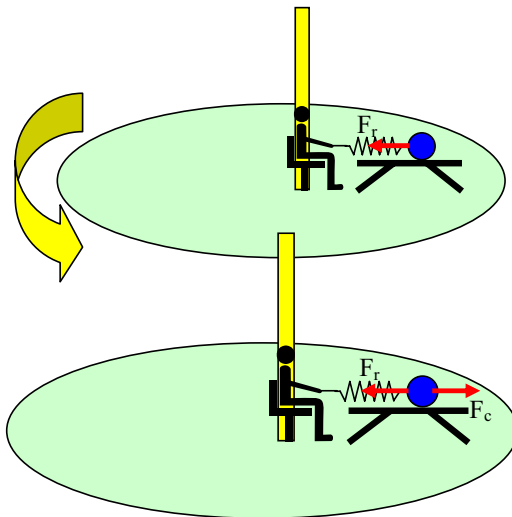
2. Honnan tudhatjuk, hogy a rugóerő $F_r = m \frac{v^2}{r}$?

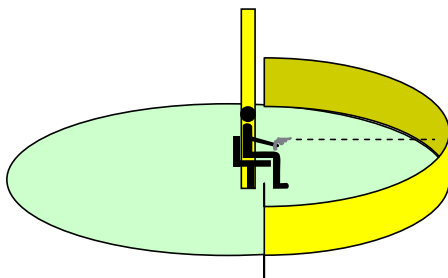
Aki utazott egyenletes körmozgást végző rendszerben, például ült körhintán, megtapasztalta a centrifugális erőt.

3. Mutasd be, hogyan nyilvánul meg a centrifugális erő a vidámpark valamelyik általunk választott körmozgást végző játékán!
4. Értelmezd a súlytalanság állapotát a Föld körül keringő űrhajóból szemlélve!
5. Mi történik a centrifugában, hogyan választja el ez az eszköz a ruhát és a benne lévő vizet?
6. Számold ki, hogy az Egyenlítő vidékének lakosaira mekkora centrifugális erő hat a Földön, s ez az erő hányad része a testekre ható gravitációs vonzásnak!
7. Hogyan értelmezhető az Egyenlítő vidékének lakosaira ható erő kívülről (inerciarendszerből) szemlélve?

A Coriolis-erő

Egy forgó korongra gyors mozdulattal megpróbálunk krétajelket rajzolni úgy, hogy a korongon egyenletesen húzzuk végig a krétát a korong közepétől a korong széle felé, az ábrának megfelelően. Azt fogjuk azonban tapasztalni, hogy a korong forgása miatt a vonal a koronghoz viszonyítva elgörbül, s az ábrának megfelelő görbe krétavonal keletkezik a korongon.





Ha egy korongon ülő, a koronggal együtt forgó kísérletező egy testet a korong széle felé sugárirányban meglök, azt fogja tapasztalni, hogy egyenes haladás helyett a test oldalirányban eltérül, ahhoz hasonlóan, ahogy az egyenesnek szánt krétavonal is elgörbült a korong forgása miatt. A koronghoz rögzített megfigyelő az egyenesen haladó testek ezen oldalirányú eltérülését egy, a forgó rendszerben fellépő tehetetlenségi erőnek, a Coriolis-erőnek tulajdonítja.

8. Határozzuk meg a Coriolis-erő nagyságát egy speciális esetben!

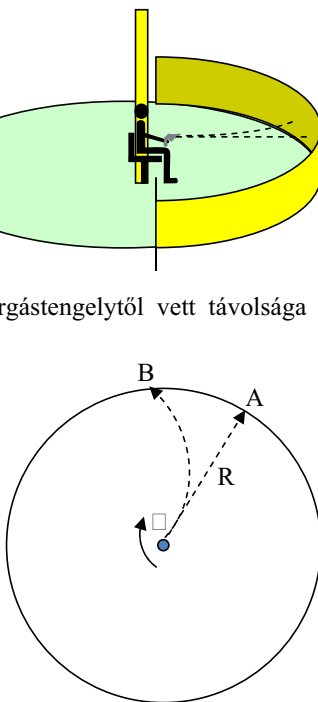
A forgó korongon ülő megfigyelő pisztollyal a koronghoz rögzített fal felé lő.

A lövedék nem a pisztolycső irányában csapódik be a falba, hanem attól eltérül a Coriolis-erő miatt. (Legalábbis a forgó rendszerben lévő megfigyelő szerint).

- Ha a pisztoly forgástengelytől vett távolságát elhanyagoljuk, és a fal forgástengelytől vett távolsága R , a rendszer szögsebessége ω , a golyó sebessége v , mekkora a golyó oldalirányú eltérülése?
- Mennyi ideig tart a golyó útja?
- Ez idő alatt mennyit fordult el a korong?
- Mekkora a korong oldalirányú elmozdulása becsapódáskor?

Mivel a golyó repülési idejét kellően kicsinek tekinthetjük, ezért a közben fellépő Coriolis-erő okozta gyorsulás állandónak vehető, és így a megtett út és a gyorsulás kapcsolatának leírására használhatjuk az $s = \frac{a}{2} t^2$

összefüggést. Mivel az s ív – tekintettel a rövid időre – egyenes szakasszal közelíthető, az összefüggés átrendezéséből a Coriolis-erő okozta gyorsulás és így a Coriolis-erő megkapható.



A centrifugális és centripetális erő

Az 1. pontban megismertük a centrifugális erő fogalmát. A centrifugális erő egy egyenes körmozgást végző rendszer tehetetlenségi ereje, mely a forgó rendszerben nyugalomban lévő testekre is hat. Nagysága $F_{cf} = m \frac{v^2}{R} = mR\omega^2 = mv\omega$, és sugárirányban a rendszer forgási középpontjától kifelé irányul.

A külső szemlélő számára (inerciarendszerből) a centrifugális erő nem létezik, az egyenes körmozgást végző testet egy, a kör középpontja felé mutató állandó erő kényszeríti körpályára, amely lehet például a nyomóerő a centrifugában, a gravitációs erő a Föld körül keringő űrhajóban vagy nyomóerő és gravitációs erő eredője az Egyenlítőn élő emberek

esetében. Ezt az eredő erőt (melynek oka, kiváltója számos hatás lehet) centripetális erőnek nevezzük. Tehát míg a centrifugális erő egy közvetlenül megtapasztható erő a forgó rendszerekben, addig a centripetális erő a körmozgást okozó hatások gyűjtőneve inerciarendszerből nézve.

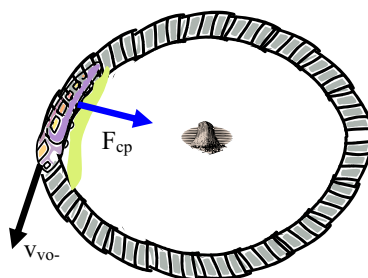
A centripetális erő nagysága $F_{cp} = m \frac{v^2}{R} = mR\omega^2 = mv\omega$, és sugárirányban a kör közepe felé mutat.

Az elmondottakból következik, hogy nézőpontunktól függ, vajon a centripetális vagy a centrifugális erő fogalmát használjuk egy problémában. Ezek egyszerre, egyfajta megközelítést alkalmazva nem szoktak előfordulni.

A Coriolis-erő meghatározása egy szokatlan példa segítségével

Az egyenletes körmozgást végző rendszerekben nyugalomban lévő testekre csak a centripetális erő hat. Ha egy test mozog az egyenletes körmozgást végző vonatkoztatási rendszerben, akkor egy újabb tehetetlenségi erő, a Coriolis-erő is fellép. Ahogy ezt a 2. pontban kiszámoltuk, a Coriolis-erő a mozgás irányára merőleges, a vonatkoztatási rendszer forgásának irányával ellentétes, nagysága $F_{Cor} = 2mv\omega$.

A következő problémánk egy szikla körül keringő, körpályán haladó vonatról szól.

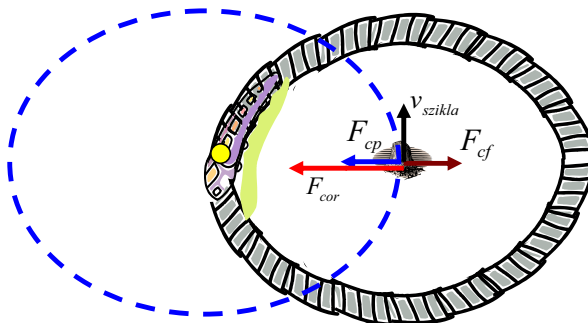


9. Milyen hatás felelős a körmozgásért, azaz mi adja a centripetális erőt ebben az esetben?

Némileg abszurd módon ez a probléma felfogható úgy is, hogy a szikla végez körmozgást a vasúti szerelvényt húzó mozdonyhoz képest, azaz a szikla egy egyenletes körmozgást végző rendszerben végez egyenletes körmozgást úgy, hogy a vasúthoz, mint középponthoz képest iránya és távolsága nem változik. Szemléltetésül képzeljünk el egy hangyát, amint egy forgó lemezjátszó korongjának a szélén éppen akkora sebességgel halad a forgással ellentétes irányba, mint amekkora sebességgel a korong széle forog. Így kívülről nézve a hangya áll. A sziklára nyilván nem hat semmilyen oldalirányú erő, de ez a nulla erő felfogható a körmozgást végző vonatkoztatási rendszerben fellépő tehetetlenségi erők eredőjének is.

10. Hogyan írható le a sziklára „ható” tehetetlenségi erők rendszere ebben a felfogásban?

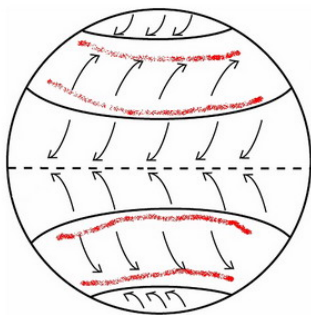
11. Az ábra segítségével igazold a Coriolis-erő nagyságára kapott korábbi összefüggést!



A Coriolis-erő a mindennapokban

A nagy földi légkörzésben alapvető szerepe van a Coriolis-erőnek.

12. Nézz utána ennek a kapcsolatnak!



A Foucault-inga

A Föld forgásának első közvetlen bizonyítékát Foucault ingája szolgáltatta. Az ingát a párizsi Pantheonban függesztették fel.



A párizsi Pantheon

13. Mikor élt Foucault?

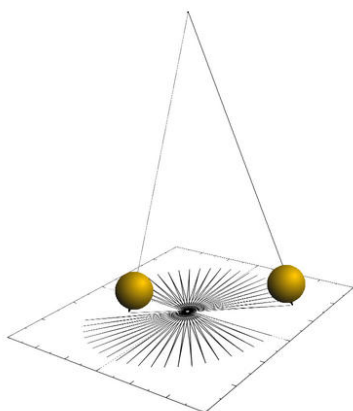
14. Mikor épült a Pantheon Párizsban?

15. Melyik orosz város mely székesegyházában függesztettek fel hasonló ingát?

16. Mi található az ingán kívül a Pantheonban?

Az inga lengése során megőrzi lengési síkját. Mivel a Föld közben elfordul, ez a sík a Földhöz képest elmozdul. A Földön álló megfigyelők a lengési sík elfordulását a Coriolis-erőnek tulajdonítják. (Inerciarendszertől nézve csak a Föld fordult el a lengő inga alatt.)

Az inga hegye által kirajzolt vonal függ attól, melyik szélességi körön található az inga.





Jean Foucault (1819-1868)

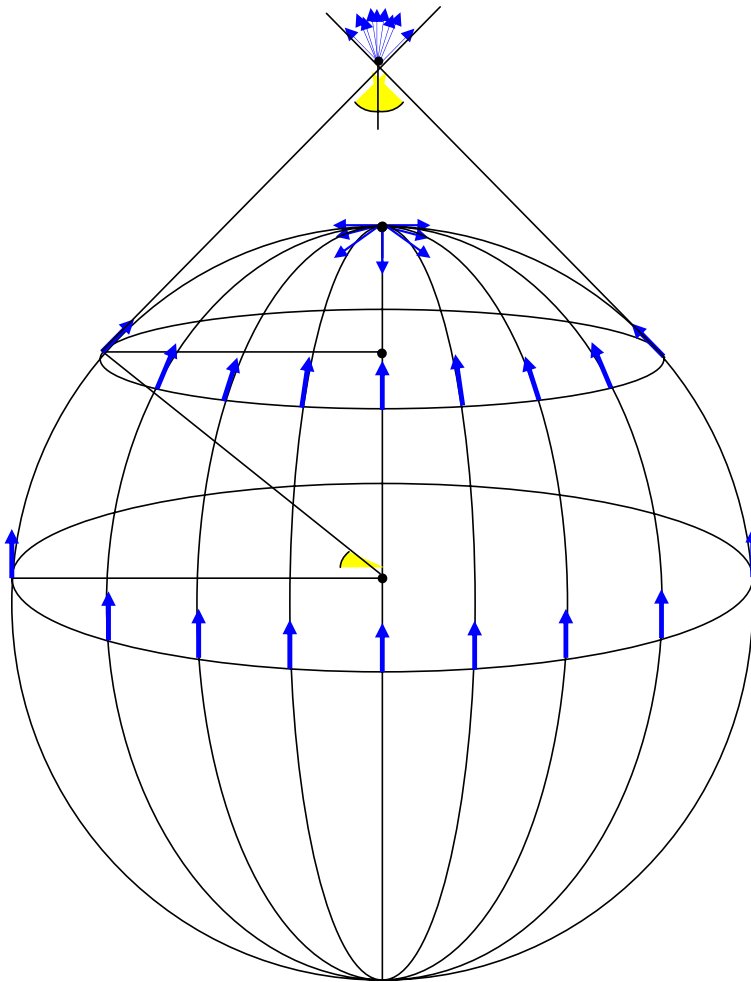
17. Nézz utána Foucault fénysebességmérési eljárásának!

18. Vajon milyen ábrát rajzol ki az inga hegye az Egyenlítőn?

19. Vajon milyen ábrát rajzol ki az inga hegye a sarkokon, s mennyi a rajz elkészültének „periódusideje”?

20. Hogyan függ össze az inga helyének szélességi köre az inga hegye által leírt vonallal?

A kérdések megválaszolásában segít az ábra!

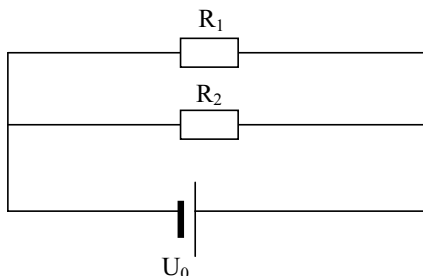


Egyenáramú hálózatok

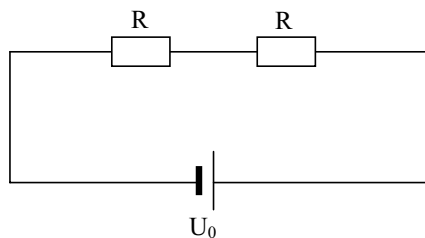
Ezen a feladatlapon az elektromos ellenállások kapcsolásának néhány érdekesebb esetét vizsgáljuk. Bevezetésül tekintsük át az egyszerű soros és párhuzamos kapcsolás szabályait!

Soros és párhuzamos kapcsolás

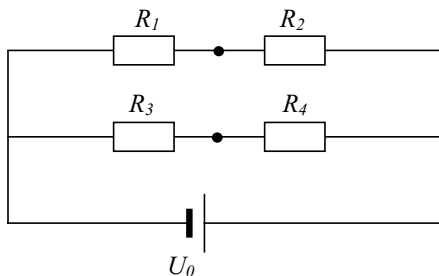
1. Az ábrán vázolt soros, illetve párhuzamos kapcsolás esetén mekkora az egyes ellenállásokon átfolyó áram (I_1 ; I_2), illetve az egyes ellenállásokra eső feszültség (U_1 ; U_2) a telep belső feszültségével (U_0) és az ellenállások nagyságával (R_1 ; R_2) kifejezve?



Merre folyik az áram?

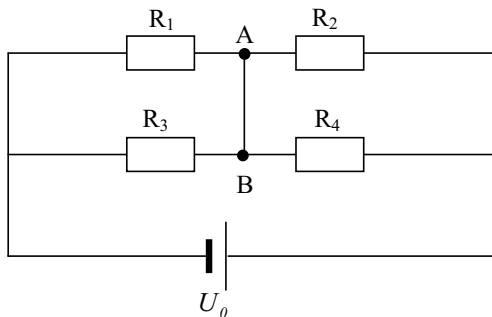


2. Add meg az áram- és feszültségviszonyokat az alábbi kapcsolásban is mind a négy ellenállásra!

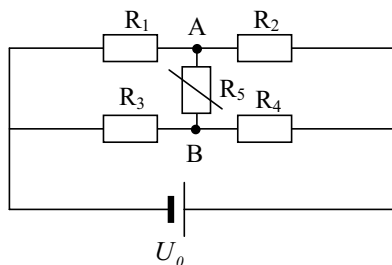


Az A és B pontokat összekötjük egy vezetővel.

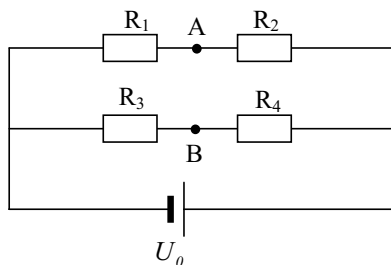
3. Mikor nem folyik áram A és B között? Mi a feltétele annak, hogy áram folyjon A és B között?



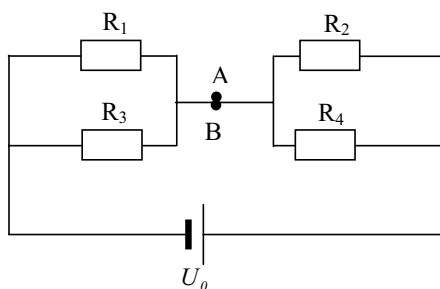
Ha A és B pont között nem folyik áram, akkor az A és B pont közötti vezetékszakasz kiemelhető! Még akkor is, ha egy ellenállás van az AB vezetékszakaszon.



Ekkor a hálózat a következőképpen rajzolható át:



Ha A és B között folyik áram, a hálózat a következőképpen rajzolható át (természetesen R_5 nélkül):

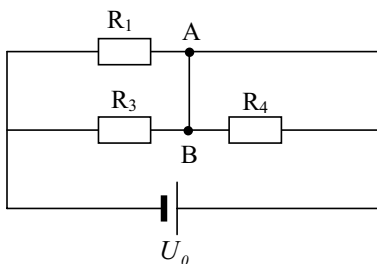


Az A és B pont egybeejthető, amennyiben teljesül a korábban megfogalmazott feltétel, s nem folyik áram A és B pont között.

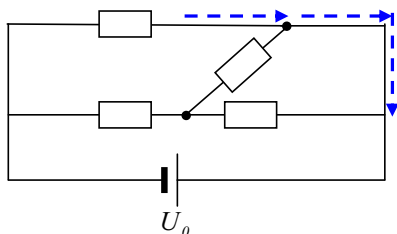
4. Mutasd meg, hogy ebben az esetben a fentebbi két kapcsolás egyenértékű! A számításához használhatsz a feltételnek megfelelő konkrét ellenállás értékeket is.

Gyakorló feladatok

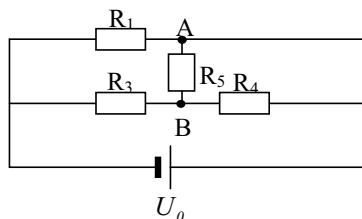
5. Mekkora lesz a korábban megismert áramkör eredő ellenállása, ha az R_2 ellenállást az ábrának megfelelően nullára csökkentjük?



6. Mekkora lesz az R_5 ellenállást is tartalmazó áramkör eredő ellenállása, ha az R_2 ellenállást az ábrának megfelelően nullára csökkentjük?



A feladat megoldása (a hálózat átrajzolása) során használjuk ki, hogy az ellenállás nélküli (elhanyagolható ellenállású) vezetékszakaszok rugalmasan hajlíthatók, rövidíthetők, tágíthatók!

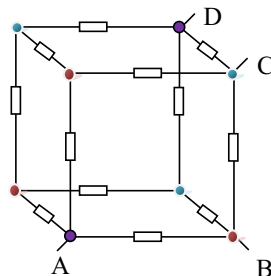
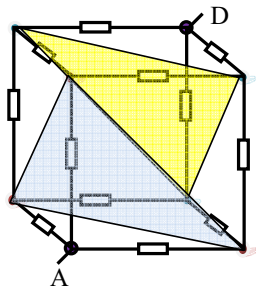


Összetett hálózatok

Az ábrán látható kocka minden élén azonos nagyságú (1Ω) ellenállás van. Mekkora az eredő ellenállás az A és D pont között?

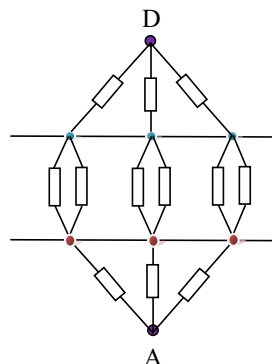
Mivel az A csúcsból kiinduló és a D csúcsba beérkező élek mentén az ellenállás azonos, ezért az A-val és D-vel szomszédos 3-3 csúcs rendre ekvipotenciális, közöttük feszültségekülönbség nincs, azaz ha összekötjük azokat egymással, áram nem fog folyni közöttük.

Az azonos potenciálú (azonos feszültségeséssel jellemezhető) pontokat egy-egy „vezető síkkal” kötöttük össze az ábrán. Ezek után a hálózat síkba is kiteríthető:



Az ábráról könnyen leolvasható, hogy 3-6-3 párhuzamosan kapcsolt ellenállásblokkot kapcsoltunk sorosan.

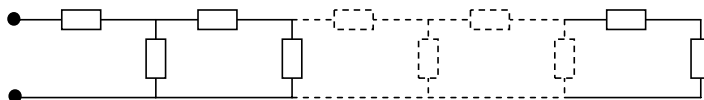
Így az eredő ellenállás $R_e = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \Omega$



7. Határozd meg a kocka alakú hálózat eredő ellenállását az A és C, illetve az A és B pontok között!

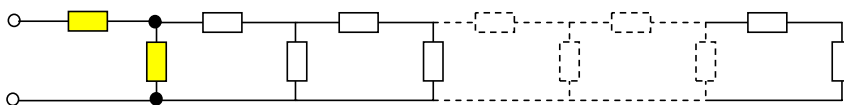
Végtelen hálózatok

Az ábrán látható végtelen hálózat csupa 1Ω -os ellenállásból áll. A szaggatott vonallal jelölt hálózati elemek helyén végtelen sok hálózati elem képzelendő el. Mekkora az eredő ellenállása?



Amennyiben a végtelen tagból álló hálózat eredő ellenállása véges, akkor nem változhat meg ez az érték, ha hozzákötünk a hálózathoz még egy elemet az alábbi módon. Látható, hogy az új hálózat pontosan ekvivalens a régivel, hiszen egy új szakasz hozzáadva ugyanúgy végtelen

sok szakaszból áll. Tehát az alábbi végtelen hálózatnak ugyanakkora lesz az eredő ellenállása, mint a fentebbinek.



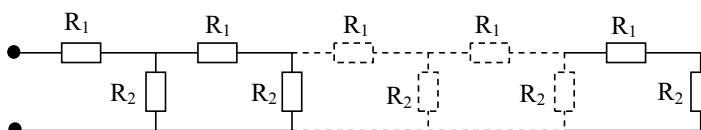
Az eredő ellenállást R_e -vel jelölve a következő egyenletet kapjuk:

$$R_e = 1\Omega + \frac{1\Omega \cdot R_e}{1\Omega + R_e}$$

Az egyenlet felírásakor felismertük, hogy az R_e eredő ellenállású lánc egy 1Ω -os ellenállással van párhuzamosan kötve, s az egészhez sorosan még egy 1Ω -os ellenállást kötöttünk.

8. Oldd meg a fenti egyenletet, s határozd meg az eredő ellenállás értékét!

9. Határozd meg az eredő ellenállást az alábbi végtelen hálózatban, melyben két különböző ellenállás van!

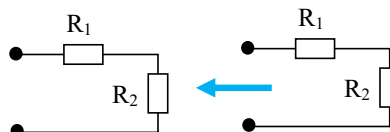


Kezdjük el lépésenként felépíteni a végtelen hálózatot! Az első tag ellenállása $X_1 = R_1 + R_2$, azután hozzáillesztünk még egy tagot, ekkor ellenállása X_2 , majd még egyet stb. Hogyan

lehet meghatározni az eredő ellenállások sorozatát?

10. Add meg azt a számítási eljárást, mellyel a sorozat n . eleme, X_n meghatározható az előző X_{n-1} elemből!

$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$ stb.



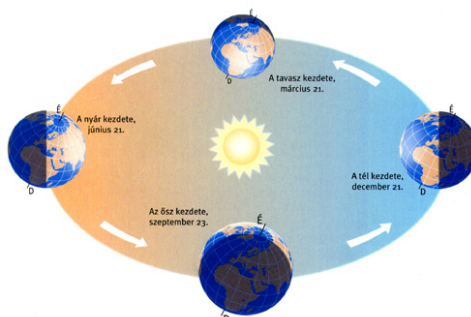
A Hold, a Föld és a Nap

Az életünket leginkább meghatározó három égitest mozgásának legfontosabb sajátosságait és a kölcsönös helyzetükből fakadó jelenségeket tárgyaljuk ezen a feladatlapon.

A Föld keringése a Nap körül

A Föld a Nap körül enyhén lapult ellipszispályán (majdnem körpályán) kering. Keringési ideje 365 nap, 6 óra 9 perc 10 másodperc.

1. Értelmezd az ábra segítségével az évszakok változását!

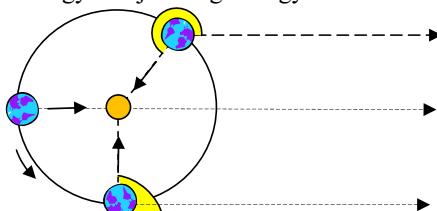


A Föld forgása tengelye körül



A Föld tengely körüli forgásának periódusideje már korántsem olyan egyszerűen meghatározható. Felmerül ugyanis a kérdés, mikor beszélhetünk egy tengely körüli forgásról. A Nap két delelése közötti időt egy „Nap napnak”, átlagosan 24 órának tekintjük. Csakhogy a delelő Napot a Föld pályájának kis mértékben eltérő pontjából figyelhetjük meg két egymást követő napon.

24 óra alatt a Föld a távoli állócsillagokhoz képest egy kicsivel több, mint egy fordulatot tesz meg, Nap körüli pályáján való előrehaladása miatt. Az ábra ezt az eltérést negyedévre és kb. 8 hónapra vetítve mutatja.



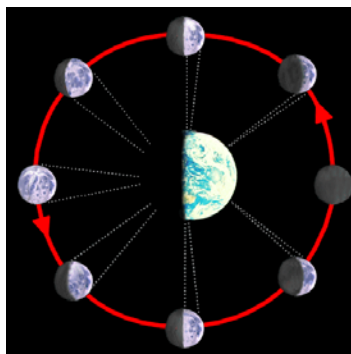
Az ábrából megállapítható, hogy a Föld tengely körüli forgásának periódusa a végtelen távoli állócsillagokhoz (állni látszó) képest kevesebb, mint 24 óra (sziderikus forgásidő). Miközben a Föld a Naphoz képest 365,24 fordulatot tesz meg, addig a távoli állócsillagokhoz képest a fordulatok száma ennél több.

- Egy év alatt hány fordulatot tesz a Föld a távoli állócsillagokhoz képest?

2. Állapítsd meg, mekkora a Föld keringési ideje a távoli állócsillagokhoz képest!

A Hold tengely körüli forgása és keringése a Föld körül

A Nap megvilágítja a Holdnak a Nap felé eső oldalát. A megvilágított résznek azonban csak egy bizonyos hányadát látjuk. Mivel a Hold kering a Föld körül, ez a hányad mindig változik, ebből fakadnak a Hold fázisai. A képen jól látható, milyen irányból süt a Nap. Megfigyelhetjük azt is, hogy mennyit látunk a Hold megvilágított félgömbjéből a Föld körüli keringés különböző fázisaiban. A Hold nemcsak kering a Föld körül, hanem forog is a saját tengelye körül. A Hold a távoli állócsillagokhoz viszonyítva 27 nap 7 óra 43 perc alatt tesz meg





egy fordulatot, és ez a forgási sebesség pontosan annyi, mint amennyi idő alatt a Hold megkerüli a Földet, ezért a Hold mindig ugyanazon oldalát mutatja a Föld felé.

Két telihold között eltelt időszak azonban 29 nap 12 óra 44 perc.

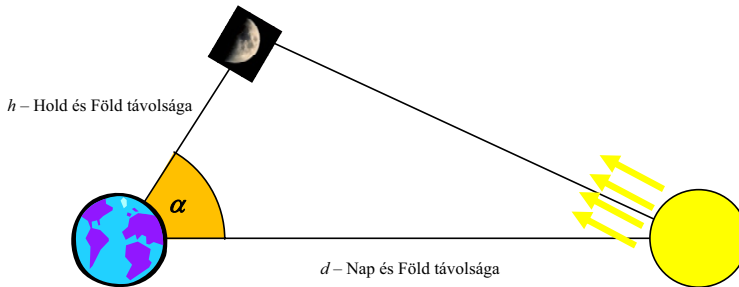
3. Mi lehet az eltérés magyarázata?

A Hold az égbolton felkel, majd lenyugszik. Erős fénye miatt ezt nem csak éjszaka figyelhetjük meg. Fázisai a Nap–Föld–Hold kölcsönös helyzet függvényei.

4. Vajon vannak a Földnek fázisai a Holdról nézve? Milyen lehet a földfelkelte a Holdon? Mi lehet a hasonlóság és mi a különbség a Hold Földről megfigyelhető változása, illetve a Föld Holdról megfigyelhető változása között?

Távolságok és arányok

A Nap–Föld távolság, valamint a Föld–Hold távolság arányát már az ókori görög filozófusok is ismerték. Arisztarkhosz (i.e. 320 és 250 között élt) helyesen ismerte fel a holdfázisok okát, s így az alábbi mérést tervezte meg:



5. Honnan tudta Arisztarkhosz, mikor alkot a Nap, a Hold és a Föld derékszögű háromszöget? α szöveget megmérve hogyan írható fel a d és h aránya?

Arisztarkhosz a távolságok arányát tudta kiszámítani. A távolságok nagyságának pontos meghatározására még évezredekkel várni kellett.

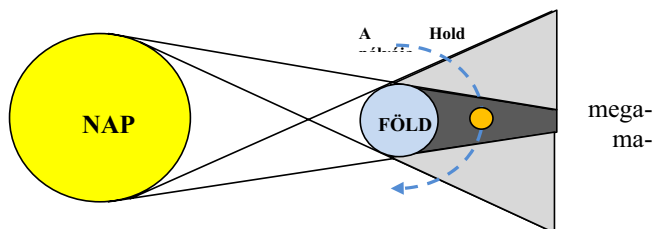
6. Keresd meg a Nap–Föld és a Föld–Hold távolságadatokat egy táblázatból, s készíts arányos rajzot a keringési idők felhasználásával a Nap, a Föld és a Hold rendszeréről egy teljes évre vetítve! A rajzon tüntesd fel a Föld és a Hold Nap körüli pályáját is!

7. A Föld és a Hold tömegének felhasználásával hasonlítsd össze a Föld és a Hold közötti gravitációs vonzóerőt a Nap és a Hold közötti vonzóerővel!

8. Milyen következtetésre juthatunk az előző két feladat eredményének egybevetésével?

Holdfogyatkozás, napfogyatkozás

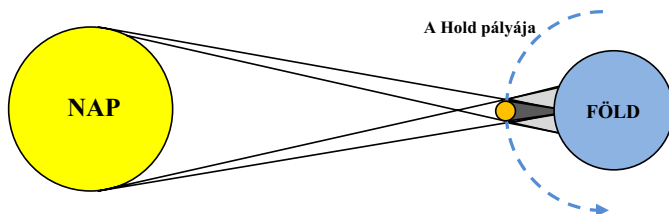
Holdfogyatkozásról beszélünk, ha a Hold a Föld árnyékába kerül, azaz a Föld kadályozza, hogy a Holdat radéktalanul érje a Nap.



9. Az ábra alapján ismertesd a holdfogyatkozás menetét, a szürkés és sötét tartomány közötti különbség okát, a Hold látványát a fogyatkozás különböző tartományaiban?



A Napfogyatkozás során a Hold árnyékot vett a Földre, azaz a Földről nézve a Hold eltakarja a Napot. Ebben az esetben is lehet részleges a takarás, vagy akár teljes is. Ha a Föld egy adott pontján teljes takarásban vagyunk, teljes napfogyatkozást észlelünk, ha a Nap egy része még megfigyelhető, részleges napfogyatkozásról beszélünk.



10. Add meg a teljes és részleges napfogyatkozás tartományait az ábrán!
 11. Melyik égitest milyen mozgása befolyásolja elsődlegesen a napfogyatkozás időtartamát a Föld egy adott pontján?
 12. Miért nincs minden hónapban teljes napfogyatkozás az Egyenlítő környezetében?

Gyűrűs napfogyatkozás

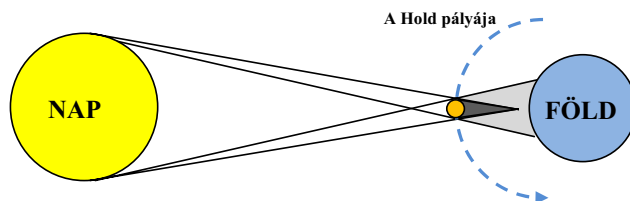
Amennyiben a Hold látszólagos átmérője a Földről nézve valamivel kisebb, mint a Nap látszólagos átmérője, akkor a Hold nem tudja a Napot teljes mértékben letakarni, annak pereme a Földről látható lesz.



13. Az alábbi két ábra közül melyik a gyűrűs napfogyatkozás és melyik a teljes napfogyatkozás? Válaszodat indokold! Mit látunk az első és mit a második képen?



A gyűrűs napfogyatkozás értelmezésében segít a következő ábra:



14. Mi a gyűrűs napfogyatkozás magyarázata, s milyen következtetést vonhatunk le a Nap és Hold átmérőjéről a jelenség alapján?

15. Milyen holdfáziskor van napfogyatkozás és holdfogyatkozás?



A fényképek egyike a növekvő, sarló alakú Holdat ábrázolja, a másikon holdfogyatkozás látható.



16. Hogyan dönthető el, melyik-melyik?

17. Milyen görbe választja el a sötét és világos részt a holdfázis esetén, illetve holdfogyatkozáskor?

18. Miért látjuk az egyik, illetve a másik esetben halványabban a teljes holdkorongot?

Kepler törvényei

A feladatlap segítségével nemcsak Kepler törvényeit ismerjük meg, hanem bepillantást nyerhetünk a megismerésükhöz vezető folyamatba, alkalmazásukba, következményeikbe, igazolásukba. Végül egy összetett feladat megoldása kapcsán foglaljuk össze ismereteinket.

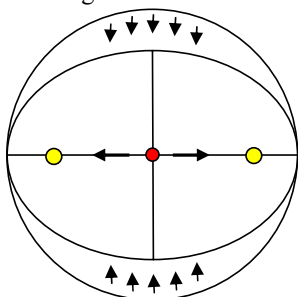
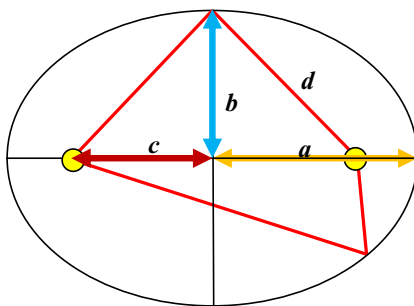
Kepler első törvénye

Kepler első törvénye kimondja, hogy a bolygók ellipszispályán keringenek a Nap körül, mely az ellipszis egyik fókuszában helyezkedik el.

Az ellipszis tulajdonságai

Az ellipszisnek számos definíciója létezik. Ezek közül a legismertebb a következő: az ellipszis azon pontok halmaza, melyek két ponttól (ezek a fókuszpontok) vett távolságösszege állandó.

„ a ” az ellipszis fél nagytengelye, „ b ” az ellipszis fél kistengelye, „ c ” a fókuszpont és az ellipszis középpontjának távolsága, azaz a két fókusz távolságának a fele.



1. Igazold, hogy az előző definícióban említett távolságösszeg egyenlő az ellipszis nagytengelyével ($2a$)! Mutasd meg, hogy $d = a$, és így érvényes a következő egyenlet: $a^2 = b^2 + c^2$!

Az ellipszis egy másik definíció szerint egy kör adott irányból történő kicsinyítéséből is előállítható. Az eljárást az alábbi rajz mutatja.

Ábránkon a függőleges torzítás mértéke $\frac{b}{a}$. Az ellipszis körhöz

képesti torzulását a fókuszpontok távolsága is kifejezi. A kör esetében ez a távolság nulla, a két fókuszpont egybeesik. Minél laposabb az ellipszis, annál nagyobb a fókuszpontok távolsága az eredeti kör átmérőjéhez viszonyítva. Mindezt az „*excentricitás*” nevű mennyiség fejezi ki (ε).

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

2. A fentiek alapján állapítsd meg, mekkora egy ellipszis területe!

3. Bizonyítsd be, hogy $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$!

Hogyan ismerte fel Kepler, hogy a bolygók ellipszispályán keringenek a Nap körül?

A napközéppontú világtkép gondolata a lengyel Kopernikustól származott. Kopernikusz kör alakú bolygópályákat feltételezett a Nap körül. Az így kialakított modell azonban olyan pontatlanul írta le a bolygók helyzetét a valósághoz képest, hogy a Nap körül szabályos körök mentén keringő bolygók modellje alapján a bolygók várható pozícióira pontos jóslásokat nem lehetett készíteni.

Az eltérés magyarázata a pályák alakjában rejtett. A Föld pályája kevéssé tér el a körtől. Az eltérés felismerése pontos mérések révén vált lehetségessé. Ezeket a méréseket nem Kepler, hanem mestere, Tycho de Brahe dán csillagász és nagyszámú megfigyelőből álló csapata végezte. A munka a Brahe által alakított



megfigyelőközpontban, Uranienborgban zajlott profi körülmények között, a kor legjobb műszereivel.

Tycho de Brahe különleges, ellentmondásos figurája a tudománytörténetnek. Az alábbi kérdések alapján ismerkedj meg életének néhány epizódjával!

4. Hogyan képzelte el Tycho de Brahe a Naprendszert?

5. Miért volt Tychonak orrprotézise, és milyen anyagból készült?

6. Mikor élt és hogyan halt meg Tycho de Brahe?

7. Ki volt Tycho magyar orvosa, mit tudunk életéről?

Tycho de Brahe halála után évtizedekre visszamenő mérési

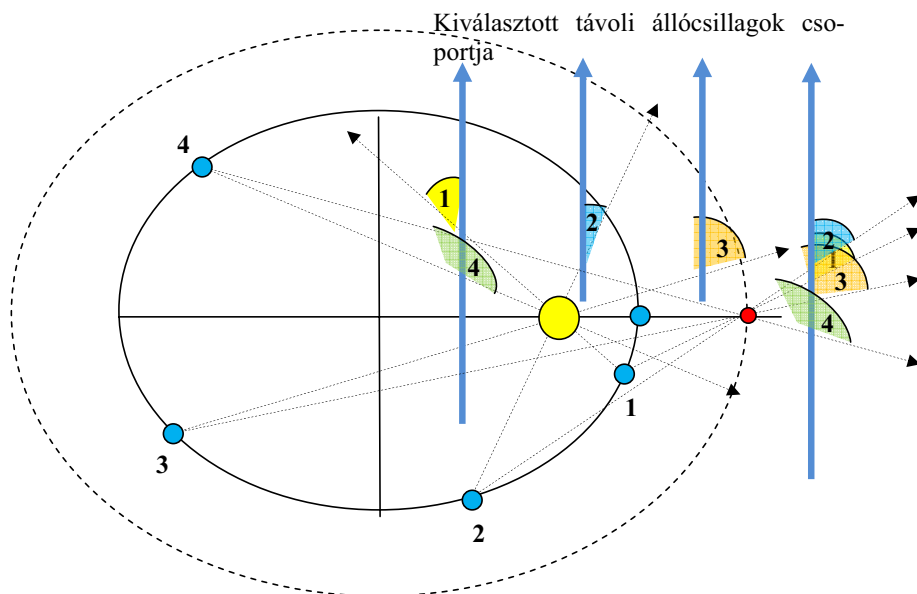
eredményeit használta fel Kepler a bolygópályák titkainak megfejtésére. Ezeket az adatokat az ún. Rudolf-féle táblák tartalmazták, amelyeket már Kepler adott ki.

Kire utal a táblázatok elnevezése és miért?

A táblázat adatai lehetőséget adtak Keplernek arra, hogy saját észlelés nélkül kielemezze a bolygópályákat. Ezek a számítások vezettek el a Kepler-törvényekig.

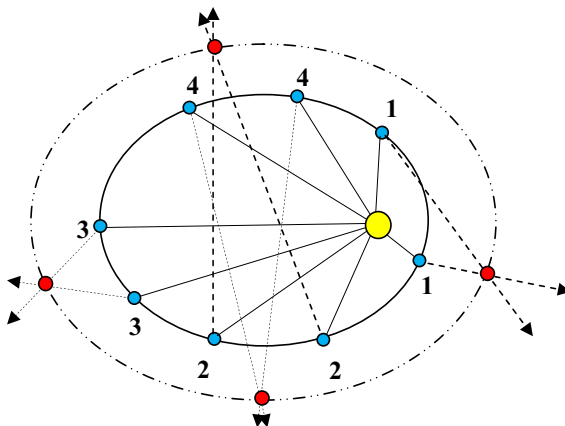
Hogyan határozta meg Kepler a Föld pályáját?

Kepler egy olyan naptól indult ki, amikor a Nap, a Föld és a Mars egy egyenes mentén helyezkedett el. Tudta, hogy a Mars keringési ideje 687 földi nap. A táblázatból kikereste, hogy 687 nap múlva a távoli állócsillagokhoz képest merre esett a Nap, illetve a Föld. A két irányból meghatározta a földpálya egy pontját, majd az eljárást többször megismételte.



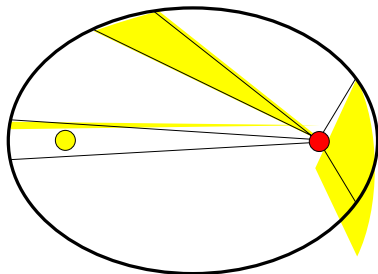
Az ábrán az összetartozó számok jelölik az egyes szerkesztési lépéseket. A Mars pályáját nem ismerjük, azt szaggatott vonallal jelöltük. A Föld pályáját a szerkesztés rajzolja ki. A szerkesztés nem adta meg a bolygópályák abszolút méreteit, csak egymáshoz viszonyított arányát. A Föld pályájának ismeretében megszerkeszthető a Mars pályája.

8. Írd le az ábra alapján az eljárás lényegét!



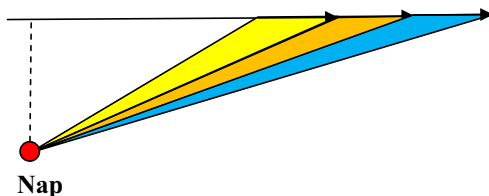
Kepler második törvénye

Kepler második törvénye kimondja, hogy a bolygót a Nappal összekötő egyenes (vezéregyenes) azonos idők alatt azonos területet sűrol (a területi sebesség állandó). Azaz a bolygó napközben nagyobb sebességgel, naptávolban kisebb sebességgel mozog. Ezt az állítást szemlélteti az ábra.

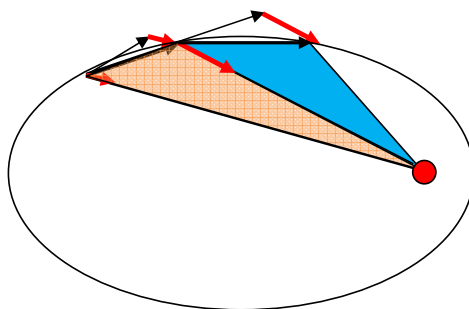


Kepler második törvényének igazolása

9. Az ábra alapján igazold, hogy a területi sebesség állandósága nyilvánvaló, ha a bolygóra nem hat a Nap, azaz egyenes vonalú egyenletes mozgást végez!

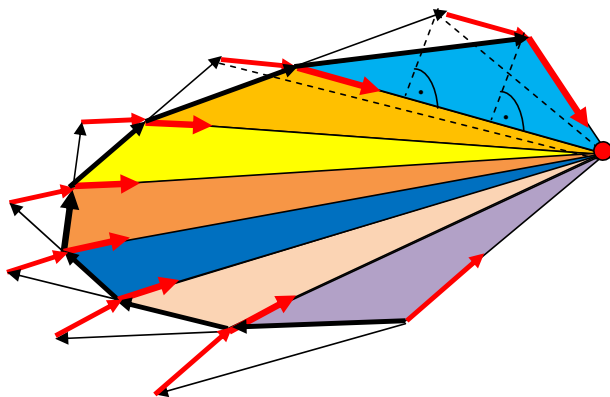


10. Mutasd meg, hogy az állandóság akkor is érvényes, ha figyelembe vesszük a Nap vonzását, s a bolygó nemcsak előre megy, hanem lépésenként a Nap irányába toljuk, ahol a Nap irányába a megelőző lépés utáni naphelyzet határozza meg!



Mennyi idő alatt futja be a bolygó pályájának egy szakaszát?

Kepler második törvénye lehetőséget ad a bolygó egy pályaszakaszának befutásához szükséges idő kiszámítására. Mivel a területi sebesség állandó, az adott pályaszakaszhoz tartozó vezéregyenes által súrolt terület és az ellipszis területének aránya megadja a keresett idő és a keringési idő arányát. De hogyan lehet kiszámítani a pálya két pontja között a vezéregyenes által súrolt területet?



11. Az ábra alapján igazold az alábbi összefüggést (Kepler-egyenlet):

Az „A” pont a B (bolygó) helyzetének megfelelője az ellipszishez tartozó körön. A t a BD pályaszakasz megtételéhez szükséges idő. A szögeket radiánban mérjük.

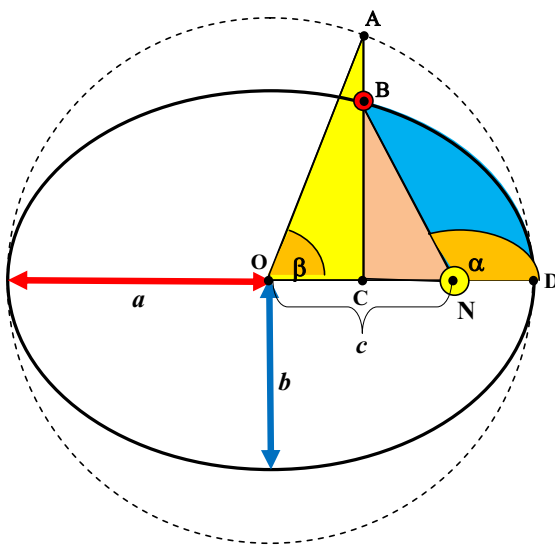
$$2\pi t = T(\beta - \varepsilon \sin \beta)$$

A bizonyítás során az alábbi lépéseket kövesd!

- Határozd meg az OAD körcikk területét!
- Vond le belőle az OAC háromszög területét!
- Kicsinyítsd a kapott síkidomot BCD-be!
- Vond le belőle a BCN háromszöget!
- Írd fel a szükséges arányokat!
- Használd ki, hogy

$$\varepsilon = \frac{c}{a}!$$

(A csillagászok a β szöget excentrikus anomáliának nevezik.)



A Halley-üstökös

A Halley-üstökös elnyúlt ellipszispályán kering, melynek adatai a következők:

Keringési idő: 75,3 év; Pálya-excentricitás: 0,967;

$a = 17,8$ CSE



12. Mennyi idő alatt futja be a Halley-üstökös pályája naptávoli pontjától a napközeli pontig tartó szakaszának első felét?

Számold ki a b/a hányadost ε -ből!

- Határozd meg a negyed ellipszis területét!
- Add meg b értékét, s a derékszögű Δ területét!
- Számold ki a keresett időt a keringési időből és a területarányokból!

Kiemelten nehéz feladat megtalálni az elemi kapcsolatot egy általános esetben α és β között. Ezt az alábbi levezetésben bemutatjuk:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= \frac{BC}{CN} = \frac{\frac{b}{a} AC}{CN} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot AC}{c - a \cdot \cos \beta} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot AC}{a \cdot \cos \beta - c} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot a \cdot \sin \beta}{a \cdot \cos \beta - a \cdot \varepsilon} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \sin \beta}{\cos \beta - \varepsilon} = \\ &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \operatorname{tg} \beta}{1 - \frac{\varepsilon}{\cos \beta}} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \operatorname{tg} \beta}{1 - \varepsilon \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}\end{aligned}$$

Használjuk ki, hogy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$, illetve

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}. \text{ Ezeket behelyettesítve a fenti egyenletbe: } \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \right)}{1 - \varepsilon \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \rightarrow$$

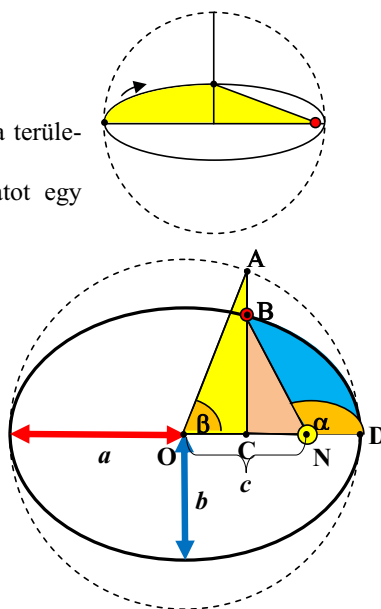
$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \right)}{1 - \varepsilon \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

Kihasználhatjuk ezen kívül a következő trigonometrikus összefüggést:

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \text{ Így egyenletünk a következő alakot ölti:}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \right)}{1 - \varepsilon \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} - \varepsilon(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2})} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{(1 - \varepsilon) - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}(1 + \varepsilon)} = \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)}$$

Összehasonlítva a jobb és bal oldalt, látható, hogy az egyenlet a következő alakra hozható:



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

Így tetszés szerinti a pozícióhoz meghatározható β , melyből kiszámítható a Kepler-egyenlet segítségével a napközeli helyzetből (D) a pálya B pontjáig tartó keringés ideje. A fenti módszerrel a pálya bármely két pontja között a keringési idő számíthatóvá válik. Ugyanakkor a hely-idő függvény meghatározása a pálya mentén további bonyolult feladat.

Kepler harmadik törvénye

Kepler harmadik törvénye az azonos vonzócentrum körül keringő égitestek keringési idejét és közepes távolságát (a) hasonlítja össze. A törvény kimondja, hogy a keringési idők négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint a közepes bolygótávolságok köbei.

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{állandó}$$

Az állítás akkor helytálló, ha a vonzócentrum (Nap) tömege sokkal nagyobb, mint a körülötte keringő objektumok (bolygók) tömege.

Kepler harmadik törvénye segítségével ismerte fel a gravitációs vonzás természetét Newton. Képzeljünk el olyan égitesteket, melyek a Föld körül körpályán keringenek (Newton a Holdat vizsgálta)! Mi a feltétele annak, hogy az égitest keringése során Kepler harmadik törvénye teljesüljön?

Hogyan függjön a Föld középpontjáról vett távolságtól a Föld által a Holdra kifejtett vonzóerő, hogy Kepler harmadik törvénye érvényes legyen?

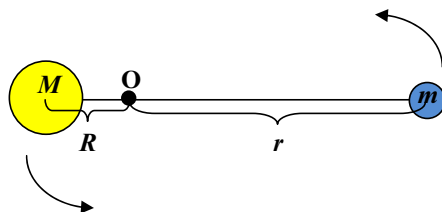
13. Igazold, hogy ez a vonzóerő a távolság négyzetével fordítottan arányos!

A megoldásban segítenek a következő gondolatok:

- A körpálya sugara $r = a$
- A centripetális erőt r -rel és T -vel érdemes felírni.

A Newton-féle általános tömegvonzási erőt

leíró egyenlet $F = f \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$, ahol f a gravitációs állandó, melynek értéke $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ (ld. 11. feladatlap).



Kepler harmadik törvényének pontos alakja figyelembe veszi, hogy a Nap és az égitestek között kölcsönös vonzás van. A rendszer keringése nem a Nap középpontja körül, hanem a Nap-bolygó rendszer tömegközéppontja körül zajlik. (Két test egymás körül kering.)

Nézzük meg, hogyan alakulnak ilyenkor a keringési idők!

$$M \cdot R = m \cdot r$$

$$f \frac{mM}{(R+r)^2} = mr \frac{4\pi^2}{T^2} = MR \frac{4\pi^2}{T^2}$$

A két égitest távolsága $m + M = d$

Pl. r kifejezhető a tömegekkel és d -vel a tömegközéppontra vonatkozó egyenletből.

$$r = \frac{M}{M+m} d,$$

így Kepler harmadik törvénye a következő alakot ölti:

$$f \frac{mM}{d^2} = m \frac{M}{M+m} d \frac{4\pi^2}{T^2} \rightarrow f \frac{(M+m)}{4\pi^2} = \frac{d^3}{T^2}$$

Egy ismeretlen égitest tömegének kiszámítása a körülötte keringő mesterséges hold keringési idejéből

Az ismeretlen tömegű égitest a Nap körül keringő Ida kisbolygó. A Naptól vett átlagos távolsága (pályaellipszisének fél nagytengelye) $a = 428\,000\,000$ km. A kisbolygó körül a Dactyl nevű parányi hold kering (a képen apró pont), $a' = 108$ km közepes pályasugárral. Az Ida kisbolygó nap körüli keringési ideje $T = 1768$ nap, a Dactyl nevű holdacska a kisbolygót $T' = 1,54$ nap alatt kerüli meg.



14. Mekkora a bolygó tömege? A Nap tömege $1,99 \cdot 10^{30}$ kg.

A megoldás menete:

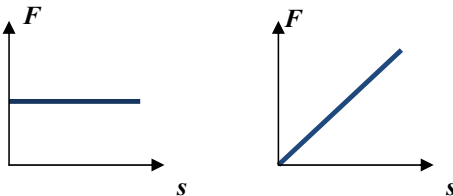
- Írd fel Kepler harmadik törvényét a Nap körül keringő bolygóra, majd a bolygó körül keringő holdacskára!
- Képezd a két egyenlet hányadosát!
- Vedd figyelembe, hogy a bolygó tömegéhez képest a holdacska tömege elhanyagolható!

A gravitációs tér munkája

Ebben a feladatlapban a bolygók mozgásának leírásához újabb eszközt kapunk, megismerve a gravitációs térben zajló mozgások energetikai viszonyait.

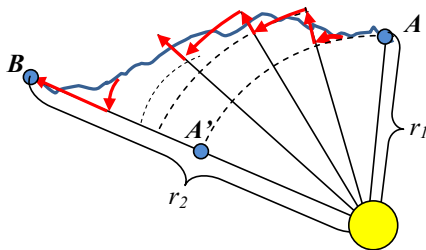
Hogyan számoljuk ki a munkát állandó erő esetében, az elmozdulással egyenletesen növekvő erőt feltételezve?

A Föld gravitációs terében, a Föld középpontjától r távolságra egy m tömegű testre $F = f \frac{mM}{r^2}$ erő hat. Ha a



testet egy A pontból egy B pontba visszük a Föld gravitációs vonzásával szemben, akkor munkát végzünk, melynek nagyságát azért nehéz kiszámítani, mert a kifejtendő erő a Föld középpontjától vett távolság függvényében változik.

1. Az alábbi ábra alapján igazold, hogy a munka, melyet az m tömeg A-ból B-be való mozgatása során végeztünk, független az úttól, s csak az A, illetve B pont földközépponttól vett távolságának függvénye!



Az A-ból B-be menet végzett munka megegyezik az A' és B közötti sugárirányú útszakaszon végzett munkával. De mekkora ez a munka?

A munka kiszámításához használjunk átlagos erőt. Ez most nem számítani közepe lesz az út elején és végén kifejtendő erőnek, hanem mértani közepe. (Ez önkényes eljárás, bár kellően rövid útszakasz esetén elvileg bármilyen közép megfelelhet. Míg a lineáris $F(x)$ függvény esetében a számtani közép adja meg a megfelelő összefüggést, esetünkben a mértani közép vezet jó eredményhez.)

2. Írd fel r_1 és r_2 távolságban az m tömegre ható erőt, majd képezd a két érték mértani közepét, s ezt szorozd meg a sugárirányban történt elmozdulás mértékével! Számítsd ki a munkát a gravitációs térben!

$$\text{A kapott eredmény: } W = fmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Ha a Földtől végtelen messzire jutó, s ezért a Föld végtelen hatótávolságú gravitációjától „megszabadult” testet tekintjük nulla helyzeti energiájúnak, akkor a Földtől véges R távolságban a testeknek negatív helyzeti energiája van, melynek értéke: $E_h = -f \frac{mM}{R}$. Két

tetszőleges pont között végzett mozgás során pedig a helyzeti energia megváltozását, azaz a gravitáció ellenében végzett munkát a fenti összefüggés adja meg.

Az inhomogén gravitációs térben meghatározott helyzeti energia felhasználásával az energia-megmaradás elvét alkalmazva összetett problémákat vizsgálhatunk meg.

3. Mekkora kezdősebességgel dobjunk fel egy testet függőlegesen, hogy a Föld felszínétől 10 000 km-re legyen pályájának tetőpontja?

Alkalmazd a helyzeti energiára vonatkozó összefüggést a Föld felszínén és a felszín felett 10 000 km-rel, és írd fel az energiamegmaradás törvényét a két helyzetre!

Második kozmikus sebességről vagy szökési sebességről beszélünk akkor, ha egy testet olyan nagy kezdősebességgel hajítunk el a vizsgált égitest felszínéről, hogy az sosem esik vissza. (A felszíntől végtelen messzire jut, azaz nulla helyzeti energiájú állapotba kerül.)

4. Mekkora lenne ez a kezdősebesség, ha a Föld felett minden magasságban akkora lenne a gravitáció, mint a Föld felszínén?

5. Számítsd ki a 2. kozmikus sebesség értékét a Földön!

A feladat csak annyiban tér el az előzőtől, hogy a 10 000 km-es helyet „kitöltük” a Föld felszínétől végtelen távolságra.

6. Határozd meg a 2. kozmikus sebesség értékét a Marson!

7. Mekkora sugarú gömbbe kellene összezsugorítani a Föld anyagát (változatlan tömeg mellett), hogy a második kozmikus sebesség a felszínén 300 000 km/s, azaz fénysebesség legyen? (Fekete lyuk állapot.) A számítás során relativisztikus hatásokat ne vegyél figyelembe!

8. Nézz utána a weben, hogy mi a fekete lyuk!

Az energia meghatározása egy a Föld körül körpályán keringő mesterséges hold esetében

Írjuk fel a helyzeti, mozgási és összes energiát egy a Föld körül r sugarú körpályán keringő mesterséges holdra!

$$E_{\delta} = E_h + E_m = -f \frac{mM}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

Használjuk ki a körmozgás dinamikai feltételét, azaz hogy a mesterséges holdat a Föld gravitációs vonzása tartja körpályán! $F_{cp} = f \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$

Így a körpálya esetén $E_{\delta} = -f \frac{mM}{2r}$.

A Föld felszíne felett vízszintesen (sugárra merőlegesen) elhajított test lehetséges pályái a kezdősebesség függvényében

Az alábbi ábra a lehetséges pályákat mutatja:

1. Ellipszispálya, melynek távolabbi fókusza a Föld középpontja.

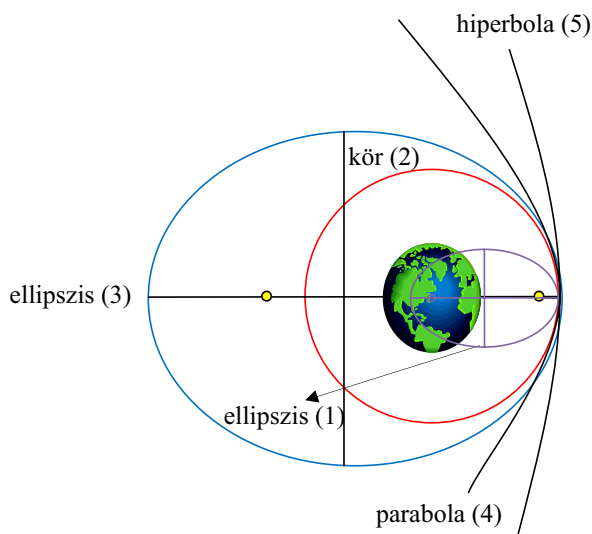
$$E_m < f \frac{mM}{2r}$$

2. Körpálya, melynek középpontja a Föld középpontja.

$$E_m = f \frac{mM}{2r}$$

3. Ellipszispálya, melynek közelebbi fókusza a Föld középpontja.

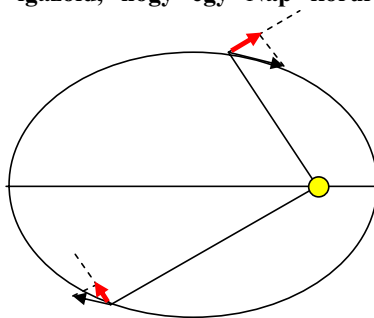
$$E_m < f \frac{mM}{2r}$$



4. Parabolapálya. $E_m = f \frac{mM}{r} \rightarrow E_\delta = 0$
5. Hiperbolapálya. $E_m > f \frac{mM}{r} \rightarrow E_\delta > 0$ Mint látható, zárt pálya csak akkor jön létre, ha $E_\delta < 0$.

9. Az energiamegmaradás elvének felhasználásával igazold, hogy egy Nap körül keringő égitest sebessége annál nagyobb, minél közelebb van a Naphoz (Kepler második törvénye)!

Kepler második törvénye a következőképpen általánosítható: $r \cdot v_t = \text{áll.}$ Ahol r az égitest vonzócéntrumtól (a Nap közepétől) vett távolsága, v_t pedig az égitest sebességvektorának r sugárra (vezéregyenesre) merőleges komponense.



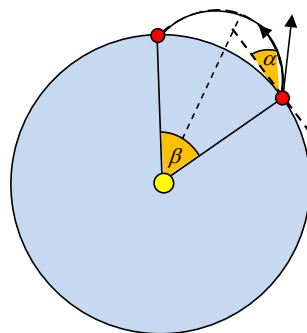
Ballisztikus rakéta

A Föld egy pontjáról (30°-os északi szélességi kör) ballisztikus rakétát akarunk indítani az Északi-sarkra.

10. Mekkora kezdősebességet adjunk a rakétának, ha 40°-os szögben akarjuk elindítani? Milyen magasra jut fel a rakéta?

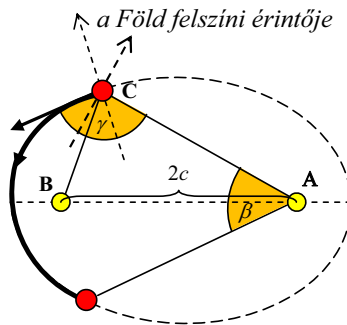
(A Föld forgásától tekintünk el! $R_F = 6370$ km, $M_F = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg.)

Első lépés: a pályaellipszis kiszámolása: a két fókusz távolságának fele (c) és a fél nagytengely hosszának (a) meghatározása:



- Határozd meg β értékét!
- Határozd meg γ értékét α segítségével, kihasználva azt, hogy α a Föld felszínével bezárt szög!
- Vedd észre, hogy az ellipszis nagytengelye felezi β -t!
- Számold ki az ACB háromszög szögeit! Használd ki, hogy a pályaellipszis érintőjére állított merőleges felezi ezt a szöget! (ld. 4. feladatlap).

a pályaellipszis érintőjére állított merőleges a Föld felszíni érintője



- Írd fel a szinusz-tételt az ABC háromszög AB ($= 2c$) és AC ($= R_F$) oldalára, valamint a BC és az AC oldalára! Az első egyenletből c megkapható, mivel $AC (= R_F) + BC = 2a$, a második egyenletből a kiszámítható. A rakéta pályájának tetőponti magassága (h) a fél nagytengelyből (a) és a két fókuszpont távolságának feléből (c) meghatározható.

Második lépés: az energiamegmaradás elvének és Kepler második törvényének egyidejű alkalmazása.

- Írjuk fel az összes energiát a kilövés helyére és a pálya tetőpontjára! Használjuk ki az energiamegmaradás elvének érvényességét!

$$E_{\text{ö}} = E_h + E_m = -f \frac{mM}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

- Írjuk fel Kepler második törvényét ezekre a pontokra! $-r \cdot v_t = \text{állandó}$.
- Egyenletrendszerünkéből a ballisztikus rakéta kezdősebessége (v_0) meghatározható.

12. Mennyi ideig repült a rakéta?

Használd Kepler 3. törvényét és a 16. feladatlap alapján a Kepler-egyenletet!

A levegő nyomása

Az arisztotelészi filozófia egyik alapállítása volt, hogy a természet irtózik az ürtől, azaz a légüres tértől: „Horror vacui”, „az üresség rettenete”. Ezen elv alapján számos jelenséget értelmeztek Arisztotelész követői.

Pl.: Hogyan szívjuk fel az italt a pohárból egy szívószál segítségével?

A szívószálból kiszívjuk a levegőt, így annak helyére víz megy be, hiszen üresen nem maradhat a szívószál, mivel a természet irtózik a légüres tértől.

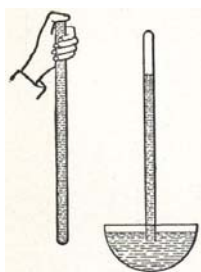
Ezt a jelenséget ma a külső légnyomás felhasználásával íránk le. A levegő nyomását először Torricelli olasz fizikus mérte meg, bebizonyítva ezzel azt is, hogy a *horror vacui* elve hibás.



A légnyomás megmérése Torricelli módszerével

1. Mikor élt Torricelli? Melyek voltak tudományos pályájának legfontosabb eredményei?

A Torricelli-kísérlet lényege a következő:



Egy higannyal telt, kb. 1 m hosszú, alul zárt, felül nyitott csövet szájával lefelé egy higanyos edénybe fordítunk. A higany egy része az ábrának megfelelően kifolyik a csőből. A higany felett légüres tér keletkezik (némi higanygőztől eltekintve). A külső levegő ~ 76 cm higanyoszlopot tartott a csőben. A levegő nyomása 76 Hgcm.

Ahogy a 8. feladatlapon láttuk, a folyadékoszlop nyomását kizárólag a folyadék sűrűsége és a folyadékoszlop magassága határozza meg.

$$p = h \cdot \rho \cdot g$$

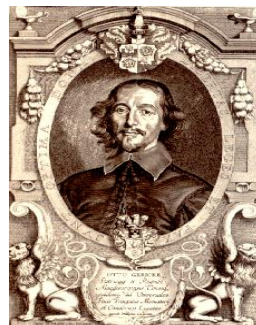
2. Határozd meg, hogy 1 Hgcm hány Pascal (N/m²)!

3. Miért volt alkalmas folyadék a higany a kísérlet elvégzésére?

4. Milyen magas vízoszloppal tud egyensúlyt tartani a 76 cm-es higanyoszlop?

A magdeburgi féltekék

Otto Guericke, Magdeburg tudós polgármestere híres kísérlettel bizonyította a légnyomás meglehetősen nagy voltát.



Híres kísérletében tizenhat ló sem tudta széthúzni azt a két, pontosan összeillesztett félgömböt, melynek belsejéből előtte kiszivattyúzták a levegőt.

5. Becsüld meg a metszet alapján, hogy mekkora erőt kellene kifejteni a lovaknak, ha a félgömböket szét akarják húzni!
6. Miért nem kötötték a gömb egyik rögzítését egy vastag, erős fához vagy a falhoz, s húzták egy irányból 16 lóval a gömböt? Hogyan befolyásolta volna az eredményt ez az eljárás?

A levegő sűrűségének magassággal való változását Torricelli vizsgálatait megelőzően a magyar Frölich Dávid késmárki matematikus és naptárkészítő is felismerte. A Tatra egyik csúcsának, valószínűleg a Szalóki-csúcsnak megmászásakor írta a következőket:

„Midőn az hegynek legfölsőbb tetejére jutottam, oly csendes és vékony levegőget tapasztaltam ott, hogy még csak egy hajszálam mozdulását sem venném észbe, holott pedig az alsóbb hegyeken kemény és zuhogó szelek között jártam: Amelyből azt hoztam ki, hogy az Carpatus hegynek teteje annak alsó részétől fogva szinte egy mérföldnyire légyen, és hogy a levegőégnek legfölsőbb tartományáig érjen, melyet a szelek nem járnak. Kilőttem az hegytetőn a puskámat, melynek ott, a kilövéskor csak annyi hangja volt, mintha egy száraz vesszőt kettétörtem volna, de egy kevés időcske múlva ebből nagy dörgés-morgás lett, mely az hegynek alsóbb részeit, völgyeit és erdeit betöltötte. Aláfelé jöttömben a régi havasonkon és mély völgyeken, mikor ismét kilőném a puskámat, sokkal nagyobb és rettentőbb hangot adott, mint a legnagyobb ágyúkilövés, és az terjedvén, úgy tetszett énnékem, mintha az egész hegy azonnal vélem együtt elsüllyedne. Tartott pedig fél fertályóráig, míg ez a zörgés-morgás minden berkeket és barlangokat el nem hatott, és az azokban lévő levegőégtől visszaverettvén, annyival nagyobb lett, és kétszeresen terjedett s a többi.”²

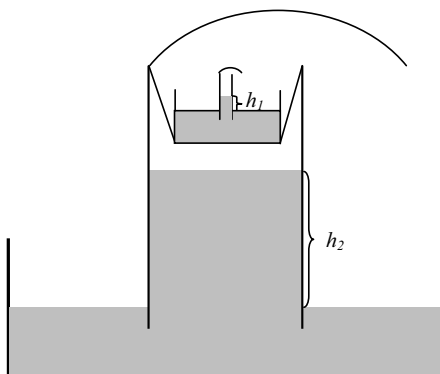


7. A hang mely tulajdonságára utal az idézet?

Űr az űrben

A Torricelli-kísérlet során levegő kerülhet a „Torricelli-űrbe”. Az ábrán látható eljárás (a Torricelli-űrben egy másik Torricelli-cső) kiküszöböli a levegő beszívargásának torzító hatását.

8. Hogyan határozható meg a légnyomás értéke ebben az elrendezésben? Honnan látszik, hogy levegő került a Torricelli-űrbe?



A Boyle–Mariotte-törvény igazolása Melde-csővel

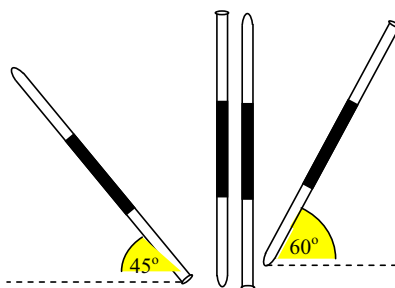
Állandó hőmérsékleten a gázok nyomása és térfogata fordítottan arányos. Ezt mondja ki a Boyle–Mariotte-törvény.

A törvény igazolását egy higanyt tartalmazó üvegcsővel (Melde-cső) lehet könnyen elvégezni.



² Szőnyi Benjámín: Gyermekek fisikája. Pozsony. 1774

A Melde-cső az egyik végén zárt keskeny üvegcső, melyben középen higany helyezkedik el. A cső helyzetét változtatva a higany elmozdul a csőben. (A cső fala és a higany közötti kölcsönhatás elhanyagolható.)
Vízszintes helyzetű, 60 cm-es Melde-csövet 20 cm-es higanyoszlop bont kettő, 20-20 cm-es részre.



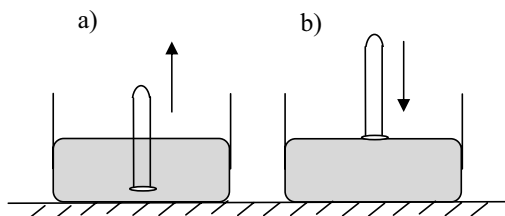
9. Állapítsd meg a bezárt levegő térfogatát a cső alábbi helyzeteiben a Boyle–Mariotte-törvény segítségével!

(A levegő nyomását Hgmm-ben írd fel, a ferde higanyoszlop nyomásának meghatározásakor a 8. feladatlpra támaszkodhatsz!)

Amikor a Melde-csövet a Boyle–Mariotte-törvény igazolására használjuk, a mért térfogatok és nyomások szorzatának azonosságát kell megmutatnunk.

Egyéb feladatok a Boyle–Mariotte-törvényre

Az ábrákon 10 cm-es, alul nyitott üvegcső van. Az a) esetben a cső félig merül higanyba, a b) esetben a cső üres. A csőbe zárt levegő kezdetben 760 Hgmm nyomású.



10. Hogyan helyezkedik el a csőben a higany, ha a csövet 5 cm-rel feljebb húzzuk úgy, hogy az alja még éppen a higanyba érjen? (a)

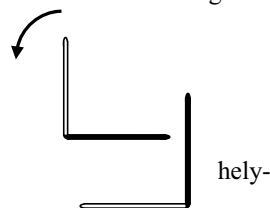
11. Hogyan helyezkedik el a csőben a higany, ha a csövet 5 cm-rel lejjebb nyomjuk úgy, hogy csak a fele lóg ki a higanyból? (b)

Figyelj arra, hogy a cső elmozdulása nem egyenlő a higanyoszlop elmozdulásával!

Mindkét végén zárt, „L” alakú, összesen 2 m-es vékony üvegcső 100 cm-es vízszintes ágában higany van. A függőleges ágban lévő levegő nyomása 760 Hgmm.

12. Hogyan helyezkedik el a higany a csőben, ha azt 90°-kal az ábrának megfelelően elforgatjuk?

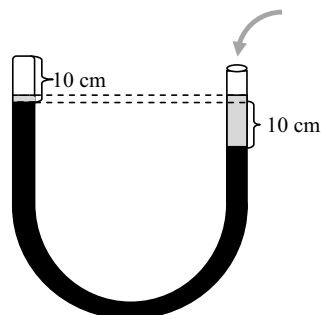
Mindkét végén zárt, 30 cm hosszú üvegcsőben pontosan középen 10 cm higany van. A cső az ábra szerinti függőleges helyzetben 10 cm-es, 76 Hgcm nyomású légoszlopot zár be alul.



13. Hogyan helyezkedik el a higany a csőben, ha azt szabadon ejtjük?

- Határozd meg a levegő nyomását a higany fölött!
- Mi változik, ha a cső szabadon esik?
- Mi következik ebből a bezárt levegő nyomására a higany két oldalán lévő csőrészekben?

„U” alakú, keskeny üvegcsőben higany van. A cső egyik vége zárt, itt a higany szint 10 cm-rel magasabb, mint a másik, nyitott végén. A külső légnyomás 76 Hgcm.



14. Mennyi (hány cm) higanyt kell beönteni a nyitott csőoldalón, hogy a higanyszint azonos legyen a két oldalon?

A bezárt levegőoszlop magassága is 10 cm.

Figyelj arra, hogy ha higanyt öntünk be a nyitott csővégen, a higanyszint a zárt oldalon is megemelkedik!

Mekkora volt kezdetben a bezárt levegő nyomása?

A feladat megoldásában segít az ábra.

Elektrosztatikus tér

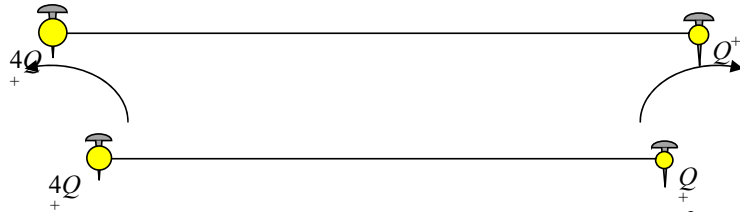
Ebben a feladatsorban az elektrosztatikus tér egyszerű egyensúlyait vizsgáljuk, majd kettő, ellentétes előjelű töltés együttes terére nézünk néhány szokatlan példát.

A nyugvó töltések elektromos kölcsönhatását a Coulomb-törvény írja le.

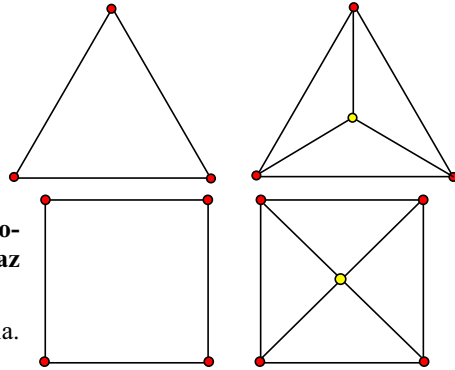
$F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{R^2}$, ahol Q_1 és Q_2 a két ponttöltés nagysága, R a közöttük lévő távolság. Az erő iránya egybeesik a két ponttöltést összekötő egyenessel. Az azonos előjelű töltések taszítják, a különbözőek vonzzák egymást.

Az ábrán látható, egymástól d távolságra lévő két rögzített pozitív töltés közé egy rögzítetlen töltést helyezünk.

1. Hova tegyük, hogy egyensúlyban legyen?
2. Mekkora és milyen előjelű legyen a 3. töltés, hogy az egyensúly fennálljon?
3. Hogyan válasszuk meg a 3. töltés előjelét és nagyságát, ha azt szeretnénk, hogy a két eredeti töltés rögzítésének eltávolítása után is megmaradjon az egyensúly?



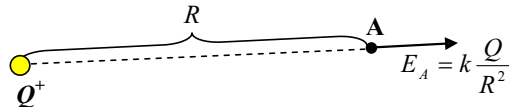
4. Hogy módosul a feladat, ha egy egyenlő (a) oldalú háromszög csúcaiban lévő, azonos nagyságú rögzített Q^+ töltéseket szeretnénk egyensúlyban tartani egy 4. töltéssel?
5. Mi lesz a megoldás, ha egy a oldalú négyzet csúcaiban vannak az azonos pozitív töltések, s egy 5. töltés biztosítja az egyensúlyt?



A töltések között ható erővektorok eredője nulla.

A megoldásban segít az ábra.

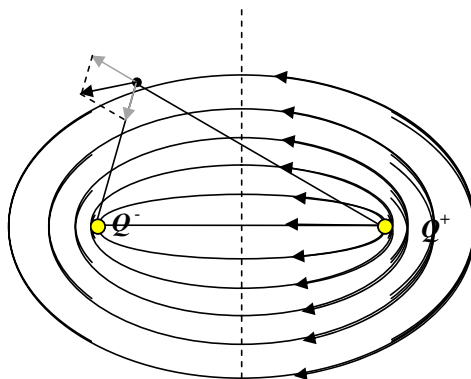
Az elektromos térerősség definíció szerint az egységnyi töltésre ható erő. Nagysága annak a Q töltésnek nagyságától függ, amelyik a teret kelti, s attól a távolságtól, amelyre a vizsgált pont a teret keltő töltéstől elhelyezkedik.



Két azonos nagyságú, de ellentétes előjelű elektrosztatikus töltés tere

A teret az erővonalak teszik szemléletessé. Az erővonalak iránya megegyezik a térerősségvektor irányával az adott pontban.

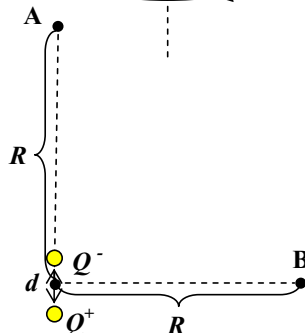
Bizonyítsd be, hogy a két ponttöltés közötti felező merőleges mentén (szaggatott vonal) a térerősség-vektorok párhuzamosak!



Dipólus-tér

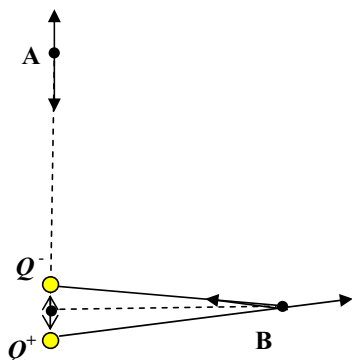
A dipólus Q^+ és tőle d távolságra lévő, vele megegyező nagyságú Q^- töltésből áll. A dipóltér erősségét a dipól tengelyének irányában (A) és arra merőlegesen (B) vizsgáljuk $R \gg d$ távolságban.

Számoljuk ki a térerősséget az A pontban!



$$E_A = -k \frac{Q}{(R - \frac{d}{2})^2} + k \frac{Q}{(R + \frac{d}{2})^2} = k \cdot Q \frac{-(R + \frac{d}{2})^2 + (R - \frac{d}{2})^2}{(R^2 - \frac{d^2}{4})^2} = kQ \frac{-2Rd}{(R^2 - \frac{d^2}{4})^2}$$

ha $R \gg d$ akkor $R^2 \gg \frac{d^2}{4}$ így $\frac{d^2}{4}$ elhanyagolható R^2 mellett.

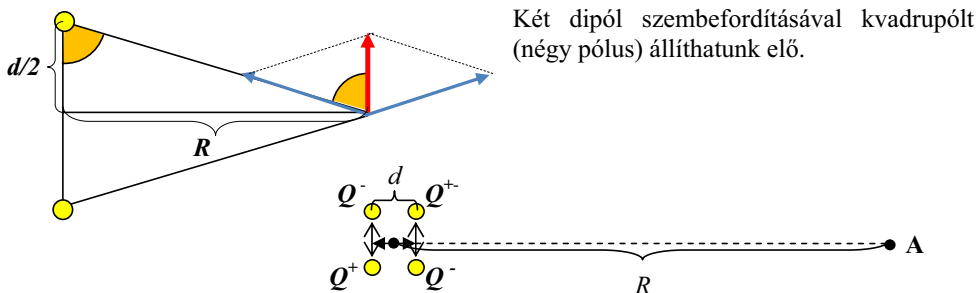


$$\text{Így } E_A = -kQ \frac{2d}{R^3}$$

6. Határozd meg a B pontban a dipóltér erősségét!

- Határozd meg a két összeadandó térerősség-vektor nagyságát!
 - Állapítsd meg a függőlegessel bezárt szögük koszinuszát az elrendezés geometriai adataiból!
 - Használd ki az $R \gg d$ feltételt!
- $M = Qd$ az úgynevezett dipólmomentum

Mivel a mágneses tér hasonló szerkezetű, mint az elektromos dipóltér, elmondható, hogy a sarkok környezetében kétszer olyan erős a Föld mágneses tere, mint az Egyenlítő mentén.



7. A dipóltérre kapott eredmények és az alkalmazott módszerek alapján igazold, hogy a kvadrupóltér erőssége az A pontban fordítva arányos R^4 -nel, ahol $R \gg d$!

Semleges vezető sztatikus elektromos térben

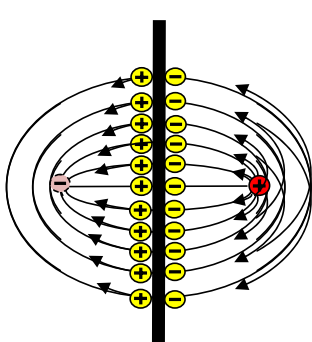
Ha az elektromos térbe egy vezetőt helyezünk, töltései átrendeződnek, töltésmegosztás keletkezik.

8. Mutass rá egy példát!

9. A megosztott töltések a vezető felületén helyezkednek el. Miért?

10. Mivel a töltések elmozdulhatnak a vezető felületén, ezért a megosztás következtében létrejövő térerősség mindig merőleges a vezető felületére. Miért?

A bizonyítás során abból indulj ki, milyen következménye lenne, ha nem lennének az erővonalak merőlegesek a vezető felületére!



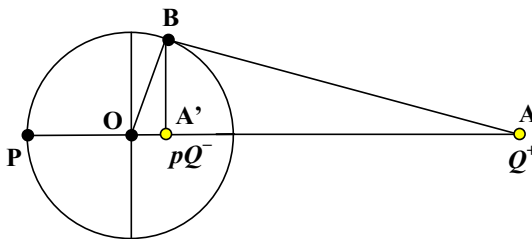
Egy ponttöltés és egy semleges fémlap kölcsönhatása

Egy semleges fémlap felületén egy ponttöltés megosztást hoz létre. A kialakult tér olyan szerkezetű a lemez széleitől távol, mint az a dipóltér, melyet a ponttöltés és egy vele egyenlő nagyságú (de ellentétes előjelű) „tükörtöltés” hozna létre szabad térben, fémlap nélkül. A tükörtöltés helye az eredeti töltés fémlapra vonatkozó tükörpontja.

11. Mekkora erővel hat egymásra egy Q töltés és egy tőle d távolságra lévő kiterjedt fémlap?

Egy ponttöltés és egy semleges fémgömb kölcsönhatása

A kialakult erővonalkép ebben az esetben is két ellentétes előjelű töltés elektromos terével helyettesíthető. A Q^+ töltéshez található egy olyan pQ^- töltés, melynek tere a Q^+ töltéssel együtt pontosan olyan erővonalképet eredményez, mint a fémgömb a Q^+ töltéssel együtt. A Q^+



töltés tükörképének helye ebben az esetben az A' pont lesz, amely az A -ból a körhöz húzott érintő érintési pontjából az AO szakaszra állított merőleges metszése az AO -val.

12. Határozd meg az A' pont helyzetét!

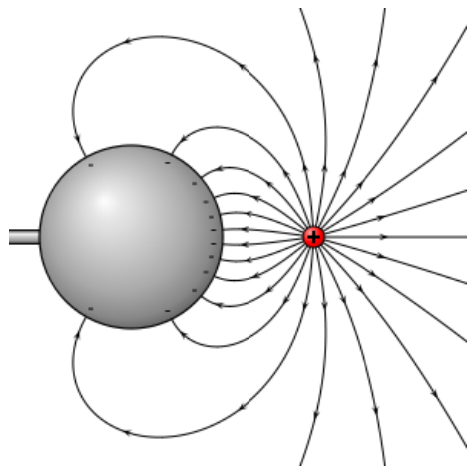
13. Add meg p értékét úgy, hogy a B pontban a térerősség merőleges legyen a gömb felszínére!

- $OA = d$; $OB = R$, mivel $OA'B$ háromszög és az OBA háromszög hasonló; az oldalak arányából az OA' meghatározható, s ebből $A'B$, majd $A'P$ kiszámítható.
- Az AB távolság Pitagórasz tételéből számítható. A Q^+ töltés B pontban mért térerősségének nagysága egyenlő kell hogy legyen a pQ^- töltés B pontban mért térerősségének AB irányú (érintő irányú) komponensével.
A szükséges szög koszinuszát az elrendezés geometriai adataiból kaphatjuk.

14. Mutasd meg, hogy a P pontban a térerősség ekkor nulla!

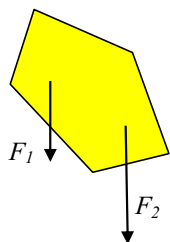
- $A'P$ szakasz és AP szakasz hosszának ismeretében az állítás igazolható.

Természetesen a gömb minden pontjára igaz, hogy a térerősség merőleges a gömbfelületre, mivel a gömb vezető. (Ez egyszerűbben bizonyítható annak igazolásával, hogy a gömb ekvipotenciális. De a potenciál fogalma és annak használata meghaladja ennek a feladatlapnak a kereteit.)



A súlypont meghatározása

Az erők összeadásának fontos fejezete a párhuzamos hatásvonalú erők összeadása. Az ilyenkor alkalmazott, a fizika szempontjából helyes eljárások némileg eltérnek a matematika vektorösszeadási szabályaitól.



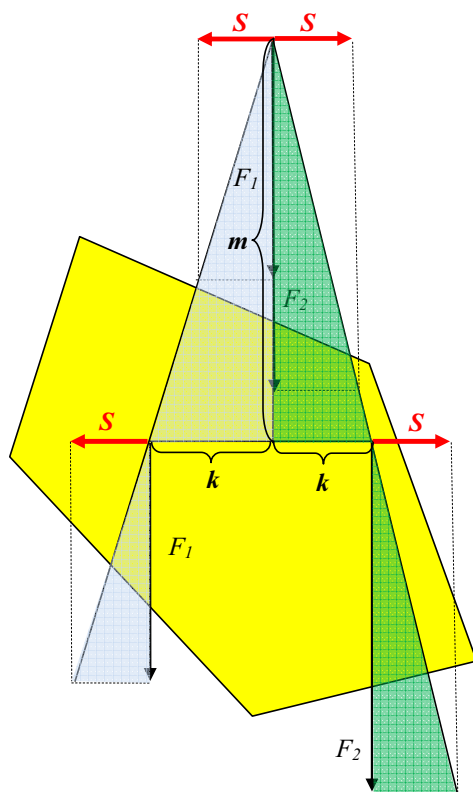
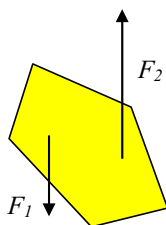
Párhuzamos hatásvonalú erők összeadása

A 4. feladatlap az erők egyensúlyával foglalkozott. Egy erő támadáspontja eltolható a hatásvonala mentén. Alkalmazzuk ezt az elvet párhuzamos hatásvonalú erők összeadásánál!

Hogyan adható össze az elhanyagolható súlyú testre ható F_1 és F_2 erő?

1. Az ábra segítségével igazold, hogy a párhuzamos hatásvonalú, egyirányú erők eredőjének nagysága a két erő összege, s az eredő hatásvonala két hatásvonal közé esik oly módon, hogy $F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$!

2. Hogyan adható össze két párhuzamos hatásvonalú, de egymással ellentétes erő? A megoldást add meg szerkesztéssel!



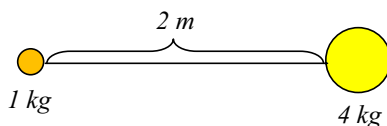
3. Hogyan kapcsolódik a párhuzamos hatásvonalú erők összeadásának módszere a forgatónyomaték fogalmához? Ne csak formális kapcsolatot mutass be!

4. Hogyan adható össze két azonos nagyságú, de ellentétes irányú, párhuzamos (de nem egybeeső) hatásvonalú erő?

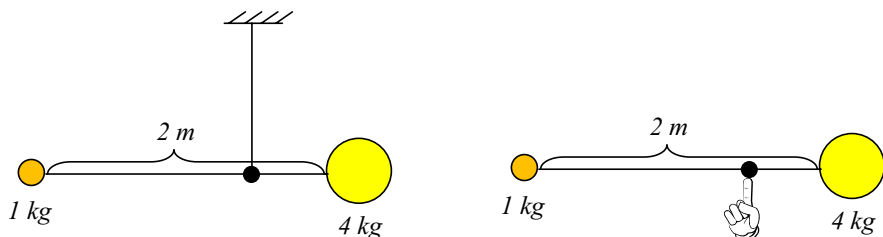
A súlyvonal meghatározása

Ha egy testet tömegpontok összességének fogunk fel, akkor a test egyes tömegpontjaira ható gravitációs erők párhuzamosak lesznek. Ezen párhuzamos erők eredőjének hatásvonala lesz a test egy súlyvonala.

A két golyót súlytalannak tekinthető pálca köti össze.



5. Hol van a „súlyzó” pálcára merőleges súlyvonala?

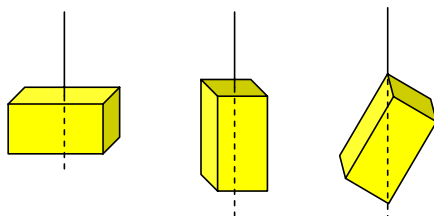


Amennyiben a pálcát a súlyvonala mentén függesztjük fel vagy támasztjuk alá, egyensúlyban lesz.

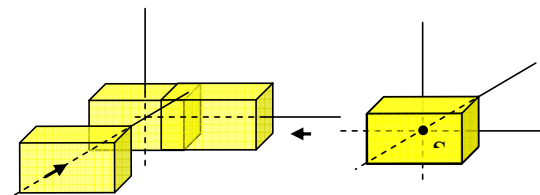
6. Hogyan érvényesül ilyenkor az egyensúly feltétele? Mekkora lesz a felfüggesztéskor a kötélben ébredő erő, illetve alátámasztáskor a nyomóerő?

A súlypont kijelölése méréssel

Ha egy kiterjedt testet több pozícióban felfüggesztünk, mindegyik pozíció kijelöl egy súlyvonalat. A súlyvonalak egy pontban metszik egymást, ez a súlypont.



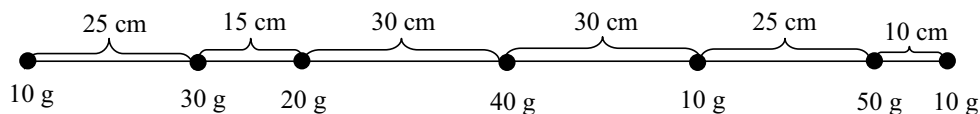
A súlypont kiszámítása egy egyenesbe eső tömegpontok esetében



Ahogy korábban láttuk, a párhuzamos hatásvonalú erők összeadásának szabályából a forgatónyomaték fogalma levezethető.

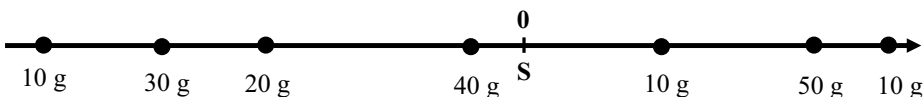
A forgatónyomatékok segítségével pedig a súlypont könnyen megtalálható egy pontrendszer esetében is. A pontrendszer súlypontja ugyanis az a pont lesz, melyre nézve az egyes tömegpontokra ható párhuzamos súlyerők nem forgatnak, azaz forgatónyomatékainak összege nulla lesz. A test, ezen pontját megtámasztva, egyensúlyba hozható, ami azt jelenti, hogy egyetlen erővel kiegyenlíthető a pontrendszer tömegpontjaira ható súlyerők eredője. Mindez csak úgy képzelhető el, ha az eredő hatásvonala egybeesik az alátámasztáskor (felfüggesztéskor) fellépő erő hatásvonalával. Nagysága nyilván egyenlő az alátámasztáskor (felfüggesztéskor) a testre ható erővel.

Hol van az alábbi egy egyenesbe eső tömegpontokat tartalmazó pontrendszer súlypontja?



7. Határozd meg a rendszer súlypontjának helyét az egyenes mentén!

Keressünk egy általános megoldást a problémára!

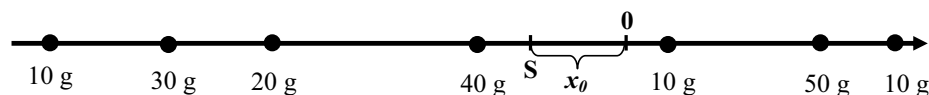


A tömegpontrendszerre egy számegyeneset helyeztünk. Amennyiben a számegyenes origója egybeesik a súlyponttal (ezt nem tudhatjuk előre), akkor igaz lesz a következő összefüggés:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i = 0.$$

A kifejezés rövidített felírása az $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n)$ összegnek, ahol az x lehet pozitív és negatív annak függvényében, milyen irányba esik a számegyenes origójától. Az egyenlet nulla volta miatt egyszerűsíthettünk g -vel.

Amennyiben a számegyenes origóját a súlyponttól x_0 távolságra helyezzük, az alábbi összefüggés írható fel:



$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i - x_0) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i - \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_0 = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_0 \rightarrow x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Ellenőrizd a 7. feladatban kapott eredményt a képlet segítségével!

Az eljárás általánosítható bárhány dimenzióra. Alább a kétdimenziós pontrendszerekre mutatjuk be.

A vektorok között az alábbi összefüggés írható fel:

$$\underline{r}_0 + \underline{r}_i = \underline{r}'_i \text{ azaz}$$

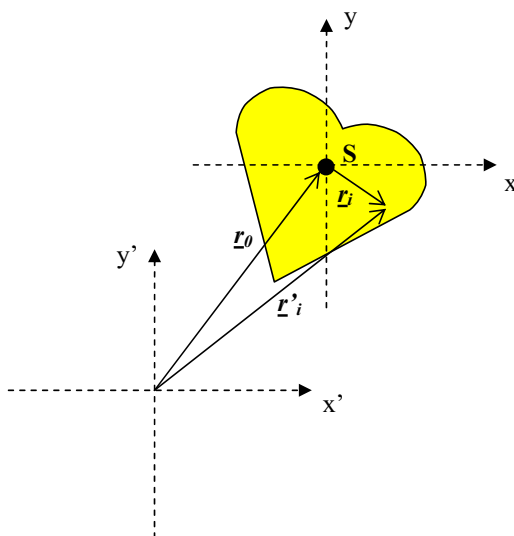
$$\underline{r}_i = \underline{r}'_i - \underline{r}_0$$

Elvégezve minden tömegpontra a összegzést:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \underline{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\underline{r}'_i - \underline{r}_0) = 0$$

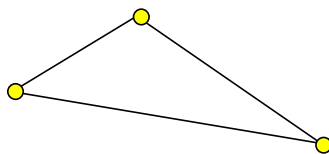
$$\underline{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \underline{r}'_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

A vesszős rendszer az önkényesen felvett koordinátarendszer, a vektoregyenlet komponensenként megoldható.

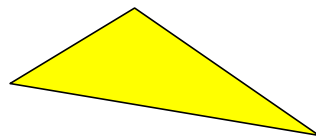


Egyszerű feladatok megoldása

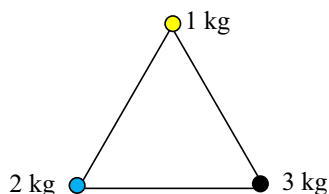
8. Mutasd meg, hogy egy tetszés szerinti alakú háromszög három csúcsába elhelyezett, azonos nagyságú tömegekből álló rendszer súlypontja a háromszög geometriai súlypontja!



9. Igazold azt is hogy egy tetszés szerinti alakú, állandó vastagságú, homogén anyagú háromszög lap súlypontja a háromszög geometriai súlypontja!



10. Határozd meg az alábbi 1 m oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög csúcsaiban elhelyezkedő 3 tömegpontot tartalmazó rendszer súlypontját (tömegközéppontját)!

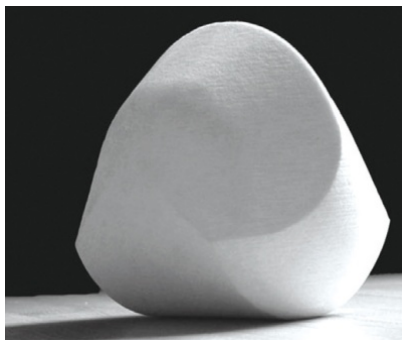


Alkalmazz legalább két különböző koordináta elhelyezést! Igazold az eredmények azonosságát!

A gömböc

A gömböc magyar találmány. Ismerkedj meg vele a világháló segítségével!

11. Hány pontban támasztható alá úgy ez a test, hogy egyensúlyban legyen? Miért különleges ez az eredmény?



Trükkös súlyponti feladatok

Végezd el a fényképen látható kísérletet!

12. Állíts meg egy gyufa segítségével egy villát és egy kanalat az asztal sarkán! Mi a jelenség magyarázata?

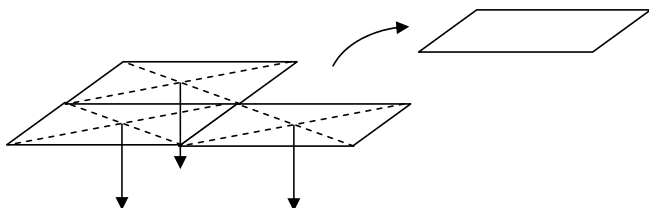


13. Mutass néhány példát arra, amikor egy test (alakzat) súlypontja a testen kívülre esik!



Egy a oldalú négyzetlapból kivágjuk a negyedrészt az ábrán látható módon. Hova kerül a súlypont?

A feladat számos módszerrel megoldható:



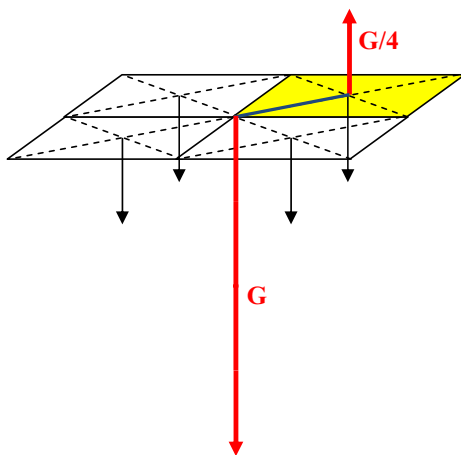
a) Adj össze két erőt, majd az eredőhöz add hozzá a harmadikat!

14. Hol van az eredő erő támadáspontja (a súlypont)?

b) Rajzolj meg két súlyvonalat, s keresd meg metszéspontjukat!

15. Mutasd meg, hogy az eredmény azonos az a) módszerrel kapottal!

c) Kivágni = mínusz egyszeresét hozzáadni!



Hova kerül a súlypont?

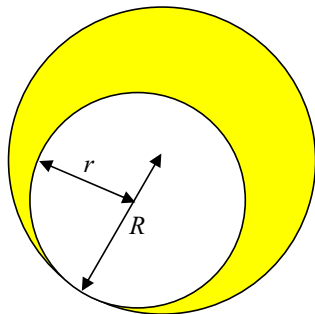
16. Vessd össze eredményedet a többi módszerrel megkapott eredményekkel!

„Holdak” súlypontja

17. Hol van az alábbi homogén síklapból kivágott alakzat súlypontja?

$$r = 2/3R$$

(Figyelj a tömegek arányára!)



Kémia I.

Bevezető

A feladatok kidolgozásakor két főbb elméleti irányt követtem.

(1) Tanári munkám során rendkívül hasznosnak találtam Howard Gardner többszörös intelligencia-elméletét (mellyel egy szerencsés véletlen folytán ismerkedtem meg és amely számos újszerű kémiai feladat kipróbálására inspirált) – különösen a tehetséggondozás során. Gardner szerint mindenki rendelkezik bizonyos alapképességekkel, amelyeket a problémamegoldás során hasznosítani tud. Ezek közül a sikeresebb területek jobban fejlődnek – ugyanakkor a tehetség kibontakozásához (és mindennapi életünkben szintúgy) fontos, hogy ezek a területek minél harmonikusabban fejlődjenek. Mivel mind öröklött adottságaink, képességeink, mind az elénk kerülő problémahelyzetek nagyon változatosak, gyakorlatilag mindannyian egyedi intelligencia-profillal rendelkezünk. Ha az olyan segítő kapcsolatokban, mint amilyen a tehetséggondozó munka is, igyekszünk időről időre kihívások elé állítani a gyengébb területeket illetve a sikerélmény és a komfortérzet eléréséhez támogatni az eleve fejlettebbeket, látványos fejlődést tapasztalhatunk. Növendékeink leginkább kiugró intelligenciaterületeit kis gyakorlattal könnyen felismerhetjük és a feladattípusok tudatos csoportosításával komoly segítséget nyújthatunk tehetségük kibontakoztatásához.

Az elmélet alapján a főbb intelligencia-területeket nagy vonalakban az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze:

csoport	intelligenciaterület	feladattípusok
analitikus	természeti	összehasonlítás, csoportosítás, részletek megfigyelése
	zenei	ritmus, mintázat felismerése, rímfaragás, zene alkotása
	matematikai-logikai	sorba rendezés, listakészítés, algoritmus alkotása, vázlatkészítés, számítások
interaktív	verbális - nyelvi	szavak eredetmagyarázata, szónoklat vagy érvelő szöveg alkotása, szójátékok, történet írása, tapasztalatok leírása, megfogalmazása
	interszónális	reklám, tudósítás készítése, vita, folyamat magyarázata, tanácsok megfogalmazása, szerepjátékok
	testi-kinesztetikus	mozgásos modellezés, manuális feladatok, piactér-feladatok
introspektív	egzisztenciális	halmazábra, tudománytörténeti feladatok, akvárium-gyakorlatok, elvonatkoztatás, általánosítás
	vizuális-térbeli	poszter, grafikon illetve diagram készítése és értékelése, rajzok, ábrák, karikatúra alkotása, fogalmi térkép vagy folyamatábra, tervrajz készítése vagy leolvasása
	intrapersonális	megszemélyesítés, esettanulmányok elemzése, reflexió történetekre, véleményalkotás

A feladatsorokat tehát igyekeztem a változatosság jegyében összeállítani. Nyilvánvaló, hogy az iskolai munka ezen felül számos egyéb lehetőséget kínál. Így például remek fejlesztési lehetőséget nyújtanak és a diákok számára élvezetes feladatok lehetnek: videoklipek vagy podcastok készítése, ismert dalok kémiai tartalmú szövegezése, irodalmi vagy filmes parafrázisok alkotása, mozgásos modellező játékok, webquestek, szerepjátékok.

(2) A másik tantárgypedagógiai elv a felfedeztető tanulás (inquiry based learning) alkalmazása volt. A felfedeztető tanulás arra ösztönzi a tanulókat, hogy kérdéseket fogalmazzanak meg, amelyeknek révén önálló vizsgálódásokat kezdenek. (Ez a tanulási forma rokon a kutatás

alapú, a dizájn alapú, a probléma alapú tanulással és a projektmódszerrel – és valójában mind a négy változatban jól alkalmazható.)



A felfedezettő tanulás folyamatorientált tevékenység, amelyben a tanuló a kérdésfelvetés és vizsgálódás folyamatán keresztül ismeri meg és gyakorolja a természettudományos gondolkodás, ismeretszerzés alapelemeit. A felfedezettő tanulás négy alappillére:

- a tanulás problémahelyzetben történik – ahol probléma lehetőleg kapcsolatban van a tanuló napi tapasztalataival;
- a tanulókat kísérletek, vizsgálatok, megfigyelések végzésére ösztönzi;
- a tanulók a folyamat aktív részesei – és a tanulási folyamat több elemét lehetőleg maguk tervezik vagy szervezik;
- érveléssel, vitával gyakorolják a kritikus gondolkodást és a természettudományos ismereteken alapuló önálló véleményalkotást;

kifinomult értékelő-visszajelző szerepet kíván a tanártól, és a tanár és a növendék között kölcsönös tiszteleten alapuló, bizalmi kapcsolatot feltételez. A felfedezettő tanulás számos formája közül a feladatok többsége segített típusú, zárt tanulási forma, de találunk példát nyitott felfedezettésre is. Mint minden esetben, itt is igaz: ha ezzel a módszerrel kezdünk dolgozni, érdemes az irányított (segített), zárt feladattípusoktól elindulva, fokozatosan haladni a nagyobb tanulói autonómiát igénylő feladattípusok felé. A szakirodalom szerint utóbbi feladattípus alkalmazása a természettudományokban tehetséges, haladó csoportokkal különösen sikeres. Csoportunk igényeinek ismeretében érdemes előre felmérnünk (és folyamatosan követnünk), mikor, mennyi instrukcióra van szükség, mikor érdemes további támpontokkal segíteni a tanulók felfedező munkáját.

Fontosnak tartottam, hogy a kísérletek ne pusztán látványosságokat jelentsenek, hanem sokféle értékelési, értelmezési lehetőséget kínáljanak – és ugyanakkor különösebb laboratóriumi felszerelés vagy vegyszerek nélkül elvégezhetőek legyenek. A mérlegen való mérés mindegyik feladatban helyettesíthető becsléssel – ehhez pedig többnyire akár egy egyszerű konyhai mérleg is megteszi.

Kívánom, hogy egy-egy feladat az osztályteremben vagy szakkörön, esetleg egyéni fejlesztési munkában kipróbálva élvezetes tapasztalatokat és hiteles tanulási élményt szerezzen – tanárnak és növendékeinek egyaránt.

Titokzatos gyümölcskocsonya



A gyümölcstorta igazán csábító édesség – és elkészíteni sem olyan nagy ördöngösség. Kivéve, ha valami mégsem sikerül. Például nem dermed meg a tetején a zselé... De hát miért?! Hiszen követtük a recept előírásait... Akkor hol lehet a hiba? Romlott volt a zselatin? Vagy talán a recept volt rossz? Az alábbiakban egyszerű, „konyhakémiai” kísérlettel deríthetünk fényt a jelenség okára.

(1)

Az első részben a feladatod a kísérlet elvégzése, az egyes lépések dokumentálása (például fényképekkel) és ennek alapján képriport készítése a gyümölcskocsonyával kapcsolatos jelenségekről.

Mielőtt a vizsgálathoz látnál, nézz utána az alábbiaknak:

Hogyan hatnak a katalizátorok? Milyen molekulákat nevezünk enzimeknek? Mi az enzimek szerepe? Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az enzimek? Mit nevezünk szubsztrátnak? Válaszaidat használd fel a képriport készítésénél.

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- zselatin – a legtöbb élelmiszerüzletben kapható
- konzerv ananász
- friss ananász
- szárított (aszalt) ananász vagy fagyasztott ananász vágódieszka, kés
- két kisebb lábos
- 5 pohár
- eszközök feliratok készítéséhez
- tűzhely
- hűtőszekrény

A kísérlet menete:

- Vágj egyforma szeleteket (legalább hármat-hármat) a friss, a konzerv illetve a szárított vagy fagyasztani kívánt ananászból! A friss ananászból kétszer annyi szeletet készíts! (A kísérlethez csak néhány szeletre lesz szükséged, a többit ízlés szerint elfogyaszthatod!) A szeleteket vágd apróra – így az ananászdarabok nagyobb felületen érintkeznek majd a zselatinnal.
- A friss ananász-szeletek egyik felét vízben forrald fel – hagyd főni legalább 3-5 percig!
- Készítsd el a zselatint a zacskón található leírás szerint és a kapott tiszta, de még híg állapotú meleg zselatint töltsd szét, egyformán elosztva az 5 pohárba.
- Készíts feliratokat a poharakra: friss, konzerv, főtt, fagyott ananász és kontroll.
- Helyezd el a megfelelő ananász-szeleteket az egyes poharakba! A kontroll feliratú pohárba ne kerüljön ananász. Ez utóbbi pohár változásaihoz fogjuk hasonlítani a többi pohárban tapasztalt változásokat.
- Tedd a poharakat hűvös helyre (hűtőszekrénybe) és figyeld meg őket 4, 12 illetve 24 óra múlva.
- Tapasztalataidat rendszeresen rögzítsd!

A kísérlet magyarázatához a következőket vedd figyelembe:

A gyümölcskocsonya alapanyaga a zselatin. A zselatin kollagén fehérjékből épül fel, amelyek az állati kötő- és támasztószövetek fontos szerkezeti anyagai. Ezek a fehérjék bizonyos hőmérsékleten egy rendezett szerkezetet vesznek fel: úgynevezett gél állapotot hoznak létre. Ezt a gél állapotú kollagén-víz elegyet nevezzük kocsonyának.

Az ananász (*Ananas comosus*) szára, levele és termése viszonylag nagy mennyiségben tartalmaz egy bromelain nevű enzimet. Ez az enzim az úgynevezett proteázok csoportjában tartozik, azaz fehérjék bontására képes. Esetünkben tehát a bromelain hidrolizálja a zselatin fehérjemolekuláit. A bromelain a kollagén fehérjék egyes aminosavai közötti peptidkötéseket víz beépülése mellett bontja. Ezért a bromelain enzimet az élelmiszeripar is felhasználja. Számos húskészítményben a nagyobb húsdarabokat bromelainnal kezelik. A húsok főzéséhez is használnak bromelain-kivonatot.

A kollagén fehérjéről a honlapon további információkat találhatsz.



Keress választ az alábbi kérdésekre!

Mely molekula volt kísérletedben a szubsztrát? Milyen változásokat tapasztaltál a kísérlet során? Volt-e eltérés a kontroll minta és az ananász zselatin minták között? Milyen eredményeket kaptál a kísérletben? Hogyan függenek össze ezek az enzimek tulajdonságaival? Miért lehet alkalmas a bromelain a húsfélék kezelésére? (Utóbbi válaszodnál gondold végig, hogy a húsok harántcsíkolt izomszövetből épülnek fel; az egyes hús rostokat – a köznap életben nem azt nevezzük rostnak, amit a biológiában izomrostnak hívunk! – kötőszöveti hártya burkolja.)

(2)

Hogyan bizonyítanád, hogy a zselatin a fehérjék csoportjába tartozik?

Tanárod segítségével, az iskolában próbáld ki zselatinnal a fehérjék kimutatására használt leggyakoribb reakciókat! Mit tapasztalsz? Hogyan magyarázod a tapasztalatokat?

Nézz utána! Miből készül a zselatin? Honnan ered, mit jelent a kollagén név? Milyen összefüggést állapíthatunk meg a kollagén fehérje szerkezeti sajátosságai és az élő szervezetekben betöltött szerepe között? Mivel magyarázható a zselatin dermedése?

(3)

Az ananáson kívül más gyümölcs (például a papaya) is elronthatja a gyümölcskocsonya állagát. Keress még három olyan gyümölcsöt, amely bromelain enzimet tartalmaz!

Elképzelhető-e, hogy a mikrohullámú sütőben kezelt gyümölcs nem befolyásolja a zselatin dermedését?

Hogyan készíthető a fenti tapasztalatok alapján ezekkel a gyümölcsökkel gyümölcskocsonya? Készíts folyamatábrát!

Az ananász növény egyes részei (például a levele) nagy koncentrációban tartalmazza a bromelain enzimet. Magyarázd meg, miért okoz az ananász levelének fogyasztása komoly fájdalmat! Milyen veszélyekkel járhat, ha valaki az ananász leveleit megeszi?

(4)

Tervezz kísérletet a bromelain enzim pH-függésének vizsgálatára! Gondold végig az alábbi kérdéseket. Mi a kísérlet pontos célja? Milyen hipotézist fogalmaznál meg? Mik lesznek a függő és a független változók a kísérletben? Mi lesz a kontroll vizsgálat? Milyen eszközökre és anyagokra lenne szükség? Mi legyen a vizsgálat menete? Hogyan rögzítenéd az eredményeket? Hogyan bizonyítanád, hogy az enzim működésváltozása és nem a zselatin dermedési sajátosságai okozzák a kapott eredményeket? Válaszaidat 15-20 sorban fogalmazd meg!

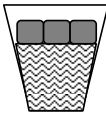
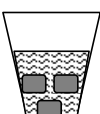
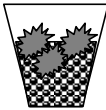
(5)

A bromelain enzimkeverék átlagos moláris tömege 31.000 g/mol, a zselatinban található kollagén molekulatömegét pedig tekintsük 300.000-nek. Az enzim aktivitását jelző turnover értéke 37 °C-on $5 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$. Számítással adj becslést arra vonatkozóan, hogy átlagosan hány gramm kollagént képes 1 gramm bromelain átalakítani 1 óra alatt?

Értelmezzük azt az adatot, hogy a bromelain izoelektromos pontja pH 4,6!

További ötletek tanároknak:

A felfedeztető tanulás céljait jól szolgálja, ha tanítási órán ezzel a reakcióval olyan csoportos tanulókísérleteket tervezünk, ahol mindegyik csoport más-más anyaggal kezeli a zselatin-oldatot. Egy lehetséges összeállítás: friss, aszalt, forralt és konzerv ananász, kivi, alma, narancs – az egyes csoportok így nyilvánvalóan más-más eredményt kapnak, és ez kérdéseket vet fel a tanulóknak. Az alkísérlet nyomán saját kísérleti összeállítások tervezésére ösztökélhetjük növendékeinket: egy ilyen példa a bromelain hőmérsékletfüggése, de az enzim pH-függésére, gátlására szintén számos vizsgálat végezhető. Hasznos lehet az is, ha a tanulók a saját kísérleteikről táblázatos formában készítenek vázlatot, például az alábbi formában:

Friss ananászt tettünk a zselatinba		
<i>makroszkopikus szint: MIT LÁTUNK?</i>		
		
<i>részecskeszint: MI TÖRTÉNIK?</i>		
		
<i>leírás: HOGYAN MAGYARÁZZUK?</i>		
A zselatin megdermedt, a kollagén fehérjék rendezett szerkezetet vettek föl. A dermedt, gél állapotú zselatinba ezután ananászt teszünk.	Eleinte az ananászdarabok a zselatin-gél tetején maradtak. Azután a zselatin egyre folyósabb lesz, lassan elveszíti gél állagát. Az ananászban található bromelain enzim működésbe lép: bontja a kollagén fehérjék egyes pep-	A hígban folyós közegben az ananászdarabok lesüllyednek. A kollagén fehérjéket a bromelain enzim peptidekre bontotta. A kísérlet kezdetén megfigyelt térhálós szerkezetű, fehérjék és víz alkotta kolloid helyett peptidoldatot kaptunk. Az ananász

	tidkötéseit: a szerkezet meg- bomlik.	nagyobb sűrűsége miatt
--	--	------------------------

A módszer neve az angolszász pedagógiai irodalomban storyboard („képes forgatókönyv”), és különösen az Egyesült Államokban népszerű módszer: alkalmas differenciálásra (hiszen a magyarázat mélysége, részletessége eltérő lehet), ugyanakkor rendszeres megfigyelésre és azok rögzítésére ösztönöz.

A bromelain enzimről EC 3.4.22.33 illetve fruit bromelain FA2 néven több tematikus adatbázisban találunk bővebb információkat illetve tudományos közleményeket (például: <http://www.chem.qmul.ac.uk/iubmb/enzyme/EC3/4/22/33.html>).

Az enzimek témakörében tervezhetünk projekteket számos élelmiszer előállításával kapcsolatosan (például: sajt, joghurt vagy alkoholos italok), de hálás téma lehet a mosószerekkel kapcsolatos kutatómunka is.

Hasonló kísérlet található Főző Attila László leírásában a <http://www.sulinet.hu/tart/fncikk/Kidd/0/12551/ananasz.htm> oldalon. Az ott leírt kísérlet tanári demonstráció céljára is alkalmas.

További források:

Lehninger, A.L.: Principles of Biochemistry, Worth Publishers, Inc., New York, 1982, p. 158.

<http://www.woodrow.org/teachers/ci/1986/exp22.html>

Középkori bűntény nyomában

2009. november 5-én régészek azzal a szándékkal ásták ki prágai sírhelyéből Tycho Brahe (1546-1601) testét, hogy tisztázzák a híres dán csillagász halálának okát. Feltételezések szerint ugyanis higanymérgezés végzett a tudóssal. A kutatók remélik, hogy a modern diagnosztikai eszközök tisztázzák Brahe kórtörténetét. A halál valódi okát csontjai, haja és ruházata maradványainak elemzésével szeretnék megtudni.



Ez a feladatsor Tycho Brahe halálának rejtélyén keresztül a higanymérgezés és a higany-szennyezés egyes problémáival is foglalkozik.

Tycho Brahe a középkorban közsímet személyiség, igazi sztár-tudós volt – szinte (mai szóval élve) celeb. Kapcsolatot tartott korának vezető tudósaival, politikusaival, számos uralkodóval (köztük a magyar Rudolf királlyal).

Tizennégy évesen, egy részleges napfogyatkozást látott Koppenhágában: ez meghatározta érdeklődését: kérdésen felül állt, hogy csillagászáttal szeretne foglalkozni – noha szülei jogi pályára szánták. Pártfogója, II. Frigyes norvég és dán király Hven szigetén az akkori Európa talán legmodernebb (és korában leghíresebb obszervatóriumát építtette meg Tycho Brahe számára: vállalva a műszerek beszerzésének és a munkatársak bérének költségét is. Hven szigetén az „Urániborg”-ban (azaz „Az ég kapujában”, ahogyan Brahe nevezte) a csillagvizsgáló mellett gazdasági épületek, lakóépületek és nyomda illetve papírmalom is állt, hogy a friss eredményeket helyben publikálhassák.

Kalandos és számos fordulatban gazdag életének egyik epizódja során jellegzetes sérülést szerzett. Mikor a németországi Rostock egyetemén tanult, egy dán nemessel, bizonyos Manderup Parsbjerggel folytatott párbaja során (1566. december 29-én) elveszítette orrának egy részét. Maga a párbaj egy korábbi vita következménye volt: Lucas Bacmeister professzor házában, egy esküvői multság kapcsán Tycho már korábban összeszólalkozott Parsbjerggel –

először 10-én, majd 27-én ismét. A két napra rá, az éj leple alatt zajló párbajban Tycho tehát elveszítette ornyergét. Az eset következtében Tycho élénken érdeklődni kezdett az alkímia és az orvoslás tudománya iránt. Állítólag élete hátralévő részében arany és ezüst ötvözetéből álló, speciális ragasztó keverék segítségével rögzített műorrot viselt. Néhány kutató (így Fredric Ihren és Cecil Adams) szerint a pótorr rezet tartalmazott: Ihren például azt írja, hogy mikor a csillagász sírját 1901. június 24-én kihantolták, a koponyán a réz jelenlétére utaló zöldes foltokat találtak. Adams a tudós földi maradványainak vizsgálata során tapasztalt zöld színváltozással járó reakcióról beszél. Más történészek szerint Tycho Brahe számos protézist próbált ki, sőt esetleg felváltva viselte ezeket – talán a rézből készült orr kényelmesebb és könnyebb lehetett, mint a nemesfém-ötvözetből készült megoldás.



Jacob de Gheyn metszete: Tycho Brahe – a kép, amely állítólag Shakespeare-t is megihlette

Tycho Brahe váratlanul halt meg, egy prágai díszvacsora után, pontosabban a bankettet követő tizenegyedik napon, 1601. október 24-én. Kepler jól értesült beszámolója nyomán tudjuk, hogy a díszvacsorán, szorult helyzete ellenére Tycho Brahe nem kívánta elhagyni a termet, hiszen az az udvari etikett megsértését jelentette volna. Miután azonban hazaért, már nem volt képes vizeletet üríteni – pontosabban: csak rendkívül csekély mennyiségben, óriási fájdalmak közepette. Közvetlenül halála előtt delíriumos állapotba került: egyre azt hajtogatta, reméli, nem hiába élt. Halála előtt még sürgette Kepler, fejezze be a Rudolf-féle táblák című munkáját (melyet Kepler végül csak 1627-ben adat ki) és hogy ebben Kopernikusz tanai helyett Tycho saját bolygómozgásokról alkotott rendszerét veszi alapul.

Mások szerint Tycho Brahe halálának oka vesekő volt – de erre az 1901- exhumálást követő vizsgálatok nem szolgáltattak meggyőző bizonyítékokkal. A ma leginkább elfogadott nézet szerint a halál legvalószínűbb közvetlen oka az urémia³

(krónikus veseelégtelenség) lehetett. De mitől állhattak le a vesék? Fertőzést kapott a híres tudós? Vagy talán meggyilkolták?

Számos elmélet szól arról, kinek és miért állhatott érdekében Tycho Brahe megmérgezése. Vannak, akik szerint maga IV. Keresztély dán király fizette a bérgyilkost – ennek az elméletnek a hívei szerint a híres csillagász volt egyik ihletője Shakespeare: Hamlet című drámájának is. Mások Keplert gyanúsítják – ennek ellentmondani látszik, hogy Kepler élete fő művéhez, a már említett Rudolf-táblákhoz nagy nehézségek árán, fáradságot nem kímélve szerezte meg

³ Az urémia szó szerint húgyvérűséget jelent. Oka lehet előrehaladott vesekárosodás. Ilyenkor a vese szűrőtéljesítményének nagyfokú csökkenése miatt a termelt vizeletben a szervezetből ürítendő anyagok mennyisége nagyon lecsökken, ezáltal azok felhalmozódnak a szervezetben, a vérben kimutatható koncentrációjuk megemelkedik. Az állapotot gyakran fáradékonyság, étvágytalanság, émelygés és bőrvizsketés tünetei kísérik. Az urémia kezelés nélkül súlyos következményekkel, nem ritkán akár halállal járhat.

Tycho Brahe adatait annak családtagjaitól. Ismét mások úgy vélik, hogy a díszvacsorán egy jezsuita szerzetes csepegtetett mérget Tycho Brahe poharába.

Ha az indítékok felderítése négyszáz év távlatából nem is egyszerű, talán a gyilkosság ténye mégis bizonyítható.

1991-ben a Prágai Nemzeti Múzeum engedélyével Brahe náluk őrzött bajuszának egyes szálain Dániában tudományos tesztekkel végeztek. Az analízis során a mintákban a normális százszorosának számító higanytartalmat találtak.

A Múlt-kor történelmi portál cikke⁴ szerint: „Öt évvel később a Lundi Egyetem orvosai protonmikroszkóppal végeztek további teszteket, és ennek alapján az is kiderült, hogy a végzetes higany mennyiség a halál előtt 13 órával került Brahe testébe. Joshua Gilder amerikai szakértő akkor úgy vélte, hogy a mérénylető higany kloridot használhatott, amelyet Brahe poharába csepegtetett, és ami bőven elegendő volt a biztos halálhoz.”

Az eredmények azonban még mindig nem bizonyultak meggyőzőnek. Ezért a 2010-es exhumálás során a tudóscsoport mintegy 100 milligramm csontmintát, haját, ruhamaradványokat illetve Brahe feleségének (aki híres férje után három évvel halt meg) feltételezett maradványaiból származó csontokat vett. Ezek vizsgálatával kívántak közelebb kerülni a rejtély megoldásához.

(1)

A tudományos eljárásokban a bizonyítékokat nagyon szigorú szempontok szerint értékeli. Megállapítható-e teljes bizonyossággal a csontmintákról, hogy azok Tycho Brahe feleségéhez tartoztak-e? Nézz utána! Milyen szervezetben előforduló anyagok alapján azonosíthatnak teljes bizonyossággal egy személyt? Milyen maradványokkal, hogyan dolgoznak az azonosítás során? Mikor állítható biztosan, hogy egy csontminta adott személytől származik?

(2)

Okozhatta-e Tycho Brahe halálát az orr-implantátumból szervezetébe kerülő fém-szenyveződés? Válaszodat kémiai érvekkel indokold!

Nézz utána! Milyen típusú „zöldes színeződés” illetve „zöld színváltozás” köthető a réz jelenlétéhez?

(3)

Nézz utána! Milyen formában kerülhet a higany az emberi szervezetbe? Milyen tünetei vannak a higanymérgezésnek? Mire használták a higanyt Tycho Brahe idejében? Elképzelhető-e, hogy a tudós testében kimutatott nagy mennyiségű higany alkímiai illetve jatrokémiai kísérletei során került Tycho Brahe szervezetébe? Válaszaid alapján írd 10-15 soros érvelő szöveget!

(4)

A Múlt-kor idézett cikke higany-kloridról beszél. Nézz utána! Milyen fizikai, kémiai tulajdonságokkal rendelkezik a kalomel illetve a szublimát nevű higany-klorid? Honnan származik, mire utal hagyományos nevük? Mi a két vegyület kémiai neve? Kémiai tulajdonságaik alapján milyen élettani hatások köthetők ezekhez a higany-származékokhoz? Eredményeidet foglald táblázatba! Táblázatod alapján írd rövid beszámolót arról, melyik higany-klorid okozhatta Tycho Brahe halálát!

(5)

A kémiai nevek eredete utáni nyomozás is izgalmas összefüggéseket tárhat fel.

⁴ <http://www.mult-kor.hu/cikk.php?id=22977%C2%A0&pldx=2&print=1>

- a) A higany mely tulajdonságaira utalnak az alábbi idegen nyelvű nevei: hydrargyrum (ógörög), argentum vivum (latin), Quecksilber (német), mercury (angol)? Miért gondolhatta Schusztter János, a higany mai magyar nevének megalkotója, hogy az addig a török nyelvből (könösü) magyarított kéneső névre hallgató elemet lehetne szerdanyknak is nevezni?
- b) Tervezz a higany nevének eredetére, tulajdonságaira utaló „periódusos névjegyet”! A Periodic Table Printmaking Project talán inspirálhat ebben: <http://www.azuregrackle.com/periodictable/table/> !

Az ENSZ és az Európai Unió is egyezményekben állapodott meg a higany-kibocsátás és a higany-származékok felhasználásának csökkentéséről. Az ENSZ Környezetvédelmi Programjának (UNEP) Globális Higany Programja (Global Mercury Program)⁵ felmérte a higany-kibocsátással, szennyezéssel és annak ökológiai és egészségvédelmi vonatkozásaival kapcsolatos helyzetet, amelyet számos jelentésben (köztük a 2002-ben, Genfben kiadott Global Mercury Final Report-ban) tett közzé. Az alábbi feladatok ezekkel az adatokkal kapcsolatosak.

(6)

Az alábbi táblázat alapján készíts diagramot, amelyen a különböző forrásból származó higany-mennyiségeket hasonlítsd össze. Indokold meg, miért az adott diagram-típust választottad az összehasonlításhoz. Az elkészített diagram segítségével hasonlítsd össze az egyes higany expozíció értékeket!

Az adatok az ENSZ Egészségügyi Világszervezetének (WHO) 1990-es felméréséből származnak. Az adatok becslésen alapulnak, ugyanakkor egyes országok között jelentős eltérések tapasztalhatók: például ott, ahol több tengeri halat fogyasztanak, a metil-higany mennyisége nagyobb lehet a táblázatban feltüntetett értékeknél.

I. Táblázat Becsült napi higanyfelvétel és –tárolás (a szervezetben maradó higany mennyiségét a zárójelben feltüntetett adatok jelzik) átlagos életmódot folytató, nem higany-származékokkal dolgozó populációban. Az adatok µg/nap egységekben értendők.(WHO/IPCS, 1991).

Forrás/ Expozíció	elemi higany (higanygőzök)	szervetlen higanyvegyületek	metil-higany
levegő	0.03 (0.024)*	0.002 (0.001)	0.008 (0.0069)
amalgám fogtömés	3.8-21 (3-17)	0	0
étel			
- halfélék	0	0.60 (0.042)	2.4 (2.3)**
- egyéb	0	3.6 (0.25)	0
ivóvíz	0	0.050 (0.0035)	0
összesen	3.9-21 (3.1-17)	4.3 (0.3)	2.41 (2.31)

Megjegyzés: A zárójeles adatok felnőtt szervezetére vonatkoznak.

* Ha a koncentráció városi területen 15 ng/m³ (például égetőüzem közelében), az adat 0.3 (0.24) µg/nap értéket érne el.

**Heti 100 g hal elfogyasztását feltételezve, a halban található higany-koncentrációt átlagosan 0.2 mg/kg-nak tekintve.

⁵ <http://www.chem.unep.ch/MERCURY/Report/Final%20Assessment%20report.htm>

(7)

Az amerikai ATSDR (Toxikus Anyagok és Betegségek Ellenőrző Hivatala) szerint például a szervezetből rendkívül kis mennyiségű (0,01%-nál kevesebb) fém higany szívódik fel, még akkor is, ha azt valaki lenyeli. Ha viszont ugyanezt a higanymennyiséget gőzként belélegzik, annak kb. 80%-a bekerül a véráramba, sőt a metil-higanynak (amely elsősorban a halakban és a tenger gyümölcseiben feldúsulhat) kb. 95%-a felszívódik a bélrendszerben. (Forrás: <http://www.labtestsonline.hu/tests/Mercury.html>)

A fenti adatok és a táblázat alapján számítsd ki, melyik a veszélyesebb: egy 5 éven keresztül viselt amalgám fogtömés vagy napi 100 gramm tengeri hal elfogyasztása?

(8)

Az Egyesült Államok Környezetvédelmi Hivatalának (US Environmental Protection Agency, EPA) adatai az alábbi táblázatban láthatók. Az adatok kiszámításánál az alábbi átlagértékeket vették figyelembe:

- a fogyasztók átlagos testtömegét 72 kg-nak tekintették;
 - egy halféléből készült étel esetén 0,23 kg hallal számoltak;
 - egy hónapot 30,44 napos időtartamnak tekintettek;
 - a szervezetben megengedett metil-higany esetén 0.1 µg/kg testtömeg napi értékkel kalkuláltak.
- a) A fenti adatok alapján ismételd meg a számítást a táblázat egyik, szabadon választott sora alapján!
- b) Havonta legfeljebb milyen tömegű halat fogyaszthatunk akkor, ha átlagosan 0,4 mg/kg metil-higanyt tartalmaz a hal szövete?
- c) Évente legfeljebb hányszor lehet halfélét egy 60 kg tömegű ember, ha a hal szervezetében mért metil-higany koncentráció 0,1 ppm?
- d) Készíts grafikont a táblázat adatainak felhasználásával. Fogalmazd meg, hogyan függ össze a halak metil-higany tartalma és az ajánlott halfogyasztás mértéke!
- e) Mekkora tömegű higany kerül be egy 72 kg-os ember szervezetébe, ha havonta négyszer fogyaszt 0,2 ppm metil-higanyt tartalmazó halat? (A szervezetbe a metil-higany 95%-a szívódik fel.)

Az EPA ajánlásai alapján a halfélék illetve a tengeri rák, kagyló fogyasztásakor a táplálék metil-higany tartalmának egészségügyi határértékére 0,3 mg/kg-ot állapítottak meg. Ehhez napi 17,5 gramm halféle elfogyasztását vették alapul.

- f) Hogyan viszonyul ez az egészségügyi határérték a halfogyasztással kapcsolatos EPA ajánlásokhoz? (Véleményed számításal támaszd alá!)

II. Táblázat Az EPA halfogyasztással kapcsolatos ajánlásai a halak szöveteiben mért metil-higany értékek alapján (US EPA, 2001).

Halfogyasztás maximális gyakorisága havonta	A halszövet metil-higany koncentrációja (ppm = mg/kg, nedves tömeg)
16	> 0.03–0.06
12	> 0.06–0.08
8	> 0.08–0.12
4	> 0.12–0.24
3	> 0.24–0.32
2	> 0.32–0.48
1	> 0.48–0.97
0.5	> 0.97–1.9
nincs (<0.5)*	> 1.9

* nincs = egyáltalán nem javasolt a fogyasztása.

> jelentése "több mint" (például "> 0.06–0.08" esetén: "több mint 0.06-től 0.08-ig terjedő tartomány")

(9)

Az alábbi táblázat tanulmányozása után írd legalább tíz megállapítást a higany kibocsátásával kapcsolatban!

III. Táblázat Higany-emisszió az összes higany részarányában

Higany emiszió	Szénttűzelésű hőerőművek	szénégetés – más források	Kőolaj égetése	Cementgyártás	Fémgyártás (kivéve vas)	Nyersvas és vas gyártása	Klór-alkáli vegyületek	Hulladékégetés	Egyéb	Az összes forrás átlaga
Hg ⁰ (g)	0.5	0.5	0.5	0.8	0.6	0.8	0.7	0.2	0.8	0.64
Hg(II)	0.4	0.4	0.4	0.15	0.3	0.15	0.3	0.6	0.15	0.285
Hg (kötött)	0.1	0.1	0.1	0.05	0.1	0.05	0	0.2	0.05	0.075

További ötletek tanároknak:

Tycho Brahe története kapcsolható a fémek témaköréhez illetve a higanyhoz. A higanyszennyezés kapcsán érdekes projekt munka téma a Minamata-betegség illetve a középkori (alkimista) gyógyászat és a jatrokémia modern ismeretekkel való összevetése is.

Ugyanakkor Tycho Brahe maradványainak vizsgálata jól példázza a tudományos bizonyítási eljárás és a találgatások, feltételezések közötti különbséget is. Az alapprobléma alkalmas a DNS-elemzés (aDNS, polimeráz láncreakció) tárgyalására is. A higany-expozícióval kapcsolatos adatok alapján számos más jelenségre – így bioakkumuláció, biomagnifikáció illetve a biogeokémiai körforgalmak és az antropogén hatások kölcsönhatásai – rávilágíthatunk. A UNEP Global Mercury Program honlapján számos angol nyelvű oktatási segédanyag valamint rengeteg adatot, grafikont, táblázatot találhatunk.

Hasznos linkek:

<http://www.hir24.hu/tudomany/170600/exhumaltak-tycho-brahet.html>

http://hvg.hu/vilag/20101027_tycho_de_brahe_csillagasz_sir

http://csillagaszattortenet.csillagaszat.hu/egyetemes_kesokozepkor_csillagaszata/20040422_brahe.html

http://csillagaszattortenet.csillagaszat.hu/egyetemes_kesokozepkor_csillagaszata/20081028_hamlet_csillaga.html

<http://www.hartnell.cc.ca.us/faculty/jhughey/Files/dnaextractionburnedbones.pdf>

http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_profiling

http://en.wikipedia.org/wiki/Forensic_archaeology

<http://www.dgci.sote.hu/file.download.php?id=3332>

<http://www.space.com/9567-bones-danish-astronomer-tycho-brahe-yield-clues-death.html>

<http://www.kfki.hu/chemonet/hun/olvaso/histchem/alkem/jatro.html>

<http://www.kfki.hu/chemonet/hun/teazo/gyujt/elem.html>

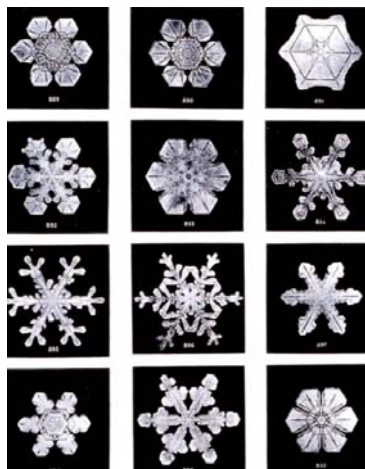
<http://www.labtestsonline.hu/tests/Mercury.html>

<http://www.laboratoriumkft.hu/mintaveteli-es-egyeb-tajekoztato/metabolit-vizsgalati-modszerek/>

<http://www.termeszetakepernyodon.hu>

Hull a hó...

A hópelyhek különleges formái valószínűleg már az ősidőktől fogva rabul ejtették az embert. Meglepő, de még a hóval kapcsolatban is folyamatosan derülnek ki tudományos újdonságok. Tudjuk, hogy a hókristályok voltaképpen általában hat szimmetrikus ággal rendelkező jégkristályok, amelyek a levegőben kicsapódó vízpárából jönnek létre, rendszerint por vagy más idegen anyag körül. Azt is tudjuk, hogy tipikus méretük a mikroszkopikustól a pár milliméteres átmérőig terjed. Noha a hókristályok képződése tehát nem olyan rejtélyes folyamat, a lehullott hó állagáról azonban kevésbé pontos ismereteink vannak. A hóban ugyanis nagyon összetett fizikai folyamatok játszódnak le: a hőmérséklet-változás miatt a vízpára vándorol a szilárd szerkezeti váz között, a folyékony víz pedig újra és újra megfagy. A hókristályok folyamatos alakváltozása (például azok töredezése miatt) hat a hó sűrűségére, az egyes kristályok jégláncokba rendeződése pedig a hóréteg stabilitását befolyásolja. A hó tulajdonságainak mélyebb megismerése nem öncélú tevékenység: segít például a lavínák előrejelzésében, ezért akár életet is menthet. Ebben a részben a hó tulajdonságaival és a jégmentesítés kémiaiával foglalkozunk részletesebben.



(1)

Figyeld meg nagyító illetve mikroszkóp alatt hó- illetve jégkristályokat.

Milyen nehézségbe ütközik a megfigyelés? Hogyan lehet megoldani a feladatot?

Milyen kristályformákat figyelsz meg?

A táblázat adatai alapján becsüld meg, milyen körülmények között keletkezhetnek az általad megfigyelt kristályok!

0- -4° C	vékony hexagonális lemezek
-4 - -6° C	tűs formák
-6 - -10° C	oszlopok
-10 - -12° C	fogazott hexagonális lemezek
-12 - -16° C	dendritek (csipkés hexagonális formák)

(2)

Johannes Kepler tudományos igénnyel írt a hópelyhek geometriájáról – és állapította meg azt, hogy minden hóhély egyedi. Igaz-e ez az állítás? Hogyan lehetne tudományos eljárással bizonyítani?

Mit figyelt még meg Kepler a hókristályokkal kapcsolatosan?

(3)

Az alábbi kísérlet elvégzése után rajzolj tapasztalataid alapján energiadiagramot és ennek segítségével részletesen magyarázd meg a változásokat!

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- nagyobb mennyiségű hó vagy jég
- víz
- tál vagy lavór – ha lehet, fémből készült
- asztal vagy szék, esetleg deszkalap (nagyobb vágódeszka is megteszi)

A kísérlet menete:

- Vékonyan vizezd be az asztallapot (széket, deszkát).
- Tölts nagyobb mennyiségű havat vagy jeget a tálba/lavórba!
- Helyezd a tálat a vizes felületre!
- Várj, míg a tálban lévő jég vagy hó megolvad és figyeld a változást!⁶

(4)

A következő kísérlet magyarázatához szintén készíts ábrát illetve energiadiagramot. Miben különbözik az ebben a kísérletben keletkező „hó” a vízből keletkező hótól? Sorolj fel minél több különbséget!⁷

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- szódásszifon feje (régimódi háztartásokban esetleg nagyszülőknél gyakran fellelhető)
- szódapatron (szén-dioxid vagy szénsavparton)
- sötét színű puha anyag (például posztó vagy bársonydarab)

A kísérlet menete:

- Helyezzük az anyagdarabot a szódásszifon feje alá.
- Csavarjuk be a patront a szódásszifon fejébe.
- Figyeljük meg az anyagdarab felületét.

(5)

Nézz utána! A Naprendszer mely más bolygón képződhet hó? Miben térhetnek el ezek a földi hótól? Válaszodat 10-15 sorban fogalmazd meg!

(6)

Gyűjts legalább 5 olyan fizikai vagy kémiai folyamatot, amelynek segítségével „műhó” nyerhető.

(7)

Földi körülmények között azonban nem mindannyian rajongunk a hóért, hiszen az utakra fagyott jég baleseti kockázatot jelent. Havazás esetén számos jégmentesítési eljárással próbálunk csúszásmentes utakat biztosítani. Végezd el az utak sózásával kapcsolatos modellkísérletet, rögzítsd eredményeidet táblázatos és grafikus formában és tapasztalataid alapján készíts kiselőadás-vázlatot arról, milyen veszélyekkel jár a sózás. Ebben segítségére lehet, ha az alábbi kifejezéseknek is utánanézel: klorózis, boszorkányseprűség, ionvándorlás, korrózió.

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- nátrium-klorid (vagy utakra szánt szórósó, esetleg asztali só)
- növényi magvak (például retek, zsázsa)
- fémtárgyak (például gemkapocs, vasszőg)
- csapvíz
- 5 félliteres műanyag flakon
- 10 edény csíráztatáshoz illetve a fémtárgyaknak
- konyhai papír törölkendő vagy vatta
- vonalzó
- eszközök felirat készítéséhez (például alkoholos filctoll)

⁶ érdekes videóval: <http://www.szertar.com/?s=fagy%C3%A1s+szoba>

⁷ szintén megtalálható: <http://www.tests.hu/show/146/F-E-L> Baranyai Klára és Honyek Gyula leírásában

A kísérlet menete:

- Készíts különböző töménységű só-oldatokat (például rendre 1, 2, 5, 10 m/m%-osat) és ezeket töltsd egy-egy félliteres üvegbe. Az üvegeket gondosan feliratozd, jelölve a bennük lévő oldat töménységét.
- Készíts feliratokat az edényeknek: 2 edény kontroll lesz, ezeket csapvízzel fogod kezelni, a többit a megfelelő oldatokkal. Így 2-2 edényed lesz a mindegyik sóoldathoz.
- Helyezz az edények aljára konyhai papír törölkendőt illetve vattát.
- Számolj le 5 edénybe egyforma mennyiségű (például 10-10) növényi magvat.
- A másik 5 edénybe helyezd el a vizsgálandó fémtárgyakat.
- Nedvesítsd meg az edényekben lévő papírkendőt illetve vattát a megfelelő oldattal illetve a csapvízzel. Figyelj arra, hogy következetesen végezd a vizsgálatot: az 1m/M% NaCl feliratú edény tartalmát tehát mindig csak az 1 m/m%-os sóoldattal kezel! Ne feledkezz meg a kontroll mintáról sem. A kontroll mintákat csak csapvízzel öntözd.
- Készíts jegyzeteket a növények csírázásáról. Hány mag csírázott ki? Naponta mérd meg a csíranövények magasságát? Van-e az egyes csíranövény-csoportok között szemmel látható eltérés (például színükben)? Mi történik a fémtárgyakkal?
- Készíts grafikont a csíranövények fejlődéséről.

További ötletek tanároknak:

A településen készített sýnyom-térkép érdekes (akár történeti) lenyomatát adhatja a helyi csúszásmentesítési szokásoknak. A télen vett hóminták reagens ezüst-klorid-oldattal való vizsgálata is jó alapot jelenthet a hóval kapcsolatos projektmunkához. Az utak sózásával kapcsolatos jogszabályok ellenére megdöbbenő adatokat találunk az egy-egy szezonban elhasznált szórósó-mennyiségről.

Hasznos linkek:

<http://www.sulinet.hu/tart/cikk/Sbi/0/11437/1>

<http://library.ssec.wisc.edu/bentley/>

<http://www.origo.hu/tudomany/20100122-hopehely-nagyitva-egy-hatszogletu-lapkristaly-hideg-elegancia.html>

<http://www.origo.hu/tudomany/elet/20020205ahopehely.html>

Ráncok nélkül

Mióta világ a világ – de különösen mióta nem divat az idősödés, férfiak és nők egyaránt lelkesen kutatták a fiatal bőr titkát.

Ókori legendák keringenek arról, egyes uralkodók mi mindegyre voltak képesek azért, hogy ránciaik láthatatlanná váljanak. De magyar vonatkozású történetek is ismeretesek. Sissy, osztrák császárné és magyar királyné számos szépségpraktikát vetett be az örök fiatalság érdekében. Szerencsére ma már nem kell bizzarr recepteket követni és fellelhetetlen hozzávalók után kutatni. A ráncatlanság egyik titka a megfelelő hidratálás, azaz a bőr nedvességtartalmának megtartása illetve növelése. Ehhez pedig elég, ha kinyitjuk a tévét, azután besétálunk a boltba...

Valóban így van? Vagy mégsem ilyen egyszerű? Mitől marad hidratált a bőrünk? Hogyan változik a bőr nedvességmegkötő képessége és szerkezete az öregedés folyamata során? Mit tartalmaznak és hogyan hatnak mai kozmetikumaink? Ebben a részben ennek járunk utána: természetesen kémiai ismereteinket felhasználva – és remélhetőleg gyarapítva.

Bőrünk sokat elárul szervezetünk egészségéről. Ahhoz, hogy a bőrünket felépítő, annak rugalmasságát biztosító molekulák megfelelő mennyiségben és minőségben termelődjenek, valamint hogy a mérgeanyagok megfelelő ritmusban távozzanak szervezetünkől, szervrendszeink összehangolt működésére van szükség. Ha ez a finom egyensúly megbomlik, bőrünk tükröként közvetíti a veszjelzéseket. Ugyanakkor testünkben a felépítő folyamatok az öregedés során egyre kevésbé hatékonyan működnek. Emiatt az irharétegben a víz megtartásáért (hialuronsav) és a bőr rugalmas szerkezetéért (kollagén és elasztin) felelős molekulák képződése lassabb – és ez látható jeleket hagy bőrünkön. A folyamatot számos öröklött tényező irányítja, de testi és lelki egészségünk, a megfelelő táplálkozás, a bőséges folyadékbevitel és mozgás is alapvetően befolyásolja. A kozmetikai eljárások és egyes készítmények képesek a környezeti vagy az életmódunkból eredő hatásokat enyhíteni, azonban önmagukban nem tudják az öregedést megállítani.

Hidratálásnak nevezzük mindazokat az eljárásokat, amelyek a bőr víztartalmának növelését (vagy megtartását) célozzák. Számos hidratáló készítmény létezik – némelyik igen hangzatos összetevőkkel. Ezek vagy a bőr lipidtartalmát növelik (mivel a bőrben lévő szénhidrát- és észterszármazékok emulzió formájában kötnek meg vizet – ez a hám és irha rétegben is jellemző, a kozmetikusok NMF-ként azaz nedvességmegkötő faktorként emlegetik ezeket a molekulákat), vagy glicerintartalmuk révén maguk is megkötnek vizet, vagy a bőr irharétegének hialuronsav- illetve fehérje- (elsősorban kollagén- és elasztin-) mennyiségét hivatottak növelni. Utóbbi azért nehéz feladat, mert a bőr irharétegéig az olyan óriásmolekulák, amint a kollagén, nem képesek közvetlenül felszívódni – viszont a kollagénszintézis előanyagai igen. Az is igaz azonban, hogy a kollagén-és elasztin-szintézishez szükséges anyagokat az irha kötőszöveti sejtjei a hajszálerek révén odaszállított vérből veszik fel (így az aminosavakat, például a ciszteint, a B- és C-vitaminokat, a kalciumot illetve a nyomelemeket). Ezért a táplálkozás és az életmód szerepe meghatározó. Mivel a fehérjesszintézis igen energiaigényes folyamat, a bőr szépsége szempontjából nem elhanyagolható a szervezet oxigénellátása (és emiatt a keringési rendszer egészsége sem).

A hidratáló krémek emulziók: a nappali krémek és testápolók jellemzően olaj a vízben, az éjszakai és száraz, igénybevett vagy érett bőrre készült krémek víz az olajban típusúak. Emulgeálószer, víz és különféle észterszármazékok mellett úgynevezett aktív hatóanyagokat tartalmaznak: ilyenek lehetnek vitaminok, aminosavak vagy peptidek, nyomelemek. A jobb



eladhatóság érdekében illatanyagokat, tartósítószerket, színezékeket is keverhetnek a krémekbe, némelyik termékben pedig fényvédő hatású molekulák is vannak.

(1)

Gyűjts össze három, a történelmi időkből ismert „fiatalító” kúrát, szépségstíppet vagy receptet és próbáld meg mai kémiai tudásunk tükrében értelmezni azokat.

(2)

Készíts halmazábrát az alábbi kifejezésekkel: hidratáció, hidrolízis, hidratburok, hidrofil, hidrofób, hidroxid, hidroxónium-ion, hidratálás. Ábrádhoz fűzz rövid magyarázatot illetve indoklást!

(3)

A honlapra feltöltött segédlet vagy más források alapján, járj utána: hogyan kötődik meg bőrünkben a víz és mely molekulák biztosítják a bőr rugalmasságát. A szövegek alapján csoportosítsd ezeket a molekulákat kémiai összetételük szerint. A csoportosítás alapján készíts ágrajzot!

Gondolkozd el azon, hogyan befolyásolja táplálkozásunk és életmódunk ezen molekulák megfelelő szintézisét! Készíts listát azokról a tápanyagokról (például vitaminokról, aminosavakról, nyomelemekről), amelyek különösen fontosak a bőr fiatalos egészségének megőrzéséhez. Készíts egy másik listát is, azokról az életmódbeli tényezőkről, amelyek segítik a bőr hidratáltságának megtartását. Harmadik listára olyan életmódbeli és környezeti hatásokat vedd fel, amelyek éppen ellenkező hatást fejtenek ki, azaz öregítik a bőrt.

Két listád alapján készíts profilt két képzeletbeli személyről. „A” (természetesen el is nevezheted, ha kedved tartja) bőre alig ráncosodik, míg „B” bőre száraz és lényegesen idősebbnek tűnik életkoránál.

(4)

Írd össze három hidratáló krém vagy testápoló összetevőit. A honlapon található segédlet alapján csoportosítsd az összetevőket hatásuk szerint. Milyen hasonlóságokat és különbségeket találsz a választott termékek között? Miben hasonlít és miben tér el csomagolásuk, áruk? Ha ismered a termékek reklámjait vagy megfigyeled, milyen üzletekben kaphatók és az üzletek polcain hol helyezkednek el (például: szemmagasságban vagy alul, a kirakatban, a pénztár előtt vagy másutt), az is érdekes adalék lehet a termékek összehasonlításához. Válaszodat 10-15 sorban fogalmazd meg és mellékel a termékek összetevőinek összevetését is.

(5)

Végezd el az alábbi kísérletet! Kísérleteid eredményére keress magyarázatot a felhasznált kozmetikumok összetételének, összetevőinek ismeretében – majd erről készíts kutatási jelentést.

Mielőtt a vizsgálathoz látnál, tanulmányozd az alábbiakat:

A kobalt(II)-klorid kristályvizes só (képlete $\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$) vizes oldatában a hidratált kobalt(II)-ionok málnarózsaszínűre festik az oldatot. Az oldódás során kobalt-klorid akvakomplex képződik, mely a $[\text{Co}(\text{H}_2\text{O})_6]^{2+}$ képlettel írható le. A komplexképzés többlépcsős, egyensúlyra vezető folyamat, ezért ez a rendszer számos hatásra – így nyilvánvalóan a „hozzáférhető” vízmolekulák mennyiségének változására – más-más ponton éri el egyensúlyi állapotát. Így a kobalt(II)-ionok színe a hozzájuk koordinációs kötéssel kapcsolódó vízmolekulákkal arányban változik. Ha kevesebb vízmolekula képes a központi kobalt(II)-ionnal koordinációs kötést kialakítani, akkor lilás, majd kék színt tapasztalunk. A kobalt-akvakomplexek színskáláját egyes kézikönyvek illetve függvénytáblázatok is feltüntetik. Ha

ebbe az oldatba szűrőpapír-csíkokat mártunk és azokat megszáritjuk, a színük rózsaszínről élénk kékre (kobaltkékre) változik. Ha ezeket a kobaltkék színű száraz papírcsíkokat különböző helyiségekbe tesszük, azok színe a helyiség levegőjének páratartalmától függően a kék, lilás és rózsaszín között számos árnyalatot vehet fel. (Ezért régen a kobaltpapírt használták a levegő páratartalmának becslésére is.)

Vizsgálataink során mi is kobaltpapírt fogunk használni. A kobaltpapír színváltozása alapján ugyanis jó becslést adhatunk a krém vízmegtartó (vízmegkötő) képességéről.

Érdemes tudni, hogy a kobalt(II)-ionok lenyelve illetve a szembe vagy nagyobb mennyiségben a bőrre jutva mérgezőek, ezért érdemes körültekintően dolgozni a kobalt(II)-klorid oldattal és a kobaltpapírokat csipesszel és

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- kobalt(II)-klorid-oldat
- szűrőpapír-csíkok, 3-3 darab mintánként és egy kontroll
- csipesz
- spatula vagy üvegbot
- hidratáló krém vagy testápoló minták (legalább három különböző termék)
- hajszáritó
- stopper

A kísérlet menete:

- Készítsd el a kobaltpapírokat: reagens kobalt(II)-klorid-oldatot szívass fel szűrőpapír-csíkokra (a szűrőpapír-csíkokat csipesszel tartva). A nedves szűrőpapír-csíkokat hajszáritó segítségével addig szárítsd, amíg kék színűvé nem válnak. Az egyik kobaltpapír lesz a kontroll, ennek színéhez fogjuk hasonlítani a kobaltpapíron található foltokat.
- A spatula (vagy üvegbot) segítségével kenj egy kevés mintát adott termékből a szűrőpapír-csíkra úgy, hogy az egy foltot alkosson. Jegyezd fel illetve fényképezd le az eredményt. Milyen színű? Mennyire kelt zsíros hatást?
- Hajszáritó segítségével próbáld meg „eltüntetni” a foltot. Sikerül-e? Mennyi időbe tart, amíg a kobaltpapír visszavált kék színűvé?
- Ismételd meg a kísérletet ugyanazzal a mintával még kétszer, és a kapott eredményeket átlagold.
- Ismételd meg a kísérletet a többi mintával is (szintén három-három próbát végezz el.)
- Ne feledd eredményeidet pontosan rögzíteni.

Megfigyeléseidet fényképpel is dokumentáld. Eredményeidet foglald táblázatba és a vizsgált termékek összetevőinek ismeretében kutatási jelentésben értelmezd.

A kutatási jelentés olyan beszámoló, amely tartalmazza a vizsgálat célját, a kiindulási probléma tömör megfogalmazását és röviden összefoglalja a vizsgálat során alkalmazott eljárásokat, majd ismerteti az eredményeket (gyakran táblázatokba foglalva vagy grafikonok segítségével), végül következtetéseket, javaslatokat fogalmaz meg. Esetünkben, vagyis saját kutatási jelentésed szerkesztésekor elsősorban az eredmények és következtetések bemutatására helyezz hangsúlyt, az eljárás bemutatását a fényképek és az azokhoz fűzött magyarázatok segítségével tedd meg.

(6)

Hiteles természettudományos kutatásnak tekinthető-e, ha egy nappali krémről azt olvassuk:

„Kutatásaink során (melyben 135 nőt kérdeztünk meg) válaszadóink 96%-a tapasztalta bőrének fokozott fészségét. A vizsgálatban résztvevők bőrének hidratáltsága átlagosan 24%-kal nőtt. ” Válaszodat indokold!

További ötletek tanároknak:

Az arcápoló termékekkel kapcsolatban leírtakhoz hasonló vizsgálatok végezhetők sok más kozmetikummal is. Érdekes lehet az egyes folyékony szappanok, samponok vagy tusfürdők összehasonlítása is. A honlapon egy ilyen projekt végeredménye is megtekinthető.

Érdekes feladat lehet kozmetikai reklámújságok természettudományos szempontokból való elemzése is.

Hasznos linkek:

Dr. Kosáry Judit: Kozmetikumok biomolekulái. Letölthető: <http://portal.uni-corvinus.hu/index.php?id=19565>

http://www.hazipatika.com/topics/gombasodas/articles/A_bor_felepitesi?aid=20031212113921

http://www.nlcafe.hu/szepuljunk/20081209/3_szabaly_amit_be_kell_tartanod_hogy_megorizd_az_arcborod_feszesseget/

<http://tudatosvasarlo.hu/cikkek/146>

http://www.vital.hu/themes/health/bor_vitamin.htm

<http://www.vitaminsziget.com/ecikk.php?id=25>

<http://www.natursziget.com/page.php?show/nutritionsupps/view/type/kieg/catid/s0001/artid/fvitamintelitetlen>

<http://www.vital.hu/themes/health/cvitamin1.htm>

<http://www.vital.hu/utis/vitamintab.htm>

http://www.shp.hu/hpc/userfiles/drbaumann/ujra_hatoanyag_szeminarium.pdf

<http://www.vitaminsziget.com/ecikk.php?id=1795>

<http://tudatosvasarlo.hu/cikkek/140>

<http://tudatosvasarlo.hu/cikkek/146>

http://www.femina.hu/szepseg/arckrem_korkep

http://www.dolceta.eu/magyarorszag/Mod1/rubrique.php3?id_rubrique=45

Vörösiszap

2010. október 4-én 12 óra 10 perckor a MAL Zrt. Ajkai timföldgyára X. számú vörösiszap-tározójának a gátja átszakadt, ami példa nélküli katasztrófát idézett elő. A tározó melletti Kolontár és Devecser térségét a tejfölszerűen sűrű, erősen lúgos kémhatású iszap elárasztotta, halálos áldozatokat, súlyos sérüléseket, lelki traumát és igen komoly anyagi károkat eredményezve. A katasztrófa híre bejárta a világot és számos ellentmondásos információ is napvilágot látott az eseményekkel kapcsolatban. A helyzet megoldására, a károk mérséklésére tett erőfeszítések mellett vizsgálatok indultak annak feltárására, mi vezetett a tragédia bekövetkezéséhez és melyek azok a legfontosabb közvetlen és közvetett hatások, amelyekkel feltétlenül számolniuk kell a kárenyhítést végző szakembereknek és (nem utolsó sorban) az érintetteknek. Az okok és következmények feltárása és értékelése további vizsgálatokat igényel, ezért ebben a részben nem ezekről, hanem a vörösiszap keletkezésével (és az alumínium felhasználásával) összefüggő néhány jelenségről lesz szó.

A vörösiszap feltakarítása nehézkes, a kiszáradt vörösiszap belégzése pedig az egészségre káros lehet. (Ennek oka egyrészt a szemcsemérete, másrészt pedig erősen lúgos kémhatása.)

(1)

Az alábbi kísérlet során az iszap egyes tulajdonságaival ismerkedünk meg. A kísérlet elvégzése után eredményeidet, becsléseidet és magyarázatodat jegyzőkönyv formájában összegezd!

Mielőtt a vizsgálatához látnál, nézz utána az alábbiaknak:

Mit nevezünk iszapnak? Miben különbözik az iszap és a vörösiszap?

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- három átlátszó, hengeres palack (például ásványvizes flakon)
- eszközök felirat készítéséhez (például alkoholos filctoll)
- durvább szemcséjű homok
- finom szemcséjű homok
- agyag
- víz
- stopper
- vonalzó

A kísérlet menete:

- Készítsünk feliratot a három palackra!
- Tegyük mindhárom palack aljára homokot illetve agyagot!
- Töltsük meg a palackokat vízzel (színültig) és zárjuk le a tetejüket!
- Alaposan rázzuk össze a palackokat! Összerázás után állítsuk mindhárom palackot függőleges helyzetbe!
- Figyeljük meg, mi történik! Megfigyeléseinkhez célszerű stoppert használni!

A kísérlet elvégzése után adj minél alaposabb és pontosabb leírást megfigyeléseidről!

Keress összefüggést! Hogyan függ az ülepedés a szemcsemérettől? Add meg a leülepedett anyag mennyiségét az idő függvényében!

Miért nehéz az iszapot feltakarítani?

(2)

Készíts fogalmi térképet az alumínium felhasználásáról!

(3)

Az alumínium neve a latin alumen szóból származik, amely timsót jelent. Az alábbi gyűjtőmunka a timsóval kapcsolatos.

- Mire használták a timsót az ókorban?
- Mi a kálium-alumínium-szulfát E-száma? Mire használjuk ma?

(4)

Készíts listát a timsó és a timföld közötti kémiai különbségekről!

(5)

Érdeemes kipróbálni a timsó átkristályosítását. Fáradozásaink jutalma gyönyörű, áttetsző kristályok tömege lehet. Az átkristályosítás előtt érdemes számításokkal becslést végezni. Ebben segít az alábbi feladat.

100 g víz 20 °C-on 5,9 g KAlSO_4 -t old, 80 °C-on pedig 100 g víz 71 g alunitot (vagy timsókövet) képes feloldani.

Elméletben mekkora tömegű 80 °C-on telített KAlSO_4 -oldat 20 °C-ra hűtésével juthatunk 100 gramm timsó ($\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$)-kristályhoz?

(6)

Az alumíniumgyártás egyik fázisa az úgynevezett Bayer-eljárás.

Készíts erről folyamatábrát, és ezen jelöld, hol keletkeznek az ipar számára hasznosítható anyagok. Hogyan kapcsolódik a Bayer-eljárás a vörösiszap keletkezéséhez? Hogyan csökkenthető a Bayer-eljárás során keletkező, nem hasznosítható anyagok mennyisége?

(7)

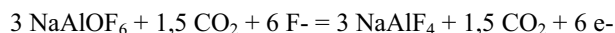
Az alumíniumgyártás Hall-Héroult-eljárásnak nevezett technológiai folyamata során a timföldet 15-20 %-nyi mennyiségben olvadt kriolitban (Na_3AlF_6) oldják fel, és 1000 °C körüli hőmérsékleten elektrolizálják.

Feladatunk ezzel a folyamattal kapcsolatos.

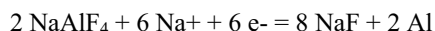
- a) Hol fordul elő a természetben kriolit?
- b) Milyen forrásból származik az iparban használt kriolit?
- c) Mi az oka annak, hogy nem közvetlenül a timföld-olvadékot elektrolizálják?

Az elektrolízis során végbemenő kémiai folyamatokat a következő egyenletekkel lehet leírni:

anód:



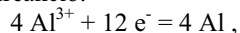
katód:



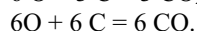
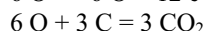
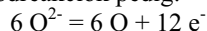
- d) Fogalmazd meg a két elektródon végbemenő reakciót szó-egyenletekkel!
- e) Írd fel a folyamat bruttó reakcióegyenletét!

Az egyszerűsített reakcióegyenletek szerint

a katódreakció:



az anódreakciók pedig:



A folyamat energiavesztesége mintegy 10%, és 1 kg, 99,50%-os tisztaságú alumínium előállításához mintegy 15-22 kWh elektromos energia szükséges. Az elektrolizáló kádakban (amelyben a cellareakciók zajlanak) a felsőtűskés elektródok segítségével elért áramerősség 100.000 -150.000 A.

- f) Mi az oka annak, hogy az elektrolizáló cellákat sorba és nem párhuzamosan kapcsolják?
- g) Számítsuk ki, hogy 120.000 A áramerősség alkalmazása esetén mennyi időbe telik 1 kg alumínium előállítása!
- h) Mennyi ebben az esetben a napi energiaigénye a folyamatnak?
- i) 1990-ben a világ alumíniumkohászata 280 milliárd kWh áramot fogyasztott. Ez elvben mennyi alumínium előállításához elegendő?

(8)

Az alumínium újrahasznosításakor a folyamat energiaigénye a bauxitból történő előállításához képest 70%. (<http://www.freeweeb.hu/hulladek-suli/htan/fem.html>) 1 tonna alumíniumból mintegy 60000 üdítő (sörös-) dobozt lehet előállítani. (Ehhez hozzávetőlegesen 4 tonna átlagos minőségű bauxit szükséges, amelyből 2 tonna timföld előállítása révén jutnak az alumíniumhoz). A feladat további adatai az ÉAI Magyarország Kft honlapjáról származnak (<http://www.aluminiumitaldoboz.hu>)

- a) A fenti adatok segítségével becsüld meg a folyamat energiaigényét!
- b) Magyarországon körülbelül 100.000 alumínium italos-doboz kerül forgalomba évente. Mennyi elektromos energia ezek előállítása?

Európában 2010-ben az italos-dobozok 41%-át hasznosítják újra. Naponta percenként 113204 dobozt dolgoznak fel.

- c) Mennyi energiát nyernénk, ha az összes italos-dobozt újrahasznosítanánk?
- Európában 2009-ben egy év alatt mintegy 1,9 millió tonna alumíniumot hasznosítottak újra. Ez a teljes európai alumíniumigény 32%-át fedezte.
- d) Mennyi energiát spóroltak ezzel az európai országok?

(9)

Magyarországon 2000-ben 835.000 tonna vörösiszap keletkezett (Ez a hazai veszélyes hulladék mennyiségének mintegy 56%-a). A vörösiszap szárazanyag-tartalma 10-30 %.

A vörösiszap tömegszázalékos összetétele:

40-45-% Fe_2O_3

10-15% Al_2O_3

10-15% SiO_2 (nátrium- vagy kalcium-alumínium-szilikát formájában)

6-10 % CaO

4-5% TiO_2

5-6% Na_2O

<1% V_2O_5 , Ga_2O_3 , ritkaföldfém-oxidok

- a) Számítással adj becslést, mekkora tömegű anyagot tartalmaz ez a vörösiszap-mennyiség az egyes összetevőkből.

(10)

Gyűjts tudományos igényű érveket az alumínium újrahasznosítása mellett, megoldásaidat is felhasználva!

(11)

Készíts fogalmi térképet a vörösiszap-katasztrófa következményeiről és a kár csökkentésére illetve a terület helyreállítására tett erőfeszítésekről!

Hasznos linkek:

<http://www.chem.elte.hu/q/v%C3%B6r%C3%B6siszap-katasztr%C3%B3%C3%A1val-kapcsolatos-k%C3%A9miai-fogalmak-magyar%C3%A1zata>

http://www.chem.elte.hu/system/files/ELTE_vorosizap_lexikonja.pdf

http://ligetmuhely.blog.hu/2010/10/21/victor_andras_a_vorosizap_katasztrofa_kemiai_hattere

http://www.katasztrofavedelem.hu/index2.php?pageid=lakossag_kolontar_vorosizap_hatasai

<http://www.kerekdomb.hu/component/content/article/1-friss-hirek/190-a-voeroesiszap-katasztrofa->

<http://vorosizap.bm.hu/>

<http://tests.hu/show/196/F-L>

<http://www.aluminiumdoboz.hu>

Sumi nagashi

Az idegen szavas furcsa cím (kiejtése: szumi nagashi) egy hagyományos japán papírfestési módszerre utal. Az eljárás lényege, hogy tus vagy más speciális festéket öntenek óvatosan a víz felszínére, majd ezeket finoman elkeverik. A víz felületére helyezett itatóspapír (vagy más, nedvszívó papírfajta) megfestődik és megszáritva érdekes mintázatot mutat.



Ebben a részben nemcsak ezzel a japán technikával, hanem néhány festékanyaggal illetve a polaritással és a felületi feszültséggel kapcsolatos problémákkal is foglalkozni fogunk⁸.

(1)

Az első feladat eredményeként akár egy sumi nagashihoz hasonló művészi alkotás is lehet a jutalmad – miközben azonban alkotó képzeletedet szárnyára engeded, időről időre pillants rá munkádra a természetbúvár elemző, vizslató tekintetével is.

Az alkotásodról készült fotó mellé az elkészítés menetének pontos kémiai magyarázatát is várja ez a feladat.

Mielőtt a vizsgálatához látnál, nézz utána az alábbiaknak:

Miből áll, mitől fekete a tus? Hogyan készül? Milyen a tus sűrűsége a vízhez képest? (Válaszodat felhasználhatod ennek a résznek egy későbbi feladatában is.)

A kísérlet elvégzése során nem árt az óvatosság. A tus menthetetlenül összepiszkíthatja ruhánkat. Nem célszerű tehát ruhatárunk legföltettebb darabjait viselni a kísérletezéshez, sőt akár a kísérletre kiszemelt helyet is érdemes újságpapírral (festőfóliával) leteríteni. Az egészen óvatosak viseljenek kötényt, kesztyűt!

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- szűrőpapír, konyhai papír törülköző, félfamentes rajzlap vagy filteres kávéfőzőbe használt szűrőpapír
- fültisztító pálcikák
- esetleg szemcseppentő (a tus cseppentéséhez)
- víz
- tus (művészellátóban vagy hobbiboltban beszerezhető, de akár kémia- vagy rajszakkörön is el lehet készíteni)
- selejtezésre szánt tálca (akár készételek, egyes zöldségek, gyümölcsök vagy húsfélék csomagolására használt műanyag tálca)
- fogpiszkáló vagy hosszabb gyufaszál, esetleg kiselejtezhető műanyag kávékeverő vagy jégkrémes pálcika
- újságpapír vagy konyhai törülköző

A kísérlet menete:

- Töltsük félig a tálcat vízzel!

⁸ Ezt a részt a Sarquis, M, Hogue, L, Hershberger, S, Sarquis, J, Williams, J (2010): Chemistry with Charisma Volume 2 (Terrific Science Press, Middletown, Ohio, USA, pp 101-108, 127-141) kötet inspirálta.

- Pár csepp tust csepegtessünk (cseppentsünk) a víz felszínére – kézügyességtől függően fültisztító pálcikával vagy szemcseppentővel is dolgozhatunk.
- A tusba mártott fültisztító pálcikát érintsünk finoman a víz felszínéhez.
- Egy másik fültisztító pálcikát finoman húzz végig a homlokodon, majd érintsd finoman a tálcában lévő tus felületéhez.
- Próbálgj mintákat készíteni a tálcában – ehhez használhatsz tusba mártott fültisztító pálcikát, kávékeverőt, gyufát vagy fogpiszkálót is: a lényeg, hogy finom, de határozott mozdulatokkal dolgozz. (Ha nagyon erőteljes, durva mozdulatokkal próbálkozol, előfordul, hogy kezdheted előről a kísérletet: ennek ellenére ne add fel: ha a művészi alkotás kútba is veszik, közben természettudományos szempontból értékes tapasztalatokat szerzel!)
- Helyezz papírdarabot (kávéfiltert, konyhai papír törülköződöt, szűrőpapírt, rajzlapot vagy újságpapírt) a kész alkotás felszínére. Ismét nem árt, ha óvatosan dolgozol.
- A papírdarabot emeld ki és leterítve hagyd száradni.
- Fényképezd le alkotásodat!



A kísérlet során tapasztaltak magyarázata mellett az alábbi kérdésekre is válaszolj! Ha van kedved, természetesen ki is próbálhatsz az egyes változatokat, tesztelve elméleti megfontolások alapján adott válaszaidat!

- Mi történik akkor, ha túl sok tintát öntünk a víz felszínére? Válaszodat indokold!
- Mi történik akkor, ha a fültisztító pálcikákkal túl erőteljesen érintjük meg a folyadék felszínét?
- Hogyan befolyásolná a kísérletet, ha a vízhez mosogatószert öntenénk?
- Milyen papírfajták alkalmasak a kísérlet céljára? Melyek nem vagy kevésbé? Mi az oka ennek?
- Befolyásolná-e a végeredményt, ha nedves papírt tennénk a tus felszínére? Miért?
- Van-e köze a tusban található festékanyag vagy a tust alkotó folyadék polaritásának ahhoz, ahogyan a tus a vízre öntve viselkedik? Miért?

(2)

A második kísérlet az elsőhöz nagyon hasonló – talán még inkább teret enged a fantáziádnak. Képzeld, hogy a kísérlet mellett azonban ismét szükség van megfigyeléseid pontos rögzítésére, hiszen ezúttal a kémiai magyarázat mellé az előző kísérlettel való összehasonlítás is a feladatod.

Mielőtt a vizsgálathoz látnál, nézz utána az alábbiaknak:

Hogyan készül, milyen rendszernek tekinthető az olajfesték?

Ezúttal sem árt a körültekintés, megóvándó ruházatot és a körülötted lévő bútorokat. Jobb, ha újságpapírt terítesz a földre és az asztalra is.

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- két különböző színű olajfesték (művészellátóban, kreatív vagy hobbi boltokban kapható)
- szűrőpapír vagy filteres kávéfőző papír
- víz
- fogpiszkáló vagy gyufaszál
- kávékeverő vagy egyéb műanyag pálcika
- eldobható (selejtezésre szánt) műanyag tálca
- konyhai törülköző illetve újságpapír

A kísérlet menete:

- Töltsünk annyi vizet a tálcára, hogy az legalább 1 cm-es réteget alkosson az az edény alján!
- Fogpiszkáló vagy gyufaszál segítségével cseppentsünk a festékből a víz felszínére. Próbáljunk egészen finoman és hirtelen, erőteljes mozdulattal is festéket csepegtetni. Van-e különbség? Mi a tapasztalataink magyarázata?
- Próbálj meg mintákat készíteni – ehhez használd a másik festéket is. Próbáld meg elkeverni a két festéket a vízen illetve a vízben. Finoman dolgozz – és figyeld meg tapasztalataidat.
- Helyezz papírdarabot (kávé filter papírt, konyhai papír törülközőt, szűrőpapírt vagy újságpapírt) a kész alkotás felszínére. Ismét nem árt, ha óvatosan dolgozol.
- A papírdarabot emeld ki és leterítve hagyd száradni.
- Fényképezd le alkotásodat!

Tapasztalataid magyarázata mellett az alábbi kérdésekre is válaszolj! Ha van kedved, természetesen ki is próbálhatod az egyes változatokat, tesztelve elméleti megfontolások alapján adott válaszaidat!

- Miben hasonlított ez a kísérlet az előzőhöz? Megfigyeltél-e különbségeket? Milyen hasonlóság és milyen különbség van a két alkalmazott anyag (a tus és az olajfesték) között?
- Mi történne, ha a vízbe mosogatószeret tennénk?
- Mi történne, ha alkoholos vízzel dolgoznánk?
- Mi történne, ha a vízre felváltva, ugyanabba a pontba megpróbálnánk tust illetve olajfestéket csepegtetni?
- Mi történne, ha az olajfesték vízre cseppentése után a tálcát finoman megmozgatnánk?

Válaszaidat indokold!

(3)

A harmadik kísérletnek látszólag kevesebb köze van bármilyen művészi alkotáshoz.

Mielőtt a vizsgálatához látnál, nézz utána az alábbiaknak:

Mit jelentenek az alábbi kifejezések: kohézió, adhézió, felületaktív anyag, felületi feszültség?

Milyen molekulákat tartalmaznak a felületaktív anyagok?

Hol használunk a hétköznapi élet során felületaktív anyagokat?

Mit jelentenek a tenzid, detergens, surfactant, emulgeálószer kifejezések?

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- tisztítószer oldata (például: fürdőszobai – például zuhany vagy üvegfelületek takarítására ajánlott – tisztítószer, erős mosogatószer, mosogatógépbe való öblítőszer, konyhai zsíroldó – például tűzhelytisztító)
- ételfesték
- csapvíz
- 2 pohár
- viaszos felületű papír
- fogpiszkáló
- pénzérme
- szemcseppentő
- konyhai törülőkendő illetve újságpapír
- nagyító

A kísérlet menete:

- Készítsünk egy pohárban ételfestékkel megfestett vizet. (Ez igen egyszerű: adjunk pár csepp ételfestéket a vízhez és alaposan keverjük el! Figyeljünk arra, hogy ne adjunk túl sok ételfestéket a vízhez!)
- Öntsünk kevés tisztítószerrel a pohárba és higítsuk fel legalább kétszeres térfogatúra.
- Cseppentsünk a tisztítószer illetve a festett víz oldataiból a papírra. Figyeljük a cseppek alakját, méretét. Próbáljunk meg egymáshoz nagyon közel cseppenteni mindkét oldatból. Próbáljuk meg a lehető legnagyobb cseppet létrehozni. Időről időre nagyító alatt is vegyük szemügyre papírunkat.
- Egy pénzérme (például tízforintos) felületére próbálj meg minél több cseppet cseppenteni először az egyik, majd a másik oldatból. Hány cseppet tudsz az egyik illetve másik oldatból a pénzérmére csepegtetni?

Kísérleti tapasztalataid magyarázatánál feltétlenül térj ki az alábbi kérdésekre:

- Miben különbözött a két oldat a cseppképzés szempontjából?
- Hogyan függ össze a cseppképzés a folyadék felületi feszültségével?
- Milyen másodrendű kötéserők határozzák meg a víz felületi feszültségét?

Gondolkodj el az alábbi kérdéseken is. Ha van kedved, kísérlettel tesztelheted elméleti megfontolásaid alapján adott válaszaidat.

- Mi történne, ha túl sok ételfestéket adnánk a vízhez? (Vegyük figyelembe, hogy a legtöbb ételfesték tartalmaz emulgeálószeret.)
- Befolyásolja-e a pénzérmére cseppenthető cseppek számát a cseppentés szöge, magassága?
- Hogyan változnának eredményeink, ha grafitporral bekent lapra cseppentenénk?
- Mennyibe kapnánk más eredményt, ha üvegre, alufóliára vagy műanyag csomagolófóliára cseppentenénk az oldatokból?

(4)

A negyedik kísérletben az előzőekben vizsgált folyamatokat nézzük meg közelebbről. Szénporral fogunk kísérletezni – és most művészi hajlamaidat a tapasztalatok megfogalmazásában élheted ki igazán. Feladatot a kísérlet elvégzése után az lesz, hogy egy szénpor-szemcse szemszögéből írd le a kísérlet során megfigyelteket, egyúttal magyarázattal is szolgálva a jelenség okaira. Fogalmazásod lehetőleg 1-20 soros terjedelmű legyen.

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- aktív szén tabletta
- faszén-darabka vagy grafitpor csapvíz
- mosogatószer vagy tisztítószer
- 2 átlátszó tálka, csésze, műanyag edény vagy nagyobb szájú pohár
- kiskanál vagy spatula

A kísérlet menete:

- Öntsünk csapvizet mindkét edénybe. Az egyik edénybe töltsünk mosogató- vagy tisztítószer.
- Törjük össze az orvosi szén tablettát illetve a faszén-darabkát.
- Szórjunk a szénporokból a víz felszínére és figyeljük meg a változást.
- Mozgassuk meg mindkét edényt – előbb finoman, majd erőteljesebben.
- Jegyezzük fel tapasztalatainkat, esetleg készítsünk fényképet a változásokról.

(5)

Nézz utána! Hogyan készül, összetételét tekintve miben különbözik a tus, a tinta, a tempera és a gouache! Milyen heterogén rendszereket képviselnek ezek az anyagok? Van-e közöttük kolloid? (Ha igen, milyen típusú?) Hogyan függ össze ezen anyagok alkalmazása az általuk elérni kívánt művészi hatással?

További ötletek tanároknak:

A kémia és a „művészkedés” összekapcsolására szép kísérleteket vízüveg-oldattal („a vegyész virágoskertje”), antocián-kivonattal vagy fémkomplexekkel – erre számos példát találunk Rózsahegyi Márta – Wajand Judit: Látványos kémiai kísérletek című munkájában (Mozaik Oktatási Stúdió Kft., 1999.).

Hasznos linkek:

<http://hu.wikipedia.org/wiki/Tempera>

<http://hu.wikipedia.org/wiki/Gouache>

http://en.wikipedia.org/wiki/India_ink

<http://www.lakberendezes.hu/iras/mutatcopy.php?id=316>

<http://www.freeweb.hu/kapcsoskonyv/>

<http://www.suminagashi.com/>

Mennyire cukros?

Nyári melegben különösen jó érzés elkortyolni egy-egy pohár hideg üdítőt. Ugyanakkor számos felmérés tanúsága szerint – különösen fiatal korban – nemcsak az elhízásért, de a kettes típusú cukorbetegségért is (a mozgásszegény életmód mellett) elsősorban a túlzott üdítőfogyasztás tehető felelőssé. A mértéktelenül fogyasztott üdítőitalok emellett számos más betegség kialakulásához járulnak hozzá: ilyen például a fogszuvasodás vagy a csontritkulás.

Azért egy-egy pohár üdítőital elfogyasztása még önmagában nem fenyegeti egészségünket. Nem árt persze tudni, milyen mennyiség az, amit még „büntetlenül” elfogyaszthatunk. Ebben a részben az édes ízek világába kalandozunk.

Üdítőket számos módon édesítenek. Gyakran használnak hozzá gyümölcscukrot vagy gyümölcs- és szőlőcukor keverékét (fruktóz-glükóz szirup), de természetesen a répacukor is gyakori összetevő. Számos cukormentes termék is forgalomban van – ezek fogyasztása ugyan a cukorbetegség vagy az elhízás kialakulásához nem járul hozzá, mégsem árt az elővigyázatosság: nagy mennyiségben allergiás reakciókat, hasmenést, a bélfal irritációt vagy étvágy-növekedést okozhatnak.



(1)

Ebben a feladatban most a nem diabetikus („diétás”) üdítőkkel foglalkozunk. Vizsgálatunk egyfajta becslés – a pontos értékek megállapítására nem alkalmas. Ugyanakkor érdekes összevetésre ad alkalmat. A feladat elvégzéséről készíts fényképeket, amelyeket a beadandó posztertervben fel tudsz használni.

A feladat megoldását egy Word formátumban elkészített tudományos poszteren kell beadni. A tudományos poszter egy-egy kutatási eredményt illetve az ahhoz vezető folyamatot mutatja be. Figyelemfelkeltő, mégis tárgyilagos. A poszter címe utal a vizsgálat céljára, esetleg eredményére is. A poszteren célszerű bemutatni a vizsgálat célját, módszereit, főbb eredményeit és az ebből levonható következményeket (gyakran egybekapcsolva e kettőt). Érdeemes néhány, de nem túl sok szakirodalmi hivatkozást is megadni. A poszter szerkesztésénél alapvető cél az áttekinthetőség és az érthetőség: ezért kevés, de igen lényegre törő szöveggel (esetleg grafikonnal, táblázattal) és néhány képpel dolgozzunk (a képek nem pusztán a díszítést szolgálják: okosan elhelyezve nagyban segítik mondanivalónk megértését). A poszteren mindig szerepeljen a szerző neve (komoly posztereken természetesen a kutató intézeti háttére – például az egyetem vagy kutatóintézet neve – és a kutató titulusa is szerepel), elérhetősége (például e-mail címe).

Hasznos összefoglalót találsz a műfaji sajátosságokról egyebek mellett a Kutató Diákok Országos Szövetségének honlapján (<http://www.kutdiak.hu/56-7147.php>). Ez a szervezet évenként meghirdet poszterversenyt is. Ha valamelyik projektet különösen jól sikerült, nagyon tanulságos, ha abból posztert készítesz és esetleg egy ilyen fórumon bemutatsz.

A poszterek bemutatása általában a poszter előtt, néhány percben, a poszter elemeit felhasználva történik: ezért azoknak, akik nem szoktak hozzá, hogy nagyobb tömeg előtt, hosszabban beszéljenek (például kiselőadást vagy előadást tartsanak) vagy zárkóztabbak, a posz-

ter-szekció jó ugródeszka lehet az önálló előadás megtartása felé. Különösen kezdő előadók önbizalmát növelheti egy-egy jól sikerült poszter-prezentáció.

Ebben a feladatban tehát egy, a fenti követelményeknek megfelelő poszter tervét kell beadnod. A poszter tervéhez az A/4-es formátum megfelelő. (A posztereket a gyakorlatban legtöbbször A/1-es méretben, nagyobb betűkkel nyomtatják, hogy kényelmesen olvasható legyenek.)

Mielőtt a vizsgálatához látnál, nézz utána az alábbiaknak:

Milyen összetevőket és energiatartalmat tüntettek fel az egyes, mintául választott üdítők csomagolásán? Adataidat rendezd táblázatba.

Ismételd át Arkhimédész törvényét. Gondold végig a következőket. Mit mond a törvény a sűrűség és a felhajtóerő kapcsolatáról? Hogyan függ a vizes oldatok sűrűsége összetételüktől?

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- legalább három, különböző fajta üdítőből 2-2 dl
- kristálycukor
- csapvíz
- 8 darab, legalább 3 dl-es átlátszó műanyagpohár vagy hasonló térfogatú (3-5 dl-es) egyforma üvegpocharak
- konyhai mérőedény vagy mérőhenger az oldatok készítéséhez
- kiskanál vagy spatula
- keverőkanál, szívósál vagy üvegbot az oldatok keveréséhez
- mérleg (esetleg konyhai mérőpohár)
- egy kb. 8 cm hosszú ceruza (amit nem sajnálsz „feláldozni a tudomány oltárán”)
- vonalzó vagy mérőszalag
- zsebkész
- alkoholos filctoll
- borsónyi méretű gyurma
- papírtörölköző

A kísérlet menete:

- Az üdítőket töltsük ki és hagyjuk állni, hogy a szén-dioxid-tartalmuk minimálisra csökkenjen. Csak akkor használjuk fel a mintákat a továbbiakban, ha már pezsgést illetve buborékokat szabad szemmel nem észlelünk. A vizsgálatához 2-2 dl üdítőre lesz szükség mindhárom mintából.
- Készítsük el a kontroll oldatokat! Az egyik pohárba töltsünk 2 dl csapvizet. A másik négy kontroll pohárba 2-2 dl-t töltsünk a külön előkészített cukor-oldatokból, amelyek rendre 4, 8, 12 illetve 16 tömegszázalékosak kristálycukorra nézve. (Előtte számítsd ki, mennyi kristálycukorra illetve vízre van szükséged ezeknek az oldatoknak az elkészítéséhez!)
- Készítsük el a becsléshez használandó „mérőeszközt”! A ceruza kihegyezett végétől mint nulla ponttól kezdve vonalzó segítségével húzzunk 1-1 cm távol ságra vonalakat. Ezeket a vonalakat a zsebkész segítségével jelöljük meg, majd a jobb láthatóság kedvéért alkoholos filccel is húzzuk át. Figyeljünk arra, hogy az egyes vonalak ne legyenek túlságosan vastagok illetve, hogy ne faragjunk túl mélyen a ceruza anyagába. Ha ezzel készen vagyunk, a ceruza tompa végére (oda, ahol esetleg a radír is van) helyezzünk el borsónyi mennyiségű gyurmát. És most jön a türelemjáték. Ha szerencsénk és ügyes kezünk van, akkor a ceruza a gyurmás végével lefelé a csapvizet pohárba helyezve lebegni fog úgy, hogy a pohár széléhez nem ér hozzá. Ha ez nem így lenne, akkor a gyurma mennyiségének változtatásával illetve a gyurma gombóc finom formázásával próbáljuk meg függőlegesen egyenesbe állítani a ceruzát. Ha sikerült

elérnünk, hogy a ceruza lebeg és nem ér a pohár falához, igyekezzünk úgy kiemelni, hogy a végére illesztett gyurma ne deformálódjon – a továbbiakban így sok bosszúságtól kímélhetjük meg magunkat.

- A fentiek szerint elkészített „mérőeszközt” helyezzük rendre a csapvízbe illetve négy mérőoldatunkba! Jegyezzük fel, hogy a ceruza hegyes végétől számítva milyen távolságra található a folyadékszint.
- Ismételjük meg vizsgálatainkat az üdítőmintákkal is. Jegyezzük fel a folyadékszint távolságát a ceruza hegye végétől mérve.
- Hasonlítsuk össze a kapott adatokat.

Változat:

A fentiniél kifinomultabb eszközt is készíthetünk, a következőképpen⁹. Vegyünk egy legalább 10 cm hosszú, műanyag Pasteur-pipettát (lehetőleg olyat, amelynek vége egyenes). Vékony alkoholos filccel és vonalzó segítségével (segít, ha esetleg a jelölés idejére a vonalzót egyszerűen a pipettához cellux segítségével odaragasztjuk) vegyünk fel fél centiméterenként egy skálát a pipetta hegyes végétől mint kezdőponttól számítva (hasznos lehet, ha a skálát kétféle színnel vesszük fel, az egész értékeket például pirossal, a feleket pedig kékkel). A pipetta hasas részébe illesszük bele egy nagy szöveget úgy, hogy az teljesen a pipettába érjen, de ne érintse annak szárát (jó, ha legalább 0,5 cm – 1 cm távolság még marad). Töltsük meg a pipettát félig vízzel. A pipettába felszívott (felpumpált) víz teljes mennyiségének a hasas részben kell lennie, lehetőleg semmi se maradjon a szárában. Ezután helyezzük a pipettát csapvízzel telt pohárba és figyeljük meg, mekkora része áll ki a vízből. Addig változtassuk a pipettában levő víz mennyiségét, amíg a pipetta felső része legalább 1, legfeljebb 3 cm-re áll ki a vízből. Ismét ügyeljünk rá, hogy ne maradjon víz a pipetta szárában. Arra is figyeljünk, hogy a pipettához illetve a szöghöz ne tapadjanak levegőbuborékok akkor, amikor a vízes pohárba tesszük – ennek finom rázogatóással, forgatással vehetjük elejét. Fáradozásunk eredményeként egy, a ceruza-hidrométernél pontosabb eszközt kapunk.

Gondolkodjunk!

Mit állapíthatunk meg vizsgálataink alapján az üdítőminták összetételéről? Vessük össze a napi ajánlott cukorbevitel mennyiségét az üdítőmintákban becsült illetve az azok csomagolásán feltüntetett mennyiségekkel. Mekkora térfogatú vizsgált üdítő fedezi az ajánlások szerint egy átlagos felnőtt napi cukorbevitelét? Mekkora térfogatú üdítő elfogyasztásával fedezhető egy átlagos felnőtt napi energiaigénye? Hogyan viszonyulnak ezek az adatok üdítőfogyasztási szokásainkhoz?

(2)

Gondoljuk végig a vizsgálat eredményeit más szempontok szerint is!

- Hogyan függ össze a fenti kísérlet Arkhimédész törvényével?
- A cukron kívül milyen oldott anyagokat tartalmazott a három üdítő-minta? Készíts listát azok összetevőiről. Nézz utána, milyen szerepe van az egyes komponenseknek és csoportosítsd az egyes minták összetevőit aszerint, milyen céllal használják fel őket az üdítő készítésekor. Eredményeidet foglald táblázatba!
- Miért volt fontos, hogy „csendes” (azaz szén-dioxid- tartalmától nagyrészt megszabadított) állapotban vizsgáljuk az üdítő-mintákat?
- Mit tapasztalnánk akkor, ha a „mérőeszközünket” friss szénsavas üdítőmintákba tennénk? (20 pont)

⁹ Az eszköz leírása a Sarquis, M, Hogue, L, Hershberger, S, Sarquis, J, Williams, J (2010): Chemistry with Charisma Volume 2 (Terrific Science Press, Middletown, Ohio, USA, p 152) kötetben található.

(3)

Miért hűsít jobban a jéghideg üdítő, mint a jéghideg víz? Mi a kémiai magyarázata annak, hogy nyáron kellemesebb fagyaltot enni, mint jégkockát szopogatni?

(4)

A szacharin gyakori édesítőszer, az élelmiszer-adalékanyagok katalógusában E954 számon szerepel, $C_7H_5NO_3S$ összegképlettel rendelkezik. Az egészségügyi ajánlások szerint az elfogadható napi beviteli mennyisége (ADI): 2,5 mg/testtömeg kg.

- Mennyi szacharint fogyaszthatnál el naponta?
- Keress egy „diétás” vagyis cukormentes üdítőt és nézd meg, milyen édesítőszert vagy –szereket tartalmaz. Adataid alapján
- Milyen vegyület és hol fordul elő a fenil-alanin? Miért szerepel sok cukormentes üdítő csomagolásán a „fenil-alanin forrás” vagy a „fenil-alanint tartalmaz” kifejezés?

(5)

Készítsünk az iskolaújságba szánt kritikus tudósítást a szacharin történetéről az alábbi táblázat alapján. Gondoljuk végig: milyen ellentmondások fedezhetők fel a történetben, és milyen okok állhatnak ezek hátterében?

1879.	Ira Remsen és Constatntin Fahlberg, a John Hopkins Egyetem kémikusai első alkalommal publikálnak a benzooesav-sulfimid, közismertebb nevén szacharin tulajdonságairól.
1901.	Az Egyesült Államokban megalapítják a Monsanto vállalatot, ahol elkezdik a szacharin tömeggyártását.
1907.	Az USA Mezőgazdasági Minisztériuma vizsgálódni kezd, hogy a cukor helyett használt szacharin nem hágja-e át a 1906-os egészséges élelmiszerekről alkotott törvényt. Theodore Roosevelt, aki maga is szacharinfogyasztó, ellenzi a vizsgálatot.
1909.	Szakértők megállapítják, hogy a szacharin fogyasztása kis mértékben (napi $\frac{1}{2}$ gramm) teljesen biztonságos.
1914-1918.	A cukorhiány miatt a tartósított élelmiszereket szacharinnal édesítették, a kormány felold minden megszorítást a szacharinnal szemben.
1950-es évek	A fogyókúrázók előnyben részesítik a szacharin, mint mesterséges édesítőszer használatát a kalóriaszegény táplálkozásban.
1970-es évek	Kutatók megállapítják, hogy a szacharin rendszeres fogyasztása hozzájárulhat a rák kialakulásához.
2000.	Újabb kutatások alapján a tudósok felszólítják az Amerikai Toxikológiai Programot, hogy a szacharint húzzák ki a rákkeltő élelmiszerek listájáról.
2001.	Az amerikai Food and Drug Administration (FDA) a szacharint emberi fogyasztásra biztonságosnak állapítja meg.
2010.	Az Amerikai Környezetvédelmi Ügynökség leveszi a szacharint a veszélyes anyagokat tartalmazó listáról.

(6)

A szacharin IPAC szerinti neve: 1,1-Dioxo-1,2-benzothiazol-3-one. Nézzünk utána, milyen szerkezeti képlettel írható le ez a vegyület. Készítsük el a szacharin molekulamodelljét és fényképezzük le alkotásunkat! A szacharin szerkezeti képlete alapján magyarázzuk azt az adatot, hogy a vegyület pK_s értéke 2. Reagálna-e ennek alapján a szacharin nátrium-hidrogénkarbonáttal, nátrium-hidroxiddal vagy fémnátriummal? Válaszodat indokold!

Hasznos linkek:

<http://www.sweetab.hu/?p=erdekessegek&s=szacharin>

<http://en.wikipedia.org/wiki/Saccharin>

<http://www.e-szam.hu/mutat/311>

Varázslatos C-vitamin

Mi, magyarok különösen büszkék lehetünk akkor, ha a C-vitaminról hallunk. Nobel-díjas tudósunk, Szent-Györgyi Albert neve összeforrt a C-vitaminéval – a vitamin nagy mennyiségű előállítása óriási szolgálatot tett az emberiségnek, hiszen amennyiben nem jut be rendszeresen megfelelő mennyiség szervezetünkbe, annak súlyos következményei lehetnek.



A C-vitamin ugyanis temérdek, szervezetünkben zajló folyamathoz elengedhetetlen – ráadásul sok civilizációs ártalom vagy káros életmódbeli hatás (például a dohányzás) enyhítésében is segít. Számos élettani állapot esetén jótékony hatású, és más anyagokhoz képest még a kérdéses esetekben (például nagyobb adagok alkalmazása esetén) is csak kevés kockázattal rendelkezik. Közismert az is, hogy a C-vitamin néven ismert anyag valójában az aszkorbinsav. Ennek ellenére számos tévképzet kering az aszkorbinsavról. Ennek oka a felületes ismeretek mellett talán az, hogy mind élelmiszereinkben,

mind kozmetikumainkban találkozhatunk vele – és egyesek egyszerű összetevőként, mások egyenesen csodaszerként tekintenek rá.

Élelmiszereinkben a vonatkozó előírások alapján az aszkorbinsav általánosan, mennyiségi korlátozás nélkül (quantum satis) engedélyezett. (Kivételt csupán azok a termékek jelentenek, amelyek a törvényalkotó szándéka szerint nem tartalmazhatnak adalékanyagot.) Az aszkorbinsavat gyakran E-300 számával jelölve tüntetik fel a termék összetevőinek listáján – azonban C-vitaminként csak akkor, ha kifejezetten a vitamintartalom növelésének céljából használják.

Miért szükséges C-vitamint fogyasztanunk? Milyen hatása van a C-vitaminnak? Többek között ennek járunk utána ebben e részben.

(1)

Az alábbi kísérlet számos változatban ismert¹⁰. Mi most egy egyszerű formában használjuk fel a C-vitamin kémiai tulajdonságainak vizsgálatára. Eredményeid alapján készíts 5-10 diából álló prezentációt.

Mielőtt a vizsgálathoz látnál, nézz utána az alábbiaknak:

Milyen szerkezeti képlettel írható le az aszkorbinsav? Miért nevezzük savnak? Milyen fizikai és kémiai tulajdonságokkal rendelkezik az aszkorbinsav?

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- Betadin-oldat
- aszkorbinsav (gyógyszertárban olcsón beszerezhető)
- C-vitamin tabletták
- zöldségek, gyümölcsök
- konyhai papír törülköző, itatópapír vagy szűrőpapír (esetleg kávé filter)
- 2 tálca
- fültisztító pálcika
- kés, vágódeszka

¹⁰ Lásd Rózsahegyi Márta és Wajand Judit munkáit.

A kísérlet menete:

- Önts az egyik tálcára egy kevés vizet és ebbe cseppents annyi Betadin-oldatot, hogy a víz színe élénk barnássá váljon.
- Márts a vízbe szűrőpapírt, majd a megfestett papírt tedd át a másik tálcára.
- A papírlapon próbálj aszkorbinsavba mártott fültisztító-pálcikával (mielőtt a porba mártanád, enyhén nedvesítsd meg a végét), a C-vitamin darabbal illetve különböző zöldségekből és gyümölcsökből kifaragott darabkákkal vonalakat húzni. Figyeld meg, mi történik.

A kísérlet magyarázatához használd fel, hogy a Betadin-oldatban a jó d komplex formában, I_2 (jód-) molekulaként megkötve (ebben a formában vízzoldhatóvá téve) van jelen, redukált I^- (jodid-) ionként szintelen.

(2)

Tervezz kísérletet annak megállapítására, hogyan befolyásolja a hőkezelés az élelmiszerek C-vitamin tartalmát!

Kísérlettervedben szerepeljen:

- a problémára vonatkozó hipotézis és az ezt alátámasztó szakirodalmi hivatkozás
- a szükséges anyagok és eszközök listája;
- a kísérlet menetének pontos leírása;
- az eredmények értékelésének módja;
- a kísérletet esetlegesen befolyásoló tényezők vizsgálata.

(3)

Végezd el az alábbi megfigyelést!

Almaszelet egyik felére kenj aszkorbinsavat, másik felét hagyd szabadon.

a) Mit tapasztalsz? Hogyan magyarázható a jelenség?

A C-vitamint az élelmiszeriparban gyakran használják hűskészítményekben is, különösen akkor, ha a termék nitrites pác-sót is tartalmaz.

b) Milyen kémiai magyarázata van ennek az eljárásnak?

(4)

Készíts videoklip-forgatókönyvet, Szent-Györgyi Albert, a kémikus címmel. Olyan tervet készíts, amely szerinted iskolai órákon bemutatható, legfeljebb 10 perc hosszú. A klip legyen figyelemfelkeltő, de tartalmazzon tényeket, adatokat a híres tudós kémiai munkásságáról. Törekedj arra, hogy a Nobel-díjas kutató életének és felfedezéseinek magyar vonatkozásait emeld ki, és Szent-Györgyi Albert emberi nagyságát is mutasd meg.



(5)

Készíts kortársaidnak szánt szórólap-tervet, „Mire jó a C-vitamin” címmel. Szórólapodon szerepeljen a napi C-vitamin szükséglet mellett néhány olyan állapot, amikor különösen fontos lehet a C-vitamin szedése, a C-vitamin néhány természetes forrása, valamint a C-vitamin hiányának tünetei és túladagolásának kockázatai. Szórólapod épüljön tényekre, legyen érthető és könnyen olvasható, férjen el egy A/5 formájú lapon.

(6)

Az alábbi leírás alapján készíts folyamatábrát a „mesterséges C-vitamin” előállításáról. Keressd meg a szövegben szereplő vegyületek képletét és azokat építsd be folyamatábrádba.

Készíts magyarázó szövszedetet („kislexikont”) folyamatábrához!

„Az aszkorbinsav gazdaságosan előállítható a Reichstein és Grüssner által 1936-ban kidolgozott szintézissel, ami még ma is használatos. Ez a szintézis a legolcsóbb cukorból, a D-glükózból indul ki. Ezt először hidrogénezéssel szorbittá telítik, majd ezt mikrobiológiai oxidáció segítségével L-szorbózzá alakítják. Ennek hozama 60%. Az L-szorbózt acetonnal 2,3-4,6-diaceton-L-szorbózzá kondenzálják, majd ennek hidroximetil-csoportját kálium-permanganáttal karboxilcsoporttá oxidálják. Ekkor 2,3-4,6-diaceton-2-keto-L-gulonsav képződik. Ha ennek a vegyületnek a vizes oldatát rövid ideig melegítik, a védőcsoportok az oldat saját aciditása folytán lehidrolizálnak. Az ekkor képződő 2-L-gulonsavat sósav jelenlétében melegítik. Ekkor enolizáció történik és a γ -laktongyűrű kialakul, aszkorbinsav képződik. A szintézis legkényesebb lépése a 2-keto-L-gulonsav aszkorbinsavvá alakítása. A szintézisre emiatt két változatot dolgoztak ki, ekkor a 2-keto-L-gulonsav 53%-os hozammal alakítható L-aszkorbinsavvá, és 100 gramm glükózból 20-30 g aszkorbinsav nyerhető.”

További ötletek tanároknak:

A C-vitamin kapcsán számos érvelő feladat vagy akvárium-gyakorlat alkalmazható. Ilyenek például adott egyén C-vitamin szükségletének megállapítása, a mesterséges vagy természetes forrásból származó C-vitamin bevitel, a C-vitamint tartalmazó kozmetikumok illetve a C-vitamin fogyasztás.

Az érvelés történhet előre elkészített adatlapokkal (például az aszkorbinsav fizikai és kémiai tulajdonságait bemutató kártya, egyes élelmiszerek C-vitamin tartalmának összefoglaló táblázata) vagy tanulói gyűjtőmunka alapján.

Az akvárium-gyakorlat lehet bírósági tárgyalás vagy tudományos konferencia, esetleg tudósok és különböző forrásokra támaszkodó laikusok vitája (ilyen áltudományos érveket sajnos könnyűszerrel és bőven találunk például a világhálón).

Érdekes kutatómunka végezhető a skorbut betegségről – összefüggésbe hozva a C-vitamin biokémiai szerepével és vízdoldékonyságával, a földrajzi felfedezések (akár Magellán utazásának, de akár az Északi- vagy a Déli-sark meghódításának számos expedíciójával) és a hosszú utazások vagy háborúk (például a napóleoni hadjáratok vagy fogolytáborok) különösen megrázó történeteivel. A kutatómunka során feltárt ismeretanyag megjeleníthető a hagyományos formák (kiselőadás, poszter, prezentáció) mellett például élő állóképek sorozatával, amelyet a csoport egyik tagja magyaráz – vagy amelyet az osztály tagjai közösen fejtenek meg. Ilyen élőképeket készíttethetünk akár előre kiadott szövegrészek alapján is. Érdekes téma lehet még a Szent-Györgyi-Krebs-ciklus (citromsav-ciklus) kémiai szempontból történő elemzése (reakciótípusok, molekulák csoportosítása).

Hasznos linkek:

<http://nov.lkg-bp.sulinet.hu/~aaa/sejt/nobel.htm>

<http://tudatosvasarlo.hu/eszam/e-300-aszkorbinsav>

<http://www.tankonyvtar.hu/biologia/fermentacios-080904-26>

Vándorol a víz

Mi érdekeset árulhatunk el egy olyan köznap és közismert anyagról, mint a víz? Amivel gyakran találkozunk, sokszor éppen ezért nem is vesszük igazán szemügyre. Az alábbi, vízzel kapcsolatos vizsgálódások is csupa-csupa olyan jelenségre hívják fel a figyelmet, amelyet nap mint nap tapasztalunk – ha nem is mindig közvetve. A víz állandó vándorlása – sejtjeinkben, keringési rendszerünkben és környezetünkben – életünk alapját jelenti. Talán olyan, szintén hétköznapi ismerőseink, mint a virágok, a zöldségek vagy éppen a gumicukor, segítségünkre lehetnek abban, hogy többet megtudjunk ezekről a folyamatokról.



(1)

Végezd el és elemezd az alábbi kísérletet a táblázat kitöltésének segítségével!

Csapvíz és sóoldat hatása növényekre		
kiindulás állapot	a folyamat során	végállapot
érzékszervi tapasztalatok – rajz vagy fotó		
részecskeszint - vázlatrajz		
magyarázat – szöveges megfogalmazás		

Mielőtt a vizsgálathoz látnál, nézz utána az alábbiaknak:

Mit nevezünk ozmózisnak? Miben különbözik az ozmózis és a diffúzió? Milyen tulajdonságai vannak a féligáteresztő hártványnak?

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- 4 magasabb pohár
- csapvíz
- konyhasó (közönséges asztali só vagy bármilyen étkezési só is megfelel)
- friss szárzeller, sárgarépa, petrezselyem, pitypang vagy vágott virág
- fonnyadt szárzeller, sárgarépa, petrezselyem, pitypang vagy vágott virág
- eszközök feliratok készítéséhez (papír, gumi vagy öntapadós matrica esetleg alkoholos filctoll)

A kísérlet menete:

- Készítsd el a tömény sóoldatot!
- Készíts feliratokat: 2 pohár sóoldatot és két pohár csapvizet fogsz használni.
- Töltsd félig a poharakat a megfelelő oldatokkal.
- Helyezz egy szálfal friss növényt a sóoldatot tartalmazó pohárba, egyet a vízbe.
- Tégy hasonlóképpen egy-egy szálfal fonnyadt növényt a sóoldatba illetve a csapvízbe.
- Figyeld meg kísérleti összeállításodat néhány napon keresztül.
- Megfigyeléseid alapján töltsd ki a táblázatot.

(2)

Az (1) feladattal kapcsolatban válaszolj az alábbi kérdésekre:

- Miért nem volt fontos, hogy tiszta nátrium-kloridot használjunk a kísérletben?
- Függ-e a folyamat sebessége az érintkező felületek (határfelületek) nagyságától?
- Hogyan használjuk fel a jelenséget a befőzésnél, élelmiszerek tartósításánál? Add meg egy befőzési recept minél pontosabb kémiai „fordítását”!

(3)

Az alábbi vizsgálat elvégzése után a táblázat kitöltése, az eredmények grafikus ábrázolása és azok magyarázata lesz a feladatod.

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- gumicukor
- konyhasó (vagy bármilyen fajta étkezési só)
- csapvíz
- edények oldatok készítéséhez
- mérleg
- 8 pohár
- konyhai törlőkendő
- kiskanál
- eszközök feliratok készítéséhez



A kísérlet menete:

- Készíts telített sóoldatot.
- Készítsd el a feliratokat: 4 pohár sóoldatot, 4 pohár csapvizet fogsz használni.
- Mérd le mérlegen minél pontosabban az egy-egy pohárba helyezett gumicukor tömegét (példánk esetén tehát 3 darab gumicukor tömegére van szükség).
- Töltsd félig a poharakat a megfelelő oldatokkal, majd mindegyik pohárba tegyél egyforma mennyiségű gumicukrot (például 1-1 dl folyadék esetén hármat-hármat).
- 20 perc elteltével vedd ki a gumicukrokat az egyes poharakból, konyhai törlőkendőn (szűrőpapíron) csöpögtesd le a folyadékot a cukorról, majd minél pontosabban mérd le a tömegüket. Vigyázz: könnyű összekeverni az egyes oldatokból kihalászott gumicukor-darabkákat! Célszerű tehát a poharak elé tenni az azokból származó mintákat.
- Eredményeidet az alábbi táblázatban foglald össze:

minta	A gumicukor tömegének változása					
	csapvízben			tömény sóoldatban		
	kezdeti állapot	végállapot	változás	kezdeti állapot	végállapot	változás
1.						
2.						
3.						
4.						

(4)

Tervezz kísérletet, amelyben a gumicukor egyes oldatokban való tömegváltozását méred az idő illetve az oldat töménységének függvényében. Két kísérletterved közül az egyiket végezd is el. Eredményeidet táblázatban és grafikusán is rögzítsd. Magyarázd meg a tapasztalataidat!

(5)

Az alábbi két vizsgálat elvégzése után a feladatod az lesz, hogy saját kérdésed alapján vizsgálatot tervezz.

Mielőtt a vizsgálathoz látnál, nézz utána az alábbiaknak:

Mit nevezünk kapillárisnak? Mit nevezünk kapilláris jelenségnek? Mit jelentenek az adhézió és a kohézió kifejezések?

I. kísérlet:

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- 2 mikroszkóp tárgylemez
- alufólia-darabka, befőttesüveg teteje vagy egy fél Petri-csészé
- csapvíz
- élénk színű ételfesték
- szappanos víz

A kísérlet menete:

- Tölts az ételfestékkel megfestett vízből egy keveset az alufóliára vagy a befőttesüveg tetejébe.
- Fogd össze szorosan a két tárgylemezt és állítsd merőlegesen az ételfestékes vízre. Tartsd ott egy ideig.
- Ismételd meg a kísérletet a következő változtatásokkal is: (a) szappanos vizet festesz meg az ételfestékkel; (b) különböző távolságra tartod a tárgylemezeket; (c) vízzel előzőleg „összetapasztod” a tárgylemezeket.

II. kísérlet:

A kísérlethez a következőkre lesz szükséged:

- fehér virág (hosszabb szárral – például szegfű) vagy szárzeller szára
- élénk színű ételfesték
- csapvíz
- üveg vagy pohár, amiben a választott növény megáll
- éles kés, olló, esetleg borotvapenge

A kísérlet menete:

- Önts ételfestéket az üveg aljára, hígítsd meg kissé vízzel (úgy, hogy azért eléggé élénk színű maradjon).
- Vágj le egy kis darabot a növény szárának végéből – fontos, hogy a folyadékba merülő szárdarab végén ne legyen elhalt rész.
- Állítsd a szárzeller szárát vagy a virágot az üvegbe úgy, hogy annak szára legalább 0,5 cm-rel a folyadékszint alatt legyen.
- Másnap figyeld meg ismét és jegyezd fel tapasztalataidat.

Néhány ötlet a saját megfigyelésekhez :

- Hogyan hat a szappanos víz a II. kísérleti összeállításra?

- Mi történne, ha víz helyett benzint / acetont használnánk?
- Befolyásolja-e az ételfesték koncentrációja a kísérleti eredményeket?
- Mi történne, ha a növény szárát hosszában kettévágnánk, és kétféle színű oldatba / vízbe illetve sebbenzinbe állítanánk?
- Mi történne, ha ételfesték helyett más festékfajtákat használnánk?

(6)

Egy gumicukor-fajta olyan nátrium-klorid-oldattal tart fenn ozmotikus egyensúlyt, amelynek sűrűsége 1 g/cm^3 , fagyáspont-csökkenése 2°C . Számítsuk ki a gumicukor ozmotikus nyomását! Hogyan és mennyivel változna ennek a gumicukorral izotóniás nátrium-klorid-oldatnak az ozmotikus nyomása, ha hőmérséklete 20°C -ról 0°C -ra csökkenne?

(7)

Ki volt az az ókori gondolkodó, aki a vizet tekintette a legfontosabb őselemnek? Készíts listát a víz azon tulajdonságaitól, amelyek az ókori görög tudós nézetét támogatják!

További ötletek tanároknak:

A biológiai tanulmányok (növénytan, keringési rendszer – lásd ennek a kötetnek a biológia fejezetét is) mellett érdekes összefüggéseket vonhatunk az élelmiszer tartósítási eljárások vagy a szeszesital-előállítás módok és a transzportfolyamatok között – például projektfeladat keretein belül. Ehhez részletes leírást találunk Bujna Ferenc tollából a <http://palinkafozde.wouldhide.hu/cikkek/jobb-minosegu-a-fahordoban> -tartolt-palinka/ linken. Az épületek védelme, szigetelése szintén izgalmas kitekintés és jó alap egy-egy órai projekthez, további vizsgálathoz.

Hasznos linkek:

<http://amiotthonunk.hu/epitesi-tanacsok/a-talajparatol-a-csapadekig.html>

<http://www.muszeroldal.hu/measurenotes/viztulajdonsagaie.html>

<http://www.kfki.hu/chemonet/hun/food/technol/zoldseg/zoldseg.html#41>

Kémia II.

Növények eledele

Problémafelvetés:

Szőrnyű, 29 halálesetét és kb. 10 ezer ember fizikai sérülését okozó robbanás rázta meg a Toulouse nevű francia várost 2001. szeptember 21-én. Az üzemben, ahol a katasztrófa történt, főként ammónium-nitrátot, ill. ammónium-nitrát alapú műtrágyákat gyártottak. A robbanás erejét a szakértők kb. 20-40 tonna TNT-ével (trinitro-toluol) egyenértékűnek becsülték, az anyagi kár nagysága pedig mintegy 1,5 milliárd Euró volt. A baleset következményeként Franciaországban és az egész Európai Unióban széleskörű vita indult a kockázatbecslés és kockázatkezelés szabályozásának elégtelenségéről. Ez végül egy új francia törvényhez és az európai irányelvek módosításához vezetett.

Az ilyen történeteket hallva sokakban megfogalmazódik az a kérdés, hogy ha ennyire veszélyes egy anyag, akkor miért nem tiltják be teljesen a gyártását. Egyébként is: miért van szükség erre a rengeteg műtrágyára és egyéb kemikáliára, amit használunk, ha olyan sok kárt okoznak, amiről nap, mint nap hallunk a médiából? Vagy egyáltalán, miért nem zárják be az összes vegyi üzemet, amik szennyezik a környezetet, sőt néha még az emberek életét is veszélyeztetik?

Feladatok:

1. lépés: Gyűjts össze az interneten, nyomtatásban, ill. a mezőgazdasági boltokban vagy nagyobb áruházakban fellelhető információkat a jelenleg magyarországi kereskedelmi forgalomban kapható műtrágyákról! **Derítsd ki** mindegyik általad megismert műtrágya legfontosabb jellemzőit:

- Milyen kémiai összetevőket tartalmaznak?
- Milyen szempontok alapján tudnád őket csoportosítani?
- Milyen kiszerezésben kaphatók és azok mennyibe kerülnek?
- Milyen növénykultúra esetén, mikor és hogyan kell őket alkalmazni?
- Milyen munkabiztonsági szabályok vonatkoznak a használatukra?

2. lépés: Gondold végig, milyen általad korábban tanult vagy különböző forrásokból kideríthető kémiai és biológiai ismeretek vonatkoznak erre a témára! (Szükség esetén ehhez használhatod a jelen feladatlap „**A növények tápanyagszükségletéről szóló összefoglaló és gyakorló feladatok**” c. részében megadott internetes forrásokat.) Milyen vegyületek formájában lehetnek jelen valójában ezekben a termékekben a műtrágyák csomagolásán feltüntetett kémiai elemek? Melyik formának mi az előnye és mi a hátránya? Miért van ezekre az anyagokra szüksége a növényeknek? Mi történik, ha a növény nem jut hozzá megfelelő mennyiségben az adott tápanyaghoz? Mi a káros következménye annak (a nyilvánvaló anyagi veszteségen túl), ha fölöslegesen sok műtrágyát alkalmazunk? Elméleti és gyakorlati ismereteid alapján csoportosítsd a műtrágyákat egy **táblázatban**! A táblázat megszerkesztésekor használd a fentiekben (ld. 1. lépés) készített jegyzeteidet és/vagy egyéb, általad fontosnak tartott szempontokat!

3. lépés: Az összes összegyűjtött információ alapján **válassz ki** az általad megismert műtrágyák közül **egy terméket**, amelynek a megvásárlását **egy általad meghatározott célra** (pl. egy adott típusú talajon fekvő kiskertben, az év egy adott szakában, adott növénykultúra esetén) **a legcélravezetőbbnek** tartod! Gondold végig és indokold, hogy milyen formában (pl. szilárdan szétszórva, adott koncentrációjú oldattal locsolva stb.) kellene ezt a műtrágyát a növények számára biztosítani! Ennek alapján számítsd ki, hogy egy adott nagyságú területre mennyi ilyen műtrágyára lenne szükség, és mennyibe kerülne azt

megvenni! Lenne-e olcsóbb, de valamilyen más szempontból mégis kevésbé előnyös megoldás? Milyen előnyei és hátrányai lennének a természetes eredetű istállótrágya alkalmazásának? Írj minderről egy tömör, de minden lényeges információt és érvet áttekinthető, esztétikus formában megjelenítő **szakvéleményt!**

4. lépés: Tervezz és végezz egyszerű kísérleteket annak bizonyítására, hogy megfelelő mennyiségű műtrágya alkalmazása esetén a növények gyorsabban fejlődnek, mint anélkül, de a túladagolás haszontalan, sőt káros is lehet! (Végezhetsz pl. mustármaggal vagy babbal ún. „csíráztatási tesztek”, de természetesen más is). Határozd meg milyen adatok alapján teszed megállapításaidat és minden tapasztalatodat, valamint **mérési eredményedet gondosan jegyezd fel! Számítógépes alkalmazások segítségével** (táblázat, grafikon és/vagy ábra készítésével) rendszerezd egy **jegyzőkönyvben** az összes mérési adatot és a hozzákapcsolódó magyarázatot!

5. lépés: Olvasd el a növények tápanyagszükségletéről szóló alábbi összefoglalót és gyakorlásképpen oldd meg a hozzájuk kapcsolódó **feladatokat!**

A növények tápanyagszükségletéről szóló összefoglaló és gyakorló feladatok

A következő szövegbe épített gyakorlófeladatok megoldásához sok segítség található az alábbiakban megadott linkeken. Előre felhívjuk azonban a figyelmedet arra, hogy ezeken a weboldalakon jóval több információt találsz a növények tápanyagszükségletéről (az első két esetben magyar, ill. a harmadik linken angol nyelven) mint amennyi számodra jelenleg szükséges. Az egyik feladatod tehát éppen az, hogy felismerd és kigyűjtsd a számodra fontos, a jelen feladatlap sikeres megoldásához szükséges ismereteket:

- http://www.mkk.szie.hu/dep/talt/rg/agrokemia_BSC_levelezo.ppt
- <http://www.tankonyvtar.hu/mezogazdasag/integralt-080904-88>
- [http://www1.agric.gov.ab.ca/\\$department/deptdocs.nsf/all/agdex6607#potassium](http://www1.agric.gov.ab.ca/$department/deptdocs.nsf/all/agdex6607#potassium)

A XVIII-XIX. század tudományos és technológiai vívmányai az európai népesség nagyarányú növekedéséhez vezettek. Több embernek több élelem kellett, de már nem álltak rendelkezésre újabb, a mezőgazdasági művelésbe bevonható nagy földterületek. A probléma egyetlen reális megoldása tehát a magasabb termésátlagok elérése volt. Sajnos a különféle vetésforgók alkalmazása ellenére sem lehetett adott talajon bizonyos eredményeknél jobbat felmutatni, mivel ez kizárólag a talaj tápanyagszükségletének folyamatos utánpótlásával lehetséges. A szerves trágya korlátozott mennyisége miatt az intenzív mezőgazdasági műveléshez mindenképpen műtrágyázásra volt szükség.

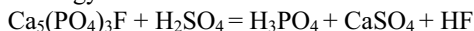
A **nitrogén, a foszfor és a kálium** az a három kémiai elem, amelynek vegyületek formájában való utánpótlása a leggyakrabban szükséges ahhoz, hogy a talaj „ne merüljön ki”. Ezekon kívül persze még számos más (vegyületekben kémiaiilag kötött) elemre is szüksége van a növényeknek. Ezek azonban vagy szinte korlátlan mennyiségben állnak rendelkezésre (mint például a szén és az oxigén a levegő szén-dioxidjában, ill. a hidrogén és az oxigén a vízben), vagy pedig csak kisebb mennyiségben kellenek a növények normális életműködésének fenntartásához (mint a „mikroelemtrágyákban” lévő vas, cink, réz, molibdén stb.).

A meszet, a csontlisztet és a fahamut már kb. kétezer évvel ezelőtt is használták a jobb termés elérése érdekében. A „műtrágyázás” bevezetése azonban egy nagy német vegyész, *Justus von Liebig* érdeme volt. Az ő nevéhez fűződik a Liebig-féle minimum törvény. Ebben kimondta, hogy **a termés nagyságát a növények igényéhez képest minimumban lévő tápelem határozza meg**. Liebig állította elő először 1840-ben a csontliszt „kénsavas

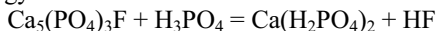
feltárásával” (azaz vízzel oldható vegyületté váló alakításával) a növények foszforigényének fedezésére szolgáló „szuperfoszfátot”. Ez ásványi foszfátok (ún. „nyersfoszfátok”, „apatitok”) kénsavas, foszforsavas vagy salétromsavas kezelésével is gyártható. Liebig találmánya volt az is, hogy az egyik acélgyártási technológia melléktermékeként keletkezett nagy foszfortartalmú, ún. „Thomas salak” is alkalmas (megőrlés után) műtrágyázásra. Hazánkban az első műtrágyagyár 1890-ben létesült Budapesten, ahol szuperfoszfátot gyártottak (<http://mek.niif.hu/01200/01216/01216.htm>).

1. feladat:

a) Rendezd a szuperfoszfát műtrágya fluorapatitból kénsavas feltárással történő előállításának alábbi kémiai egyenletét!



b) A „triplefoszfát”-ot (vagyis „hármasszuperfoszfátot”) szintén apatitokból (pl. fluorapatitból) lehet előállítani, de ebben az esetben foszforsavas feltárást végeznek, az alábbi (szintén kiegészítendő) egyenlet szerint:



c) A triplefoszfát foszfátartalma tehát nagyobb (mert gipszmentes) és ráadásul (a szuperfoszfáttal ellentétben) nem is higroszkópos (azaz nem vízmegkötő tulajdonságú, tehát a levegőn állva nem csomósodik össze). Ezért a kijuttatása olcsóbb, mint a szuperfoszfáté.

Mit gondolsz, miért állítanak elő mégis szuperfoszfátot is?

d) A műtrágyák hatóanyagtartalmának kiszámításakor a foszfátartalmat P_2O_5 (foszfor-pentoxid) egyenértékre átszámítva szokták megadni. Ez azt jelenti, hogy annyi foszfort tartalmaz, mintha a megadott tömegszázaléknyi foszfor-pentoxid lenne benne. A foszfor azonban valójában nem foszfor-pentoxidban, hanem más vegyületekben (pl. dihidrogénfoszfát sókban) van kémiaiilag kötve. Erre a fölöslegesen bonyolultnak tűnő foszfortartalom megadási módra azért van szükség, mert az alapanyagtól és az előállítás módjától függően többféle foszforvegyület is előfordulhat egy adott műtrágyában. Ezért a pontos összetétel meghatározása nagyon bonyolult méréseket igényelne. Ezekre azonban nincs szükség, hiszen csak azt akarjuk tudni, hogy mennyi hasznosítható (azaz vegyületeiben kötött) foszfor van bennük, ami viszont elég könnyen mérhető. Mindezek ismeretében számítsd ki, hogy megadható-e helyesen a következő módon a szuperfoszfát összetétele: $\text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2 \cdot \text{H}_2\text{O} + \text{CaSO}_4$, ha a P_2O_5 -ra átszámított hatóanyagtartalma $w=18\%$? Ha nem jó ez a megadási mód, akkor mely kémiai összetevő(k)ból kell benne az 1:1:1-nél nagyobb anyagmennyiség-arányban lennie?

e) Mennyi lenne tömegszázalékban a $\text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$ képletű triplefoszfát foszfor-pentoxidra átszámított hatóanyagtartalma? Kisebb vagy nagyobb ez, mint a szakemberek által megadott $w=42-52\%$ és vajon miért?

2. feladat:

A nitrogén utánpótlás egyik előnyös formája az ammónium-nitrát műtrágya alkalmazása, de ez számos veszélyt is hordoz magában. Egy weboldalon (<http://mek.niif.hu/01200/01216/01216.htm>) a következőt olvashatjuk az ammónium-nitrátról: „Bár az ammónium-nitrát rendes körülmények között stabil, magas hőmérsékleten számos bomlási reakción megy keresztül. Az alábbi reakciók jelentősek:

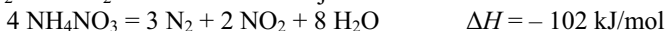
- (1) Endoterm disszociáció és a pH csökkenése 169 °C felett:



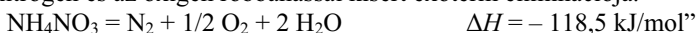
- (2) A N_2O exoterm eliminációja 200-260 °C-ra történő óvatos melegítés során:



- (3) A N_2 és a NO_2 exoterm eliminációja 230 °C felett:



- (4) A nitrogén és az oxigén robbanással kísért exoterm eliminációja.



[A fenti információkat az *N. N. Greenwood* és *A. Earnshaw*: „Az elemek kémiája” c. három kötetes mű Nemzeti Tankönyvkiadó által 1999-ben magyarul megjelentetett változata II. kötetének 601-602. és 636. oldalán található adatok alapján ellenőriztük és részben korrigáltuk. Ebben az „alapműben” a (3) egyenlet nem szerepel. Ennek ellenére ezt megőriztük, mivel egyedül ez magyarázza a nitrogén-dioxid képződését.]

Folytatva a fenti idézetet: „Az ammónium-nitrát tárolásával járó kockázatokat a következő folyamatok határozzák meg. ...Tűzben az ammónium-nitrát valamennyi típusa megolvadhat, és sárga vagy barna színű, mérgező füstök... felszabadulása mellett lebomolhat. ... Az ammónium-nitrát a normál kezeléssel járó súrlódás és behatások miatt nem robban, de hő hatására, zárt térben vagy pedig nagy erőhatásra robbanhat. A robbanásra való érzékenység számos tényezőtől függ, mint pl. a kémiai összetétel, illetve fizikai paraméterektől, mint pl. a sűrűség, a szemcseméret és a porozitás. A tűz és a robbanás kockázata nagymértékben emelkedik, ha az ammónium-nitrátot éghető vagy nem kompatibilis anyagokkal keverik, mint például fémporok, alkáli fémek, karbamid, króm- és rézsók, szerves és széntartalmú anyagok, kén, nitrátok, lúgok, savak, klorátok és redukálószer (adott anyag redukáló tulajdonságainak megállapításához az adatlapokból lehet tájékozódni).”

- Miért csökken az (1) reakció során a pH?
- Helyesen van-e rendezve a (2) reakció egyenlete? (Indoklás lehetőleg oxidációs számok alapján.) Mi a triviális neve és milyen élettani hatásai vannak a dinitrogén-monoxidnak? Felfedezője híres angol tudós volt, akinek korai halálát a dinitrogén-monoxid mértéktelen használatának tulajdonítják. Ki volt ő, milyen más felfedezések és mely találmány fűződik a nevéhez? Mire használják manapság a dinitrogén-monoxidot legálisan és mire illegálisan?
- Mi okozza a „sárga vagy barna színű, mérgező füstök”-et?
- Az idézet utolsó mondatából kiderül, hogy az ammónium-nitrát rendkívül sokféle anyaggal léphet reakcióba. Cinkporral is (NH_4Cl katalizátor jelenlétében) nagyon látványos fényjelenséggel járó, erősen exoterm reakcióban elemi nitrogén keletkezése közben reagál. Írd fel, és rendezd a reakció egyenletét! Oxidálószerként vagy redukálószerként viselkedik az ammónium-nitrát?

3. feladat:

A „mészammon salétrom” típusú műtrágyák egyik fajtája a „pétisó”, ami ammónium-nitrát mellett mészkövet is tartalmaz (ez utóbbit jó közelítéssel tekinthetjük kalcium-karbonátnak). A fertilia.hu weboldalon ez olvasható róla: „Előnye, hogy a hozzáadott kalcium-karbonát következtében csökken a robbanásveszély, a műtrágya higroszkóposága és a savanyító hatása is. Azonos arányban tartalmazza a lassabban ható ammónium-nitrogént és a gyors hatást biztosító nitrát-nitrogént, ezért alap- és fejtrágyaként minden talajtípusra és növényi kultúrára egyaránt alkalmazható.”

a) Milyen tömegarányban és anyagmennyiség-arányban tartalmazza a pétisó a két vegyületet, ha a nitrogéntartalma $w=25\%$?

b) Hogyan lehetne „megjósolni” a számolás elvégzése nélkül, hogy az előbbi feladatban a tömeg- vagy az anyagmennyiség-arány nagyobb-e az ammónium-nitrát javára?

c) Magyarországon 1931-ben hozták létre a Magyar Ammóniagyárat és a Műtrágyagyárat, amiket 1933-ban Péti Nitrogénművek néven egyesítettek. Ennek utódja, a péti Nitrogénművek Zrt. 2008-ban naponta 1400 tonna pétisót állított elő. Milyen tömegű NH_4NO_3 -ra és CaCO_3 -ra volt ehhez szükség?

d) Körülbelül milyen térfogatú (25°C , 10^5 Pa) nitrogént kell megkötni a levegőből az előbbi feladatban kiszámított mennyiségű ammónium-nitrát előállításához, ha az ipari folyamatok összesített hatásfoka 81% ?

e) Milyen térfogatú levegőben van ennyi nitrogén, ha a levegő nitrogéntartalma kb. $\varphi=78\%$?

f) A világ legnagyobb természetes eredetű kötött nitrogénforrása a Chile partjai mentén mintegy 350 km hosszan és 1,5-2,0 m vastagságban elterülő hatalmas guanó telep, ami sok millió év alatt alakult ki a tengeri madarak magas nitrogéntartalmú ürülékéből („chilei salétrom”, fő komponense a nátrium-nitrát). Ez a nitrogénforrás azonban a XX. sz. elején Németország számára teljesen elérhetetlenné vált, mert az oda vezető tengeri utat az angol hadiflotta elzárta a német hajók elől. Márpedig nitrogénforrásra nemcsak a mezőgazdaságnak volt ekkoriban nagy szüksége, hanem a színezék- és gyógyszeripar mellett a hadiiparnak is. Hiszen például a robbanószerként használatos TNT (trinitro-toluol, azaz „Trotyl”), valamint az ún. „nitro-glicerín” (valójában glicerín-trinitrát, az *Alfred Nobel* által kifejlesztett dinamit hatóanyaga) előállításához is salétromsavra volt szükség. Ezek nélkül pedig Németország nem tudott volna az ismert módon részt venni az I. Világháborúban. Bár a nitrogén a levegőben gyakorlatilag korlátlan mennyiségben áll rendelkezésre, kémiai reakciókkal vegyületekbe vinni nagyon nehéz. Mi ennek az oka?

g) A fentebb leírtak miatt óriási gazdasági, sőt politikai és történelmi jelentősége is volt annak, hogy a német *Fritz Haber* és *Carl Bosch* sokoldalú technológiai és fizikai-kémiai megfontolások alapján 1913-ban végül megoldotta az ammónia ipari szintézisét. A levegő cseppfolyósítása során nyert nitrogént és a (szén+vízgőz reakciójakor) vízgázból kapott hidrogént vas-oxid katalizátor segítségével reagáltatták. Azonban a hidrogén bedifundálása az acélba nagy nyomáson és magas hőmérsékleten az acél szilárdságát csökkentette, ezért a hideg szintézisgázt a reaktor fala mentén kellett bevezetni. Miért volt szükség nagy nyomás alkalmazására?

4. feladat:

A talaj kálium-utánpótlása sokkal korábban megoldódott, mint a nitrogénéhség. Hiszen például a nagy kőszótelepek fedősójaként bányászott kálium-klorid viszonylag könnyen elérhető és olcsó megoldást kínált.

a) A fenti szöveg alapján dönts el, és magyarázd meg, hogy a NaCl vagy a KCl vízdold-hatósága a nagyobb!

b) A „kálisó” előállításához használt (KCl-tartalmú) „szilvin” nevű ásvány az ott található nagy sóbányák miatt Erdélyről („Transsylvania”) kapta a nevét. A „szilvinit” viszont KCl-ot és NaCl-ot egyaránt tartalmaz. A káliumtartalmú műtrágyák hatóanyagtartalmát K_2O -ra átszámítva szokták megadni. (Hasonló okokból, mint amiért a foszfortartalmú műtrágyák foszfortartalmát P_2O_5 -re számítják át.). Milyen anyagmennyiség-arányok között fordulhat elő a KCl és a NaCl a szilvinitben, ha a K_2O -ra átszámított hatóanyagtartalma $w=12\%$ és $w=22\%$ között lehet?

Megoldások, eredmények – számítási feladatok

1. feladat megoldása:

- a) $2 \text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{F} + 10 \text{H}_2\text{SO}_4 = 6 \text{H}_3\text{PO}_4 + 10 \text{CaSO}_4 + 2 \text{HF}$
 b) $2 \text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{F} + 14 \text{H}_3\text{PO}_4 = 10 \text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2 + 2 \text{HF}$
 c) Azért, mert **olcsóbb** az előállítása.
 d) $M[\text{P}_2\text{O}_5]=142 \text{ g/mol}$ és $M[\text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2 \cdot \text{H}_2\text{O} + \text{CaSO}_4]=234+18+136=388 \text{ g/mol}$ lenne, ami 62 g elemi foszfort tartalmaz. Ez megfelel 142 g P_2O_5 -nak, ami a $w=36,6\%$. Ez jóval nagyobb lenne, mint 18%, tehát az **1:1:1 anyagmennyiség-aránynál jóval több gipsz és/vagy (kristály)víz van a superfoszfátban**.
 e) $M[\text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2 \cdot \text{H}_2\text{O}]=234+18=252 \text{ g/mol}$, ami 62 g elemi foszfort tartalmaz. Ez megfelel 142 g P_2O_5 -nak, ami a $w=56,3\%$. Ez nagyobb, mint $w=42-52\%$. A valódi műtrágya feltehetőleg más anyagokat (pl. több vizet) tartalmaz.

2. feladat megoldása:

- a) Az ammónia gázállapotban távozik, hátrahagyva a savas kémhatású salétromsavat. A sav jelenléte pedig alacsonyabb pH értékeket eredményez.
 b) Igen, helyes. A (-3) és a (+5) oxidációs számú nitrogének szinproporcionálódnak (+1) oxidációs számúakká. Kéjgáznak is hívják, és bódító hatása van. *Sir Humphry Davy* fedezte fel, mint ahogy több alkáli-, ill. alkáliföldfém, halogénelemet és a „Davy lámpát” is. Legálisan a habszifon patronokban használják, illegálisan kábítószerként.
 c) A NO_2 .
 d) $\text{Zn} + \text{NH}_4\text{NO}_3 = \text{N}_2 + \text{ZnO} + 2 \text{H}_2\text{O}$
 Az ammónium-nitrát oxidálószerként viselkedik.

3. feladat megoldása:

- a) A szükséges moláris tömegek: $M[\text{NH}_4\text{NO}_3]=80 \text{ g/mol}$; $M[\text{CaCO}_3]=100 \text{ g/mol}$;
 1 mol, azaz 80 g NH_4NO_3 -ban van 28 g nitrogén
x mol, azaz y g NH_4NO_3 -ban van 25 g nitrogén
 $x=25/28=0,893 \text{ mol}$ és $y=25 \cdot 80/28=71,4 \text{ g NH}_4\text{NO}_3$
 100 g pétisóban: $100-71,4=28,6 \text{ g CaCO}_3$, ami $28,6/100=0,286 \text{ mol}$.
 Tehát $m(\text{NH}_4\text{NO}_3):m(\text{CaCO}_3)=71,4:28,6 \approx \underline{\underline{2,5:1}}$ és
 $n(\text{NH}_4\text{NO}_3):n(\text{CaCO}_3)=0,893:0,286 \approx \underline{\underline{3,1:1}}$.
 b) Az anyagmennyiség-arányt úgy kaphatjuk a tömegarányból, hogy a megfelelő moláris tömegekkel osztunk. Mivel az ammónium-nitrát moláris tömege kisebb, mint a kalcium-karbonáté, így (mivel esetében kisebb az osztó), az anyagmennyiség-arány nagyobb az ammónium-nitrát javára, mint a tömegarány.
 c) Mivel 100 g pétisóhoz 71,4 g NH_4NO_3 kell, 1400 t pétisóhoz **999,6 t NH_4NO_3 -ra** van szükség.
 d) $\approx 1000 \text{ t NH}_4\text{NO}_3=10^9 \text{ g}:80 \text{ g/mol}=1,25 \cdot 10^7 \text{ mol NH}_4\text{NO}_3$, amihez ugyanennyi mól N_2 -gázra van szükség, mert:
- Ammónia szintézise: $\text{N}_2 + 3 \text{H}_2 \rightleftharpoons 2 \text{NH}_3$
 - Ammónia oxidációja: $4 \text{NH}_3 + 5 \text{O}_2 = 4 \text{NO} + 6 \text{H}_2\text{O}$
 - Nitrogén-monoxid oxidációja: $2 \text{NO} + \text{O}_2 = 2 \text{NO}_2$
 - Salétromsav gyártása: $4 \text{NO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O} + \text{O}_2 = 4 \text{HNO}_3$
 - Ammónium-nitrát gyártása: $\text{HNO}_3 + \text{NH}_3 = \text{NH}_4\text{NO}_3$
- 1 mol NH_4NO_3 -hoz kell 1 mol $\text{N}_2 \rightarrow 24,5 \text{ dm}^3=0,0245 \text{ m}^3$
 $1,25 \cdot 10^7 \text{ mol NH}_4\text{NO}_3 \rightarrow 3,06 \cdot 10^5 \text{ m}^3$
 Ha a hatásfok 81%, akkor ez $3,06 \cdot 10^5:0,81=3,78 \cdot 10^5 \text{ m}^3 \approx \underline{\underline{378000 \text{ m}^3 \text{ nitrogén}}}$ kell.

e) $3,78 \cdot 10^5 : 0,78 = 4,85 \cdot 10^5 \text{ m}^3 \approx \underline{485000 \text{ m}^3 \text{ levegőben}}$ van ennyi nitrogén.

f) A nitrogén erős, háromszoros kovalens kötése miatt inert gáz.

g) Az ammóniaszintézis egyensúlyra vezető folyamat, ami a keletkezés irányába anyagmennyiség-csökkenéssel jár, ezért a nyomás növelése az ammónia szintézise irányába tolja el az egyensúlyt.

3. feladat megoldása:

a) Ha a KCl van felül, akkor később vált ki, mint a NaCl, tehát a KCl oldhatósága a nagyobb.

b) $M[\text{KCl}] = 74,5 \text{ g/mol}$ $M[\text{NaCl}] = 58,5 \text{ g/mol}$ $M[\text{K}_2\text{O}] = 94 \text{ g/mol}$
 $w = 12\%$ esetén 100 g műtrágyában 12 g K_2O -nak megfelelő kálium van, ami $12/94 = 0,127$ mol. Ez kétszer ennyi mól káliumnak, ill. KCl-nak felel meg: $0,255 \text{ mol KCl}$, ami $0,255 \cdot 74,5 = 19,0 \text{ g}$. A maradék a NaCl: $100 - 19,0 = 81,0 \text{ g NaCl}$, ami $81,0/58,5 = 1,385 \text{ mol}$.

$n(\text{KCl}):n(\text{NaCl}) = 0,255:1,385 = 1:5,43$

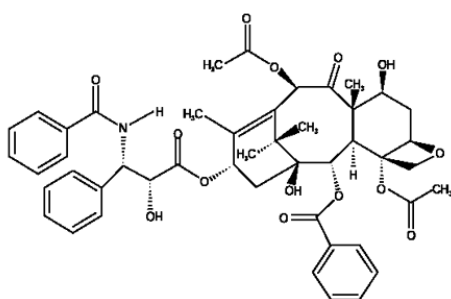
Hasonló megfontolások alapján a $w = 22\%$ **$n(\text{KCl}):n(\text{NaCl}) = 0,234:0,804 = 1:3,44$** aránynak felel meg.

Korunk sámánjai

Problémafelvetés:

Történetünk három főszereplője egy fiatal anya, egy százéves tiszafa és egy pettyes bagoly. Valahol Amerikában (pontosabban az Amerikai Egyesült Államokban) vagyunk, az 1980-as évek végén. Az anya és családja élete teljesen megváltozott, mióta néhány hónappal korábban mellrákot diagnosztizáltak nála. Két kicsi gyereke van, akik még nem is értik, mi a baj, csak érzik, hogy a felnőttek valamitől nagyon félnek. Az orvosok azt mondták, hogy egy *Taxol*® nevű sejtosztódás-gátló szerrel való kemoterápiás kezelés az ilyen betegek kb. 30%-át meggyógyítja. A család persze minden szalmaszálba megkapaszkodna, hogy megmentsék a fiatal nőt a szinte biztosnak tűnő haláltól. Azonban ez a gyógyszer borzasztóan drága, mert nagyon nehéz belőle elegendő mennyiséget megfelelő tisztaságban előállítani. A Taxol nevű vegyületet ugyanis ebben az időben csak az oregoni tiszafa (latin neve *Taxus brevifolia*) kérgéből tudták előállítani. Rengeteg fakéregből nagyon kevés anyagot, sok vegyszer fölhasználásával, hosszadalmas és bonyolult eljárások során. A százéves tiszafák azonban elpusztulnak, ha lehántják a kérgüket és ezzel a rajtuk fészkelő pettyes baglyok is elveszítik élőhelyüket. Mivel a csak az USA-ban előforduló rákos megbetegedések kezeléséhez mintegy 360 000 ilyen fát kellett volna évente elpusztítani, valószínűleg néhány év alatt kihalt volna mindkét faj. Ráadásul az utána megbetegedőknek már nem is lett volna honnan kinyerni a Taxolt. E bonyolult molekula tisztán kémiai úton való előállítása viszont rendkívül nehéz és gazdaságtalan. Vajon mit tettek ebben a helyzetben korunk gyógyítással foglalkozó „csodatévő” sámánjai, a természettudós gyógyszervegyészek, farmakológusok, biomérnökök és orvosok?

Ha többet akarunk megtudni a Taxol-ról és ezért beírjuk pl. a *Google* keresőjébe, akkor 0,05 másodperc alatt kb. 786 000 találatot jelez... Az angol nyelvű *Wikipedia* azonban egy korrektnek és szakszerűnek tűnő, viszonylag tömör összefoglalót közöl (<http://en.wikipedia.org/wiki/Paclitaxel>), amit elegendő néhány megbízhatónak tartott más forrásból ellenőrizni és kiegészíteni (pl. magyarul innen: <http://www.pharm.u-szeged.hu/phcog/Cikkek/CsF%202004.04.pdf> vagy angolul innen: <http://www.chemheritage.org/educationalservices/pharm/chemo/activity/debate.htm>). Az ezekben található információk lényege az, hogy Amerikában még a múlt század ötvenes éveiben indítottak útjára egy programot, amely során növényekben előforduló gyógyhatású vegyületeket kerestek. Sok ezer növényt átvizsgálva az egyik legígéretesebbnek tűnő anyag a Taxolnak (később Paclitaxelnek) elnevezett alkaloid (azaz természetes eredetű, erős élettani hatással rendelkező molekula) volt, aminek már 1964-ben kimutatták a citotoxikus (vagyis sejtpusztító, ld. <http://www.youtube.com/watch?v=-O0lsJywFFg>) hatását. 1971-re a tudósok felderítették és egy szakfolyóiratban közzétették a rendkívül bonyolult vegyület szerkezetét is (ld. az alábbi ábrán).



A Taxol itt feltüntetett képletét látva azt gondolhatnánk, hogy totálszintézise (vagyis teljes, azaz pl. kőolajszármazékokat kiindulási anyagként használó előállítás) szinte reménytelen. Ennek ellenére kb. 30 kutatócsoport versenyzett egymással a feladat megoldásán. A '90-es évekre mintegy hat különböző eljárást dolgoztak ki a nagytudású és óriási gyakorlattal rendelkező szerves kémikusok. Sajnos azonban a soklépéses totálszintézis összesített kitermelése minden esetben nagyon csekély volt.

Ezért ez az út a szükséges Taxol mennyiség előállítására járhatatlannak bizonyult, inkább a szerves preparatív kémiai alap kutatás számára szolgált érdekes eredményekkel. Egy francia kutatócsoport azonban más irányba indult el. Az Európában is honos közönséges tiszafa (*Taxus baccata*) lehullott tűleveleiből kinyerték a Taxolhoz hasonló 10-deacetylbaconin nevű anyagot, amiből már néhány további kémiai lépéssel (azaz ún. „félszintetikus” úton) sikerült előállítani a vágyva vágyott Taxolt. Az eljárást mások továbbfejlesztették, és 1992-re 80%-os kitermelést értek el, amivel a kemoterápiás szer már gazdaságosan gyártható volt. Ezzel sok fiatal rákos nőt lehetett megmenteni a haláltól. (Tegyük fel, hogy az első bekezdésben említett édesanya szervezete legyőzte a rákot a Taxol segítségével.) Manapság a Taxolt sejtkultúrákban állítják elő. A kifejezetten erre a célra kifejlesztett sejtvonalat vizes közegben, óriási fermentáló tartályokban tenyésztik. Ebből a léből nyerik aztán ki a Taxolt olyan módszerekkel, amikhez sokkal kevesebb veszélyes vegyszerre és energiára van szükség, mint a félszintetikus előállításához. A Taxol 2000-ben érte el az eladási csúcst, ami abban az évben 1,6 milliárd(!) dollár jövedelmet hozott a gyártóknak. Manapság generikus (azaz a szabadalmi oltalom által már nem védett) gyógyszernek számít, ezért az ára is csökkent.

Régen a mágusok, sámánok és javasasszonyok a természetben talált növényekben, állatokban, gombákban keresték az emberiséget győztető, megszámlálhatatlanul sokféle betegség orvosságait. Nem ismerték azonban az ezekben előforduló, elképzelhetetlenül sokféle szerves vegyület szerkezetét. Továbbá szinte semmit nem tudtak az emberi szervezet működéséről. Az általuk használt anyagok élettani hatása is csak az alkalmazás után derült ki. Gyakran a „próba-szerencse” elv alapján kezdtek el használni ezt-azt gyógyításra, az elmeállapot befolyásolására vagy éppen mérgezésre. Így aztán vagy elérték a kívánt hatást, vagy nem. Nagyszámú, szisztematikus (azaz rendszeres) vizsgálatra nemigen volt módjuk, csak alkalmi megfigyelésekre. Gyakran még abban sem lehettek teljesen biztosak, hogy az adott változást tényleg a kezelés okozta és nem valami más tényező. Ezért maguk is babonás hiedelmekre alapozott hittel, ráolvasással és varázslatokkal próbálták befolyásolni a „sorsot”. A nehezen megszerzett, és hosszútávon hasznosnak bizonyuló tapasztalatok átadása pedig szájról szájra, egyik generációról a másikra történt – és általában keveredve a nem a szigorú tényekre alapozott okkult „tudományokkal”. Ez utóbbiaknak valójában persze semmi közük sincs a természettudományokhoz, hiszen az okkultizmus állításait nem igazolják minden szempontból korrekt, kontrolvizsgálatokat is tartalmazó kutatások. Ezért aztán ezek a (nemegyszer „természetgyógyászatnak” álcázott) eljárások teljesen megbízhatatlanok, és csak a kiszolgáltatott, tudatlan emberek kétségbeesését kihasználva maradhatnak fenn. Korunkban az információátadás már fénysebességgel történik. Ez azonban a tudományos és technológiai fejlődés szempontjából nélkülözhetetlen tudás összegyűjtése és felhasználása mellett sajnos az emberi tudatlanságra épülő/építő tévedések és/vagy csalások nagyobb hatékonysággal való továbbadását is elősegíti.

A természettudományos szempontból korrekt kutatások során alkalmazott kontrolvizsgálat annak ellenőrzését jelenti, hogy az adott változást biztosan az alkalmazott anyag vagy eljárás okozta-e. Ezért például a gyógyszerre nyilvánításhoz arra is szükség van, hogy nagyszámú betegnek egyforma kinézetű, de hatóanyagot tartalmazó, ill. hatóanyag nélküli (ún. „placebo”) szert beadva, csak a vizsgált anyagot szedők gyógyuljanak meg nagy számban, a placebót kapók nem. A teljes megbízhatóság kedvéért a vizsgálatot szervezők úgy intézik, hogy még a betegek orvosai sem tudják, hogy ki kapott az adott szerből és ki csak a placebóból. Természetesen ilyenkor felvetődik az az etikai (erkölcsi) kérdés is, hogy mely betegek kapjanak esélyt a gyógyulásra. Ezért kiválasztásuk véletlenszerűen történik.

Manapság nemigen akad olyan létező, ill. elvileg létrehozható szerves vegyület, amit a vegyészek ne tudnának tisztán izolálni (azaz természetes forrásból kinyerni) vagy mesterséges úton előállítani. Korábban elképzelhetetlenül gyors és hatékony anyagvizsgáló módszerek állnak rendelkezésre a keverékek összetételének, valamint a molekulák szerkezetének meghatározásához is. Sőt, a biokémia, ill. molekuláris biológia fejlődésével óriási tudás gyűlt össze azzal kapcsolatban, hogy mi történik az egyes



szerves anyagokkal az élő szervezetben, mi a szerek hatásmechanizmusa és milyen összefüggésben van ez az adott vegyület szerkezetével. Számítógépekkel lehet az egyes betegségek gyógyítására alkalmasnak gondolt összetételű és térszerkezetű szerves molekulákat tervezni, amelyeket aztán a laboratóriumokban elkészítenek, és hihetetlenül sokféleképpen tesztelnek, hogy elég hatásosak-e és nem mérgezők-e (*in vitro*, azaz az élő szervezetten kívül, tehát pl. Petri csészében sejt kultúrákon, ill. *in vivo*, vagyis élő szervezetben, azaz különféle állatokon, majd egészséges és végül az adott betegségben szenvedő embereken). Az emberi géntérkép ismerete pedig elvből lehetőséget teremt akár az egyedi génhibák kijavítására is. Íme, hogyan fejlődött a gyógyszerkutatás az elmúlt több mint száz évben, ahogy az az Innovatív Gyógyszergyártók Egyesületének honlapján olvasható.

(<http://www.igy.hu/index.php3?sid=11888856241043147247&tract=3&mod=haszn&oneid=21>)

Mindez jelentősen visszaszorította a gyógyszervegyészek (régi korok sámánjaival közös) hagyományos életérzését, miszerint „egy sötét szobában kergetünk egy fekete macskát”. Az élő szervezet azonban továbbra is elképzelhetetlenül bonyolult és ráadásul minden ember testének felépítése bizonyos fokig különböző. Ezért a gyógyszerekre adott reakcióink is eltérőek lehetnek. Tehát az új gyógyszerek kifejlesztése továbbra is óriási kihívást jelent még a jól képzett vegyészek számára is. A fentiekben leírtak miatt a gyógyszerkutatás rendkívül töke-, tudás- és időigényes terület. Egy originális (vagy más néven innovatív) gyógyszer kifejlesztése átlagosan 12-14 évig tart és mintegy 0,5-1 milliárd dollárba, azaz 100-200 milliárd(!) forintba kerül (ld. http://egeszseg.origo.hu/cikk/0736/231235/20070903_originalis_generikus_gyogyszer_gen_rikus_szer_gyogyszerengedelyezes_generikum_hatoanyag_1.htm). A teljes folyamatot vázlatosan a mellékelt ábra mutatja.



Vagyis az a probléma, hogy nagyon hosszú idő alatt, nagyon sok pénzt befektetve is csak nagyon kicsi eséllyel lehet egy teljesen új gyógyszert kifejleszteni. Óriási a sikertelenség okozta pénzügyi csőd kockázata. Ezért aztán az ebbe investáló (befektető) tőkeerős gyógyszergyártók számára muszáj garantálni egy többéves időszakot, amíg a szabadalmaztatott vegyületet csak ők gyárthatják vagy gyártathatják és az

árúsítására monopóliumuk van. Ez alatt az idő alatt a sikeres molekulák kifejlesztői olyan drágán adhatják az adott szert, amennyiért csak hajlandók a beteg emberek vagy a betegbiztosítók megvenni. Ez kegyetlenül hangzik pl. egy halállal fenyegetett rákos ember esetében. Azonban ha nem hagyná az állam, hogy ezek a cégek néhány éven át ún. „extra-profit”-hoz jussanak, akkor senki nem merne ilyen nagy összegű befektetést igénylő, hosszadalmas és kockázatos vállalkozásba kezdeni, mint egy adott betegség gyógyítására szolgáló új gyógyszer kifejlesztése. Gyógyítandó betegség pedig még nagyon-nagyon sok van...

Feladatok:

1. lépés: Válassz ki az otthon található gyógyszerek közül egyet, és próbáld megtudni a történetét, hogy hogyan lett az adott vegyületből gyógyításra használt anyag! **Gyűjtsd össze** a gyógyszer dobozán, az interneten, ill. a gyógyszertertárban róla beszerezhető információkat! Olyan gyógyszert válassz, amelyikről könnyen és sok mindent megtudhatsz! Lehetőleg csak egyféle vegyületet tartalmazó hatóanyaga legyen, aminek a neve és képlete is megismerhető! **Derítsd ki** a legfontosabb jellemzőit:

- Milyen kémiai összetevőket tartalmaz és mi ezeknek a képlete?
- Melyik a kémiai összetevők közül a valódi hatóanyag és mi a többi komponens szerepe?
- Milyen formákban és kiszerelésekben kapható ez a gyógyszer és azok mennyibe kerülnek?
- Milyen betegségek esetén, mikor és hogyan lehet ezeket alkalmazni?
- Milyen mellékhatások fordulhatnak elő a használatkor és mi abban az esetben a teendő?
- Létezik-e Magyarországon egyéb, az általad választottal azonos hatóanyagot tartalmazó, de más néven forgalmazott gyógyszer? Ha igen, akkor az mennyibe kerül és van-e előnye, ill. hátránya az alkalmazásának az általad vizsgált szerrel szemben?

2. lépés: **Gondold végig**, milyen általad korábban tanult vagy különböző forrásokból kideríthető kémiai és biológiai ismeretek vonatkoznak erre a témára! Elméleti és gyakorlati ismereteid alapján csoportosítsd az adott gyógyszerről beszerezett információkat egy **összefoglalóban**! Ennek megszerkesztésekor használd a fentiekben (ld. 1. lépés) készített jegy-

zeteidet!

3. lépés: Az összegyűjtött információk alapján **készítsd el** az adott gyógyszer **történetéről** szóló, rövid (kb. 5-6 perces) **kiselőadás** vázlatát! Természetes vagy mesterséges eredetű? Ki, mikor és hogyan fedezte fel, hogy gyógyító hatása van? Mennyi idő alatt és hogyan került a gyógyszerárak polcaira?

4. lépés: Érdeklődd meg egy **gyógyszerszármazékban**, hogy **milyen készítésben milyen nevű** **láz- és fájdalomcsillapítók kaphatók ott, és azt is, hogy mennyi az áruk!** A gyógyszerész és/vagy internetes keresés segítségével határozd meg, hogy milyen hatóanyag(ka)t tartalmaznak ezek a szerek, valamint azt is, hogy miből mennyi található bennük adagként! Foglald össze mindezen információkat egy könnyen áttekinthető **táblázatban**, amely a gyógyszerek árát is tartalmazza! Gondold végig, hogy van-e olyan gyógyszer, amelyet ez alapján nem nagyon érdemes megvásárolni, mert más, hasonló hatóanyag-tartalmú szerek ára (esetleg külön-külön megvásárolva) alacsonyabb!

5. lépés: Oldd meg az alábbi, gyógyszerekkel kapcsolatos szerves kémiai **feladatokat!**

A gyógyszerekhez kapcsolódó szerves kémiai gyakorló feladatok

1. feladat:

A Taxol ill. Paclitaxel néven forgalmazott kemoterápiás (rákellenes) szer valódi kémiai neve a következő: (1S,2S,3R,4S,7R,9S,10S,12R,15S)-4,12-diacetoxi-15-{{(2R,3S)-3-(benzoilamino)-2-hidroxi-3- fenilpropanoil}oxi}-1,9- dihidroxil-10,14,17,17-tetrametil -11-oxo-6-oxatetraciklo [11.3.1.0~3,10~.0~4,7~] heptadec-13-en-2-il rel-benzoát. (Így könnyen érthető, hogy a szabályos név használata helyett miért emlegetjük egyszerűen „Taxol”-nak.) A szerves kémiában néhány elemből (ami leggyakrabban csak szén, hidrogén, oxigén és nitrogén, mint a Taxol esetében is) gyakorlatilag végtelen számú vegyület épülhet föl. Nagyon fontos, hogy a nevük alapján ez a megszámlálhatatlanul sok szerves anyag mind-mind egyértelműen azonosítható legyen. Hiszen különben összetéveszthetők lennének, és ugye nem szeretnénk mondjuk egy köhögéscsillapító helyett rovarirtó szert bevenni?! Ezért a szerves kémiai nevezéktannak („nómenklatúra”) szigorú és következetes szabályai vannak, amelyek alapjai minden szerves kémia tankönyv elején megtalálhatók. Ezek alkalmazásával dönts el, hogy helyesek-e a következő vegyületek! Amelyik esetben hibásnak találsz az elnevezést, add meg a vegyület helyes nevét is!

- a) 4-etil-2,2,5-trimetil-hexán
- b) 2,5,5-trimetil-3-etil-hexán
- c) 2,2-dimetil-4-etil-5-butil-hexán
- d) 1-hidroxi-butánsav
- e) 3-klór-pent-2-én
- f) 1,3,4,6-triklór-benzol

2. feladat:

Az *Aspirin* (szabályos nevén acetil-szalicilsav) manapság is gyakran használt láz- és fájdalomcsillapító gyógyszer, de története több ezer éves. *Hippokratész* (a mai orvosi eskü névadója) már az időszámításunk előtti IV. században használta gyógyításra a szalicilsavat tartalmazó, porrá őrölt fűzfakérget. A szalicilsav név ezért a fűzfa latin nevéből, a *Salix*-ből származik. *Johann Buchner*, müncheni gyógyszerészprofesszor 1828-ban egy sárga színű

kristályos anyagot izolált a fűzfa kérgéből, amit szalicinnek nevezett el. 1830-ban *Henri Leroux* francia gyógyszerész ehhez az anyaghoz jobb kitermeléssel jutott a réti legyezőfű (*Filipendula ulmaria*, *Rosaceae*) nevű vadvirágból, melyet akkor még *Spirea ulmaria*-nak neveztek. Innen ered a szalicilsav régi neve: „*acidum spiricum*”, amiből az „Aspirin” szó is származik. 1853-ban *Charles Frederic Gerhardt* acetyl-klorid segítségével szintetizálta az acetyl-szalicilsavat, de gyógyszerként ekkor még nem vezették be. 1874-ben a lipcsei *Hermann Kolbe* kidolgozta a szalicilsav nátrium-fenolátból és szén-dioxidból való gazdaságos ipari szintézisének módszerét. 1875-től gyulladáscsökkentő hatása miatt reumás betegeket kezeltek vele, ill. sóival, a szalicilátokkal. *Felix Hoffmann*, aki 1894-től a Bayer cég laboratóriumában dolgozott, állítólag azért kezdett el foglalkozni a szalicilátokkal, mert édesapja reumáját nátrium-szaliciláttal kezelték az orvosok, de sok kellemetlenséget okozott neki annak a gyomor nyálkahártyáját izgató hatása. Ezért (most már ecetsav-anhidridet alkalmazva) újra előállította az acetyl-szalicilsavat, majd meggyőzte Bayert arról, hogy érdemes ezt az anyagot forgalomba hozni. Az Aspirint először porként árusították, de manapság már főként tablettákban vagy pezsgőtablettákban kapható. Magyarországon az acetyl-szalicilsav kalciumsója (a „Kalmopyrin”) is elterjedt, ami magyar találmány volt.

- Írd fel a szalicilsav Kolbe-féle előállításának egyenletét, amire a fenti szövegben találsz utalást! Milyen funkciós csoport épül így ki a molekulában?
- Mire használják a szalicilsavat, ill. a nátrium-szalicilátot a háztartásban?
- Írd fel és hasonlítsd össze az acetyl-szalicilsav acetyl-kloriddal, ill. ecetsav-anhidriddel való előállításának egyenleteit! Mi ezekben a folyamatokban az azonos és miben különböznek a melléktermékek?
- Hány mól acetyl-szalicilsavat tartalmaz egy 500 mg-os Aspirin tabletta? Hány mg Kalmopyrint kell tartalmaznia egy tablettának ahhoz, hogy ugyanennyi mól acetyl-szalicilsav savmaradék-iont vegyünk vele magunkhoz?
- Az Aspirin tabletták az acetyl-szalicilsav tartalmát úgy lehet a legpontosabban meghatározni, hogy az összetört tablettához főlésslegben adnak ismert mennyiségű nátrium-hidroxidot, és a hidrolízis lejátszódása után a maradék lúgot ismert koncentrációjú sósav mérőoldattal semlegesítik (egy fenolvörös nevű indikátorral jelezve a pH változását, ami savas közegben sárga, lúgos közegben piros). A lúgfőléssleg semlegesítéshez szükséges HCl-mérőoldat térfogatából a tabletta Aspirin-tartalma kiszámítható. (A kvantitatív analízis, azaz mennyiségi elemzés e fajtáját a kémikusok „visszatitrálásnak” nevezik.) Tegyük fel, hogy a dörzsmozsárban elporított Aspirin tabletta tömege 0,6986 g volt, amihez 25,0 cm³ 0,5023 mol/dm³ koncentrációjú nátrium-hidroxid-oldatot adtunk. A reakció lejátszódása után az oldatot ioncserélt vízzel többször átöblítve átmostuk (azaz „kvantitatíve átvittük”) egy 250 cm³ térfogatú mérőlombikba, majd azt ioncserélt vízzel „jelre töltöttük” és jól összeráztuk („homogenizáltuk”). Ebből az ún. „törzsoldatból” 50 cm³-es térfogatokat kipipettázva a három párhuzamos meghatározáskor („titráláskor”) 0,1047 mol/dm³ koncentrációjú HCl mérőoldatból rendre a következő térfogatok fogytak $V_1(\text{HCl}) = 13,35 \text{ cm}^3$; $V_2(\text{HCl}) = 13,45 \text{ cm}^3$; $V_3(\text{HCl}) = 13,40 \text{ cm}^3$. Hány tömegszázalék az Asprin tabletta acetyl-szalicilsav tartalma?

3. feladat:

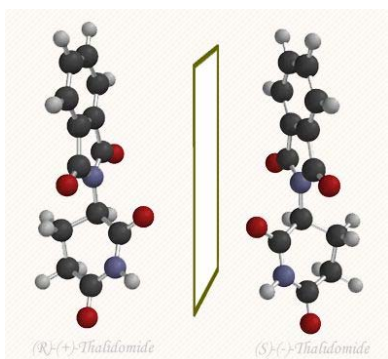
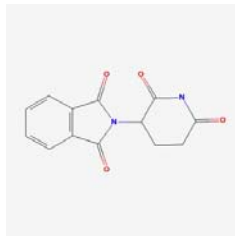
A paracetamol nevű szerves vegyületet többféle láz- és fájdalomcsillapító készítmény is tartalmazza hatóanyagként. Elemanalízise során a következő tömegszázalékos összetételt mutatja: 63,56 % szén, 6,00% hidrogén, 21,17% oxigén és a maradék a nitrogéntartalom.

- Mi a paracetamol tapasztalati képlete?
- A moláris tömeg meghatározásakor kiderült, hogy a paracetamol összegképlete azonos a tapasztalati képletével. Más vizsgálatokból (szerves kvalitatív analízis, azaz minőségi elemzés, amelynek során az adott vegyület funkciócsoportjai azonosíthatók) tudható, hogy a paracetamol egy fenolszármazék, ami amidcsoportot is tartalmaz. Ezt figyelembe véve írd fel az előbbieken kiszámolt képletnek megfelelő összes lehetséges szerkezeti képletet! Nevezd is el ezeket a vegyületeket!
- A paracetamol hatóanyagtartalmát az Európai Gyógyszerkönyv (*European Pharmacopoeia*) szerint ammónium-cérium(IV)-szulfát segítségével kell megmérni. E redoxireakció során 1 mol paracetammal 2 mol ammónium-cérium(IV)-szulfát reagál, miközben Ce^{3+} -ionok keletkeznek. Az Európai Gyógyszerkönyv szerint 1 cm^3 0,1 mol/dm³ koncentrációjú ammónium-cérium(IV)-szulfát mérőoldat 7,56 mg paracetammal ekvivalens (vagyis ennyit mér). Számítással igazold ennek az állításnak a helyességét, ha ismert, hogy 1 mol ammónium-cérium(IV)-szulfát 1 mol Ce(IV)-et tartalmaz! Oxidáló- vagy redukálószerként viselkedik az ammónium-cérium(IV)-szulfát ebben a reakcióban?

$A_r(\text{C})=12,01$; $A_r(\text{H})=1,01$; $A_r(\text{O})=16,00$; $A_r(\text{N})=14,01$; $A_r(\text{Ce})=140,12$

4.feladat:

A gyógyszergyártásban minden idők legnagyobb megrázkódtatását az ún. *Contergan* katasztrófa okozta (ld. még magyarul pl.: <http://www.sulinet.hu/tart/fcikk/Kidc/0/12175/1> és http://h2so4.blog.hu/2008/09/19/a_contergan_bebik_tukre valamint angolul pl.: <http://www.chm.bris.ac.uk/motm/thalidomide/start.html>). Az 1950-es évek végén egy német cég enyhe nyugtatót kezdett forgalmazni, aminek a hatóanyaga a *talidomid* nevű molekula volt (a szerkezeti képletét ld. a mellékelt ábrán!). Sok várandós kismama is szedte addig, amíg ki



nem derült, hogy ez a szer okozta a rettenetes születési rendellenességek (végtaghiány, ill. érzékszervi hiányosságok) számának hirtelen megnövekedését. Mire a szert visszavonták, már több mint tízezer ún. „Contergan bébi” született. A talidomid molekulának ugyanis két változata is van. Az egyik valóban nyugtató hatású, de a másiktól kiderült, hogy teratogén (vagyis a terhesség alatt szedve születési rendellenességeket okoz).

Ez, a mellékelt ábrán látható szerkezetű kétféle talidomid változat (ún. sztereoizomer, vagy más néven térazomer) nagyon nehezen különíthető el (mivel a kémiai reakciók többségében teljesen azonos

módon viselkednek), így a Contergan mindkettőt tartalmazta. Manapság viszont ha egy gyógyszernek több ilyen sztereoizomerje is van, akkor azokat hosszadalmas, fáradságos és költséges eljárásokkal szét kell egymástól választani és külön-külön kell vizsgálni a hatásukat és toxicitásukat. (Ez is növelheti egy vegyület gyógyszerre fejlesztésének

költségeit és időtartamát.) Azonban (mint kiderült), a Contergan esetében még ez az intézkedés sem küszöbölte volna ki a teratogén hatást, mivel a szervezetbe kerülve a talidomid egyik változata át tud alakulni a másikká. Ez azonban nem jelenti azt, hogy más anyagok esetében ez az előírás nem hasznos.

- a) Pontosan milyen izomériának nevezik a talidomid esetében előforduló jelenséget és mi okozza ezt?
- b) Melyik szénatom felelős a talidomid fentebb bemutatott kétféle változatának kialakulásáért?
- c) Hogyan nevezzük a kétféle izomert 1:1 arányban tartalmazó elegyet?
- d) Szerinted hogyan lehetséges, hogy a teljesen azonos számú és minőségű atomot, azonos funkciós csoportokba szerveződve tartalmazó kétféle változatnak ennyire különböző a biológiai hatása?
- e) A bevezető történetünkben említett taxol nevű molekulában 11 darab olyan széna-
tom is van, ami hasonló sztereoizomériát okoz. Számold ki, hány ilyen izomerje ke-
letkezhet ennek a vegyületnek a totálszintézis során! (Ezek közül persze csak
egyetlen egy a megcélzott hatásos anyag, tehát elképzelhető, milyen ember feletti
erőfeszítést jelent ennek az egynek a tisztán való előállítás!)

„...mert ez műanyag!”

Problémafelvetés:

Egy fiatal nő holttestéhez hívták ki a Cincinnati-i Rendőrséget 2009. december 6-án, vasárnap délután 3 óra 45 perckor (<http://www.wxix.com/Global/story.asp?S=11631029>). A 22 éves áldozatra egy autó első ülésén találtak rá egy parkolóban. A gyanú szerint a 28 éves *Leetae Williams* lőtte le, akinek a letartóztatására ezután kommandósokat küldtek ki. Williams azonban figyelmeztetés nélkül lőni kezdett az őt megadadásra felszólító speciális alakulatra. Kétszer fejen találta a *Daniel Kowalski* nevű tisztet, majd egy fejlövessel végzett magával. A kommandóست az Egyetemi Kórházba szállították és ellátták, de néhány óra múlva már ki is engedték. *Tom Streicher* rendőrfőnök szerint Kowalski életét minden bizonnyal a sisakja mentette meg (ld. a mellékelt ábrán).



2010. május 25-én, pénteken viszont arról adott hírt a Magyar Távirati Iroda (MTI), hogy már legalább 60 halálos áldozatot követeltek a jamaicai fővárosban a biztonsági erők és egy drogbárót védelmező fegyveres gengszterek közötti összecsapások (http://travelline.hu/hirek-friss/20100526_jamaica_haboru_aldozatok.aspx). „A halottak többsége állítólag civil. ...*Bruce Golding* jamaicai miniszterelnök mély sajnálatát fejezte ki a parlamentben a halálesetek miatt, és azt ígérte, hogy a biztonsági erők véget vetnek az anarchiának, és helyreállítják a rendet. A fegyveresek azt akarják megakadályozni, hogy a hatóságok kiadják az Egyesült Államoknak *Christopher »Dudus« Coke*-ot, a hírhedt drogbárót. Több mint ezer rendőr és katona ostromolta meg *Coke* főhadiszállását, de a bűnözőt mindeddig nem tudták elfogni. *Christopher »Dudus« Coke* ellen New Yorkban kábítószer- és fegyverkereskedelem miatt emeltek vádat. Kingston több negyedében vasárnap rendkívüli állapotot vezettek be, miután a drogbáró emberei több rendőrsőt is tűz alá vettek, mert tudomásukra jutott, hogy a kormányfő beleegyezett a kiadatásba. A támadók autókát raboltak el, és lakásokat fosztottak ki. A fegyveresek barikádokat emeltek, a magasabb épületekről pedig orvlövészek vették tűz alá a golyóálló mellényt és rohamsisakot viselő kormánycsapatokat.” – szólnak a hírek, amiket olvasva feltételezhető, hogy drogbáró emberei is hasonló védőfelszerelést viseltek a lövöldözés során, s ezért volt az áldozatok többsége civil.

De hát milyen anyagból készülhet az a sisak és mellény, amivel túl lehet élni azt is, ha éles lőszerrel többször fejbe vagy mellkason lövik az embert?! Nem a természet hozta létre, hanem vegyészek alkották azokat a polimereket, amelyekből az ilyen műanyagok születnek. Legismertebb képviselőjük minden bizonnyal a *Kevlar®* (magyarosan kiejtve: „kevlár”). Sok más műanyaggal együtt ez is az emberiség speciális szükségleteinek kielégítésére szolgál. A kevlárból készült védőruházat könnyebb és vékonyabb, mint a hagyományos anyagból gyártott. Jól állja az extrém hideget és tűzoltáskor, vagy sűrlődás közben felmelegedve (pl. fűkék anyagaként) a hőt is. Tehát nemcsak az emberi agresszióvitás következményeinek elhárítására készülnek belőle használati tárgyak, hanem nagy mechanikai igénybevételnek kitett sporteszközök, hangszerek, hihetetlenül erős horgonykötelek, csövek és sok minden más, amit szinte lehetetlen felsorolni. A legmodernebbeknek számító „kompozit anyagok” részeként (gyakran üvegszállal, ill. szénzállal kombinálva) elképesztő terhelést bírják versenyautók, helikopter rotorok, teniszlabdák stb. gyártására is használják. S ez csak egyfajta műanyag a sokféle közül...

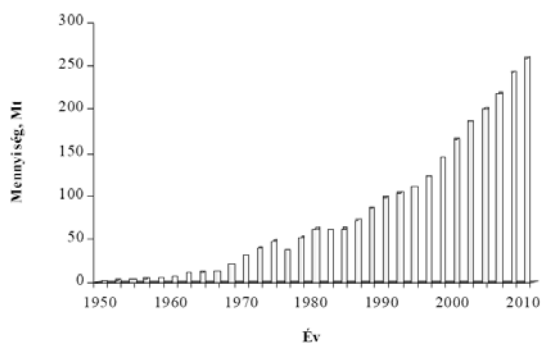
A kémikusok által kikísérletezett és a vegyipar egyik ága által előállított műanyagok kétségtelenül megváltoztatták (sőt, jelenleg is folyamatosan változtatják!) az életünket. Olcsó és tartós tömegáruk készülnek a felhasználásukkal, amiket még a Föld legs-

zegényebb országokban is sokan meg tudnak vásárolni. Ha körülnézünk, el se tudjuk képzelni, mi lenne velünk a polimerekből készült edények, bútorok, játékok és sporteszközök, műszalakkal kombinált szövetek és a millió egyéb műanyag, vagy műanyagot is tartalmazó használati tárgy nélkül. „...mert ez műanyag!” - szolt a különféle hasznos tulajdonságaikat bemutató reklám dalocska refrénje. Kitűnő elektromos és hőszigetelők, így a mechanikai hatások mellett védenek az áramütés, a hideg és a meleg ellen is. Nem korrodálódnak, mint a fémek, és nem is rothadnak meg, mint a fa. Alkalmazásuk higiénikus, hiszen csak kivesszük őket a zacskóból vagy a dobozból (vagy éppen ők szolgálnak csomagolóeszközként, pl. italos palackok formájában), s ha már nem kellene, egyszerűen a szemébe dobjuk őket, hiszen általában nagyon olcsók...

Sajnos azonban hosszú távon éppen a műanyagok legelőnyösebb tulajdonságai fordulnak az emberiség ellen. A műanyag hulladékok jó része ugyanis általában nem (ill. csak igen hosszú idő, a becslések szerint több száz vagy ezer év alatt)

bomlik le a természetben. (A biológiailag lebontható, ún. „biodegradábilis” műanyagok viszont esetleg már használat közben el kezdenek lebomlani...) Újrahasznosításukhoz megfelelő gyűjtésre és válogatásra van szükség, aminek a megoldása rendkívüli problémát jelent. Pedig mára már a napnál is világosabb, hogy a műanyag hulladékok felhalmozása a hagyományos módon nem mehet tovább.

A világon évente mintegy 250 millió tonna műanyagot állítanak elő (ld. a fenti ábrát, amely a világ éves műanyagtermelésének növekedését ábrázolja évről-évre, millió tonna egységekben). Ez a jelenleg évente gyártott mennyiség kb. a Balaton víztömegének 1/10-e. Mi legyen az így keletkező szeméthegek sorsa? És mi lesz, ha elfogynak, vagy nagyon lecsökkennek (és ezért elképzelhetetlenül drágák lesznek) a Föld kőolajkészletei, amelyeket a műanyagok előállítására (is) használnak?! Ezekre a kérdésekre természetesen a társadalom a jelen és a jövő kémikusaitól várja a választ. Ők pedig gőzerővel dolgoznak az újabb és újabb anyagok, módszerek és technológiák kifejlesztésén. Például ún. pirolízises kísérleteket folytatnak, vagyis magas hőmérsékleten, levegő kizárásával melegítik a műanyag hulladékokat, hogy visszanyerjék belőlük az alapanyagként újra hasznosítható kismolekulákat.



Feladatok:

1. lépés: Keress otthon vagy egy üzletben olyan **műanyagból készült tárgyakat**, amiknek a címkéjén fel van tüntetve, hogy miből készültek! Minden esetben **jegyezd fel** az adott **polimer** (vagyis a műanyag alkotórészeként szolgáló óriásmolekula) **nevét** és azt, hogy milyen tárgyat állítottak elő belőle! **Gyűjts össze** az interneten, nyomtatásban, ill. a tankönyveidben fellelhető információkat ezekről a polimerekről! **Derítsd ki legalább öt** így megismert polimer legfontosabb jellemzőit:

- Milyen monomerekből (azaz kismolekulákból) épül fel?
- Milyen kémiai reakció írja le a polimer kialakulását?
- Milyen tulajdonságai lehetnek a belőlük előállított műanyagoknak?
- Milyen célokra használható tárgyakat készítenek belőlük? (Néhány példa elegendő!)
- Milyen kockázatokkal, ill. nehézségekkel jár a belőlük keletkező hulladék kezelése?
- Milyen szempontok alapján tudnád az így megismert műanyagokat csoportosítani?

2. lépés: Gondold végig, milyen általad korábban tanult vagy különböző forrásokból kideríthető kémiai és fizikai ismeretek vonatkoznak erre a témára! Elméleti és gyakorlati tudásod alapján csoportosítsd a műanyagokat egy **táblázatban**! A táblázat megszerkesztésekor használd a fentiekben (ld. 1. lépés) készített jegyzeteidet és/vagy egyéb, általad fontosnak tartott szempontokat!

3. lépés: Nézz körül a környezetben, hogy milyen lehetőségeket találsz a műanyag hulladékok szelektív gyűjtésére! **Járj utána**, hogy mi lesz az így összegyűjtött hulladékok sorsa! Derítsd ki és jegyezd fel, hogy pontosan hol (melyik hulladékfeldolgozóban, -égetőben, -lerakóban stb.) mi történik a hulladékkal! Csoportosítsd az így megszerzett információkat egy általad logikusnak tartott módon! **Írj erről egy tömör**, de informatív összefoglaló **jelentést** a diáktársaid számára!



4. lépés: Próbáld meg elképzelni, hogy hogyan fognak élni az emberek akkor, amikor a kőolajkészletek annyira megfogyatkoznak és a technológia annyira fejlett lesz, hogy a műanyag hulladékok feldolgozásával olcsóbb lesz az újabb műanyagokhoz alapanyagot gyártani, mint a föld- vagy a tengerek mélyéről felhozott kőolajból! Milyen módjait tudod elképzelni az újrafelhasználásnak, valamint a mechanikai (fizikai) és kémiai újrahasznosításnak? Ne felejtsd el, hogy ez már a Te életedben (de legkésőbb az unokáid életében) bekövetkezhet! **Írj erről egy sci-fi (science fiction) novellát**!

5. lépés: Olvasd el és **oldd meg** a műanyagokhoz kapcsolódó alábbi **feladatokat**!

A műanyagokkal kapcsolatos gyakorló feladatok

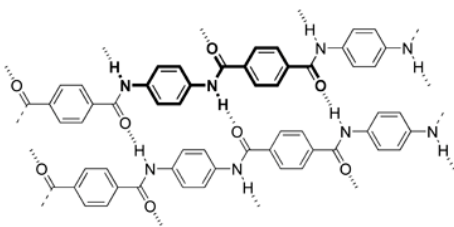
1.feladat:

A kevlár márkanévű műanyagot 1965-ben a *DuPont* cégnél fejlesztették ki (<http://en.wikipedia.org/wiki/Kevlar>). Először az 1970-es években használták (mivel hihetetlenül erős, acélt helyettesítettek vele a versenygumikban). Leggyakrabban azonban fonalakká vagy kötelekké fonva, ill. szövetté szöve alkalmazták. Arról híres ugyanis, hogy ötször nagyobb a szakítószilárdsága, mint az azonos tömegű acélnek. Ugyanakkor (az acéltól eltérően) például horgonykötélként alkalmazva a sós tengervízben sem rozsdásodik. A természetes eredetű anyagok közül szerkezeti szempontból a selyemhez hasonlít, ami szintén arról híres, hogy nagyon erős. (Emlékeztet, hogy a török szultánok régen selyemzsínort küldtek a kegyvesztett basáknak. Ez nem csak képletesen jelentette azt, hogy jobban teszi az illető, ha saját magát akasztja fel, mintha bevárja a szultán katonáinak érkezését, hanem az erős selyemzsínór ténylegesen is képes lehetett megtartani a – rendszerint túlsúlyos – főurat.)

A régi korok hölgyeinek viszont csak valódi hernyóselyemből készíthettek sikkes harisnyákat. Ez azonban a nők többsége számára teljességgel megfizethetetlen volt. Ezért lett kirobbanó sikere a szintén a *DuPont* cég 27 millió dolláros befektetésével 1932-1935 között kifejlesztett műanyagnak, a nagyon erős *Nylon*-nak (magyarosan ejtve: nejlonnak), amiből 1938-1940 között megszülethetett a nejlonharisnya. Az 1950-es években gyorsan elterjedt a nejlonból készült ruházat használata, hiszen nagyon mutatós, színes textíliákat lehetett belőle készíteni, amelyeket könnyű volt mosni, gyorsan száradtak és nem igényeltek vasalást. Sajnos azonban hamar kiderült, hogy a tisztán nejlonszálból készült szövetek rosszul szellőznek, ezért alsónemüként használva gyakran okoztak gombás megbetegedéseket. Emiatt manapság már leggyakrabban kevert szálak (azaz műanyagot és természetes eredetű anyagot, pl. pamutot is tartalmazó) textíliákat használunk, amelyek maximalizálják ezek előnyeit és (lehetőség szerint) csökkentik a hátrányaikat.

A kevlár szerkezetét vázlatosan az itt mellékelt ábra mutatja.

- Milyen funkciós csoportokat tartalmaz ez a polimer?
- Kémiai szempontból mi a közös a kevlár, a természetes hernyóselyem és a nejlon szerkezetében? Milyen intermolekuláris kötések találhatók mindhárom fent említett anyagban? Miben különböznek akkor mégis egymástól? Tehát mi okozhatja azt, hogy a kevlár még a selyemnél és a nejlonnál is erősebb?
- A kevlár fent ábrázolt polimerjét 1,4-fenilén-diaminból és tereftalokloridból szintetizálják. Írd fel ezeknek a vegyületeknek a képletét és a polikondenzációs reakciónak az egyenletét! Mi a reakció mellékterméke?
- A nejlon 6,6 nevű műanyagot hexametilén-diamin és adipoklorid (az 1,6-hexándisav savkloridja) felhasználásával gyártják (a kevlár előállításához kémiaiilag nagyon hasonló reakcióban). Írd fel ezeknek a kiindulási anyagoknak is a képletét és a reakció egyenletét!
- A „nejlon 6” típusú műanyag kiindulási anyaga viszont az ún. ϵ -kaprolaktám. Mi ennek az összeg-, ill. a szerkezeti képlete, ha tudjuk, hogy egy 7 tagú gyűrűben amidcsoportot tartalmazó vegyületről van szó, és



63,72% szenet, 9,73% hidrogént és 12,39% nitrogént tartalmaz? Fel tudnád írni, hogy hogyan képződhet ez egy nyíltláncú, két funkciós csoportot tartalmazó vegyületből? Milyen lehet a belőle előállított polimer szerkezete? Miben különbözik ez a nejlon 6,6-tól?

- f) A selyem fibroin nevű fehérjéjének összetevői a poliglicin és polialanin szálak. Írd fel az glicinből és alaninból képződő dipeptid, ill. az ilyenekből létrejövő polipeptid keletkezésének egyenletét! Mit gondolsz, miért nem az előbb felírt módon, vegyesen tartalmaznak glicint és alanint a selyemben lévő polimerek? Melyik a glicin és az alanin közül a királis aminosav és miért? Milyen a selyem másodlagos, ill. harmadlagos szerkezete?

2.feladat:

A közönségesen „nejlonzacskónak” nevezett csomagolóeszközeink nem nejlonból, hanem polietilénből (vagy szabályos nevén polieténből, rövidítve PE) készülnek. Ez a legnagyobb tömegben előállított műanyag, évi mintegy 80 millió tonnát termelnek belőle. (Már 2008. március 26-án az írta a „*The Independent*” nevű tekintélyes angol napilap „*Science*” rovata (<http://www.independent.co.uk/news/science/polythenes-story-the-accidental-birth-of-plastic-bags-800602.html>), hogy a világon percenként átlagosan 1 millió darab PE zacskót használunk el. Gondoljunk bele, ez naponta $60 \times 24 = 1440$ millió, vagyis majdnem másfél milliárd darab! Bár a polietilén újrahasznosítható, manapság még a legnagyobb része a hulladéklerakókban vagy szélfúttá, tengersodorta szemétként végzi, például a Csendes-óceán északi részén lévő tengeráramlat által kialakított „*Great Pacific Garbage Patch*” (vagyis „Óriás Csendes-óceáni Szemétfolt”) területén. Hacsak nincs erős UV-sugárzásnak kitéve, a PE évszázadokig változatlanul marad (vagyis nem biodegradálható).



- Kb. milyen élhosszúságú kockát töltene be légköri nyomáson és 25 °C-on a jelenleg egy év alatt a világon polimerizált etén?
- Ha a polietilén hulladékból ennyire sok van és ennyire nagy környezeti problémákat okoz, akkor milyen tényezők akadályozhatják vajon az újrahasznosítását?
- A polietilén előállításához többféle katalizátor is használható. Ezek és az egyéb alkalmazott körülmények (pl. nyomás, hőmérséklet stb.) hatására különféle reakciómechanizmusok szerint más-más típusú polimerek képződnek, amelyek a sűrűségük és a makromolekulák átlagos moláris tömege alapján csoportosíthatók. Mindegyik fajtának megvannak a maga előnyös tulajdonságai. A különlegesen nagy moláris tömegű polietilén (angolul: *ultra high molecular weight polyethylene*, rövidítve: UHMWPE) makromolekuláinak átlagos moláris tömege 3,1 millió és 5,67 millió g/mol közé esik. Számítsd ki, hogy hány monomert jelentenek ezek a határértékek! Az UHMWPE a nagy átlagos moláris tömeg miatt kopásálló polietilénfajta (pl. gépalkatrészek, hentesek húsvágó deszkái és csípő-, ill. térdprotézisek készülnek belőle), de a sűrűsége aránylag kicsi. Mi lehet ennek a szerkezeti oka?
- A PEX rövidítéssel jelzett polietilén (*cross-linked polyethylene*, azaz keresztkötésekkel ellátott polietilén) rugalmasan nyújtható. Például vízvezetékek építéskor használják, mivel kitágított állapotban ráhúzható egy fémcsompra, amire aztán összehúzódva rászorul. Melyik természetes eredetű anyaghoz hasonlít ez a műanyag? Mi közöttük a szerkezeti azonosság és mi a különbség?

- e) A VLDPE (*very low density polyethylene*, vagyis nagyon kicsi sűrűségű polietilén) lényegében sok oldalláncot tartalmazó hosszú, egyenes láncokból áll. Ennek gyártását úgy oldják meg, hogy az etént más normál nyíltláncú alkénnel együtt polimerizálják (ezt hívják „kopolimerizáció”-nak). Milyen alkénnel kell kopolimerizálni a kettő, négy- és hat szénatomos (normál láncú) elágazások létrehozásához az etént?
- f) Melyik hazai gyár állít elő nagy mennyiségben polietilént?

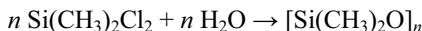
3.feladat:

Szilikonoknak nevezzük az olyan polimereket, amelyek szilícium mellett szenet, oxigént, hidrogént (és alkalmanként esetleg egyéb elemeket is) tartalmaznak. Összetételük és szerkezetük függvényében rendkívül változatos célokra használjuk őket. A népszerű, szilikon-gumból készült szerv implantátumokon (pl. a mell formáját megváltoztató beültetéseken) kívül vízzáró rétegeket, ragasztókat, sütőedényeket (pl. muffinsütőket) és nagyon sok más használati tárgyat, illetve építkezéskor alkalmazott anyagot készítenek belőlük. Ez azért lehetséges, mert igen sokféle előnyös tulajdonsággal rendelkeznek. Remek elektromos szigetelők, ellenállnak a hidegnek, a hőnek, az UV fénynek, víztaszító hatásúak, kicsi a kémiai reakciókészségük, alacsony a toxicitásuk (azaz nem mérgezőek), de jó a gázáteresztő képességük stb.

a) Kémiai szempontból ezek az anyagok polimerizált sziloxánok (ún. „polisziloxánok”), amelyek egyaránt tartalmaznak szervetlen és szerves jellegű molekularészleteket. Általános képletük (leegyszerűsítve) így írható: $[R_2SiO]_n$, ahol az „R” olyan szerves csoportokat jelenthet, mint pl. a metil-, az etil- vagy a fenilcsoport. Ezek a szénhidrogén csoportok egy szilícium-oxigén gerinc szilíciumatomjaihoz kapcsolódnak. Azonban nemcsak kétdimenziós, hanem háromdimenziós (azaz térhálós) polimerek is létrejöhetnek. Mely atomok között valósulhatnak meg az ehhez szükséges keresztkötések és miért?

b) Az előző feladatban láttuk, hogy a szénatomokból képződő láncok között is létesülhetnek keresztkötések, s ezért a szilikongumi mellett a természetes gumi, a különféle műgumik, ill. a keresztkötésekkel ellátott polietilén is rugalmasak. Azonban a szén nem képes az oxigénnel váltakozva hosszú láncokat létrehozni. Mi az oka annak, hogy (bár a periódusos rendszer azonos csoportjába tartozó elemekről van szó) a szén és a szilícium oxidjai annyira eltérő szerkezetűek?

c) A poli-dimetil-sziloxánt (PDMS) dimetil-diklór-szilánból állítják elő, a következő kiegészítendő egyenlet szerint:



Mi a folyamat mellékterméke és miért káros ennek a keletkezése? A veszélyes anyag keletkezését úgy lehet elkerülni, ha a dimetil-diklór-szilán klóratomjait acetát-csoportokra cserélik. Mi lesz ilyenkor a melléktermék? (Ennek jellegzetes szagát egyébként magunk is érezhetjük, amikor pl. a fürdőszobában vízzáró réteget létrehozó szilikon szigetelést viszünk fel.)

Betevő adalékanyagaink

Problémafelvetés:

Bizonyára még most is sokan emlékeznek a 2008 szeptemberében Kínában kitört tejtermék botrányra. Az élelmiszerhamisítók a vízzel felhígított tej nitrogéntartalmát többek között melaminnal és cianuronsavval növelték. Azért tették ezt, hogy a minőségellenőrök vizsgálatai során úgy tűnjön, mintha éppen annyi fehérje lenne benne, mint a nem vizezett (hamisítatlan) tejben. (A melamin és a cianuronsav is magas nitrogéntartalmú, viszonylag olcsón előállítható ipari alapanyagok. A melamint nagy tételben használja például a műanyagipar, a cianuronsavból pedig fehérítő-, fertőtlenítő- és növényvédő szereket állítanak elő.) Csakhogy 2008 decemberéig az ilyen tejtermékeket fogyasztók közül mintegy 300 ezer ember betegedett meg, kb. 50 ezer gyermek került kórházba, és hat, hamisított tápszeren nevelt csecsemő meg is halt. A vizsgálatok veseelégtelenséget mutattak ki náluk (lásd: <http://en.wikipedia.org/wiki/Melamine>). Kiderült ugyanis, hogy a külön-külön nem nagyon ártalmas melamin és cianuronsav együttes előfordulás esetén egy rendkívül rosszul oldódó komplexet képez, ami adott esetben végzetessé váló veseeképződéshez vezethet. 2009. január 22-én az illetékes kínai bíróság három halálos ítéletet hozott az ügyben, amelyekből kettőt végre is hajtottak. Mindez különösen megdöbbenő annak a ténynek az ismeretében, hogy ezt megelőzően, 2007. márciusában már volt egy nagy botrány ugyanezen két vegyület együttes alkalmazása miatt (egyidejűleg) Észak-Amerikában, Európában és Dél-Afrikában. A gyanú szerint az ily módon hamisított fehérje abban az esetben is Kínából származott, de akkor állateledelekbe került. Nagy gyártó cégek mintegy 5 300 termékét kellett visszahívni, miután a kétségbeesett vásárlók több száz veseelégtelenségben megbetegedett, ill. elpusztult háziállatról számoltak be. Jó hír azonban, hogy Kínában azóta már döntés született a szétaprózott, és viszonylag könnyen kijátszható élelmiszer-minőségellenőrzési rendszer egységesítésére és szigorítására.

Egy másik, de már Magyarországot is közvetlenül érintő emlékezetes eset volt a dioxinos guárgumi miatt 2007 nyarán kipattant botrány (lásd: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Guargumi>). A guárgumi, vagy más néven guármézga az E412 élelmiszeradalék-kóddal jelölt, vízzel duzzadó növényi rost, összetételét tekintve egy (az ember számára emészthetetlen) poliszacharid. A főként Indiában és a vele szomszédos Pakisztánban termesztett guárbab (*Cyamopsis tetragonoloba*) magjából nyerik ki. Rendkívül előnyös tulajdonságokkal bír: használható állagjavítóként és sűrítőszerként (pl. sajtkrémekben, felvágottakban, pudingokban; mivel a víz viszkozitását a közönséges kukoricakeményítőnél nyolcszor jobban növeli), gélképzőként (pl. gyümölcszselében, mivel kitűnő vízmegtartó hatású), valamint olajos és vizes fázist egyaránt tartalmazó emulziók (pl. a majonézek, szószok, ketchupok) stabilitásának növelésére, sőt jégkrémek és sütőipari termékek előállításához is alkalmazzák. Ezért aztán világszerte mintegy 400-800 ezer tonnát(!) állítanak elő belőle évente, amelynek jó részét Észak-Amerikába, Európába, a Közel-Keletre és Kínába exportálják. Baj csak abból származik, hogy a fent említett fő exportőrök olyan fejlődő országok, ahol például egyes, a fejlett országokban már betiltott növényvédő szerek még használatban vannak. Így kerülhetett egy Indiából érkezett guárgumi szállítmányba a rendkívül mérgező dioxin és a szintén veszélyes pentaklórfenol szennyezés. A svájci hatóságok az Európai Bizottságnak küldött figyelmeztetése értelmében a kérdéses guárgumiból gyártott viszkozitásnövelő élelmiszeradalékban ugyanis grammonként 12-156 pikogramm (1 pikogramm = 10^{-12} g) közötti dioxinmennyiséget mutattak ki. Hivatalos uniós határérték külön a guárgumi engedélyezett dioxintartalmára nincs, csak zsírra, mert abban oldódik jól, ezért abban halmozódik fel. (Azért nem lehet egyszerűen zero határértéket előírni, mert nagyon sokféle emberi tevékenység, sőt egyes

természeti folyamatok során is keletkezik ez az igen lassan lebomló, erős mérge. Gyorsan végighalad a táplálékláncon, ezért főként az állati zsíradékkal vesszük föl. Így, bár elképzelhetetlenül alacsony koncentrációban, de gyakorlatilag minden ételünkben jelen van.) A megengedett, vagyis a szakemberek által komolyabb következmények nélkül elviselhetőnek tartott mennyiség: 6 pikogramm dioxin/gramm zsír. A fent említett, guárgumi-alapú készítményben tehát ennek sokszorosát mérték. Nem ismeretes, hogy hogyan szennyeződhetett az adott guárgumi szállítmány a nagy mennyiségben főként a klórtartalmú vegyületek (pl. növényvédőszer) gyártásakor, lebomlásakor vagy égetésekor keletkező dioxinnal. Mindenesetre a hatóságok az összes olyan árut levetették a kereskedőkkel az élelmiszerüzletek polcairól, amelyek esetében fennállt a veszélye annak, hogy a szennyezett guárgumi felhasználásával készült. A végleges, és mindenki számára megnyugtató megoldás azonban csak az lehet, ha az importőr vállalatok a vásárlás előtt megkövetelik a szigorú élelmiszeranalitikai vizsgálatok elvégzését. Ám ez nem olcsó eljárás: India egyetlen, guárgumit is minősítő laboratóriuma tonnánként mintegy 100 ezer Ft-ért végzi el a szükséges méréseket.

A sajtó felkap néha olyan eseteket is, amelyeket alaposabb vizsgálatok elvégzése után a szakemberek rémhírnek vagy egyszerűen csak tudományosan megalapozatlannak minősítenek. Klasszikus példa erre az aszpartám nevű édesítőszer. Több évtizede folyik a harc azért, hogy ennek a vegyületnek az egészségkárosító (pl. agydaganatot okozó) hatását bebizonyítsák. Mint sok-sok egyéb, nagy haszonnal eladható termék esetében a gyártók és a forgalmazók a szer ártalmatlanságát, az ellenérdekelt konkurencia és (az utóbbiakkal nem feltétlenül kapcsolatban álló, de nem is mindig szakszerű és kellően megfontolt módon véleményt formáló) egészségvédők között valóságos információs háború zajlik. (Egyébként érdekes, hogy ennek tanulságaként az elektronikus levélben küldött (rém)hír e-mail-láncsal való terjesztésének technikáját állítólag már bizonyos kurzusokon tanítják...) Sajnos azonban még egyes kutatók ítéletalkotása is lehet megalapozatlan, ha módszereik vagy az eredmények értelmezése nem felel meg a természettudományos vizsgálatok alapelveinek és a szakma szigorú szabályainak. Ezek ellen az egyetlen védekezési mód az lehet, hogy más szakemberek és kutatócsoportok is megvizsgálják (ha lehet, újra megméri) a kapott adatokat, majd ők is közlik az ezekből (a legjobb tudásuk szerint, minden körülményt figyelembe véve) levonható következtetéseket. Ha egy kutató hamis adatokat vagy helytelen következtetéseket közöl, azzal minimum a saját szakmai jó hírét veszélyezteti, ezért általában elmondható, hogy törekednek a megalapozott és megfontolt ítéletalkotásra. Így járt el az Európai Unió Élelmiszertudományi Bizottsága, az EFSA (*European Food Safety Authority*) is a bolognai székhelyű *Ramazzini Alapítvány* 2005-ös tanulmányával kapcsolatban, amely azt állította, hogy az aszpartám rákos elváltozásokat okozott a vizsgált patkányokon. Az EFSA 2006. május 5-én közzétett állásfoglalása szerint azonban „...a rendelkezésre álló kutatási eredmények alapján nem bizonyítható, hogy az aszpartám nevű édesítőszer rákot okozna, így nem indokolt a jelenleg érvényben lévő, megengedhető napi bevitt szabályozó érték felülvizsgálata sem” (ld. http://egeszseg.origo.hu/cikk/0619/568705/nem_bizonyitott_1.htm). Az EFSA-hoz eljuttatott kutatási eredmények vizsgálatakor ugyanis kiderült, hogy a kísérleti állatok nagy részének tüdejében egy krónikus gyulladással járó betegség volt jelen, és ezért „...a szakértők arra a következtetésre jutottak, hogy a rákos esetek (nyirokdaganatok és leukémia) számának emelkedése nem hozható összefüggésbe az aszpartám fogyasztásával, ellenben valószínűleg kapcsolatban állnak a tüdőben megfigyelt gyulladással reakciókkal. Szintén az eredmények hitelessége ellen szól, hogy semmilyen kapcsolatot nem lehetett kimutatni a növekvő mennyiségű aszpartám adagolása és az állatok erre adott reakciója között.” (az idézet eredetijét ld. mint fent). Kétségtelen tény, hogy mai civilizációnk átlagembere (tör-

vényes és törvénytelen okokból kifolyólag) rengeteg élelmiszeradalék-anyagot fogyaszt, és hogy ennek nem is vagyunk mindig tudatában. Nagyon nehéz felmérni az egyes adalék-anyagok élő szervezetre gyakorolt hatását (különösen a hosszú távú és együttes hatásokat). Általánosságban jó tanácsnak tekinthető az, hogy igyekezzünk minél több természetes forrásból származó, kezeletlen élelmiszert fogyasztani, ha azok eredete garantálható. Amennyiben módunk van rá, készítsünk inkább házi majonézt, használjunk minél több friss alapanyagot a főzéshez. Azt azonban sajnos tudomásul kell vennünk, hogy egyes élelmiszeradalék-anyagok fogyasztása a mai világunkban már szinte megkerülhetetlennek látszik. A sűrítőanyagok, stabilizátorok, gélképzők, csomósodásgátlók, csomagológázok stb. használatát teljesen mellőző ételek készítésére és fogyasztására ma már nagyon nehéz egy háztartást építeni. Ráadásul a legtöbb élelmiszeradalék-anyag használata (a rájuk nem kifejezetten allergiás vagy érzékeny emberek számára) még nagy mennyiségben sem okoz problémát. Hiszen ezek az Európai Unióban csak szigorú és alapos vizsgálatok után kerülhetnek fel az engedélyezett élelmiszeradalék-anyagok listájára. Az ilyen anyagok ún. „E-számot” kapnak („E”, mint Európa, ld. <http://www.eufic.org/article/hu/elelmiszerbiztonsag-es-minoseg/elelmiszer-adalekok/artid/Nehany-elelmiszer-adalekanyag-bemutatas-a/>). Sok közülük természetes eredetű és/vagy eleve megtalálható az emberi szervezetben, ill. a természetes táplálékainkban. Másrészt azért ne felejtjük el azt sem, hogy nem minden természetes eredetű anyag egészséges (gondoljunk csak pl. a gyilkos galóca mérgére!). Ezért tehát nem árt értékén kezelni az egészségvédők állításait, és gondosan megvizsgálni, kinek miben van tényszerűen igaza, és hogy korrekt természettudományos módszerekkel végzett kutatásokból levont, logikus és érvényes következtetésekre alapozzák-e amit mondanak. Ennek eldöntése persze egy e területen szakképzettséggel nem rendelkező ember számára lehetetlen. Ezért nekünk, állampolgároknak az az érdekünk, hogy országunkban olyan, hatósági jogkörrel felruházott intézmények működjenek, ahol ezt a munkát megbízható és konzekvens módon elvégzik helyettünk. Ilyen például az Egyesült Államokban a híres „FDA” (*U.S. Food and Drug Administration*), nálunk Magyarországon pedig a Országos Élelmiszerbiztonsági és Táplálkozástudományi Intézet (<http://www.oeti.hu>). Ezek hatékony működéséhez pedig szükség van jól képzett, tisztességes és okos, józanul mérlegelő, és a fogyasztók érdekeit mindig elsődlegesnek tekintő élelmiszer analitikus vegyészekre, biológusokra és egyéb szakemberekre. Az általuk nyilvánosságra hozott szakvéleményekre joggal hagyatkozhatunk az ilyen kényes kérdésekben. Persze, ők sem tévedhetetlenek, és minden rendszer kijátszható, de ennek az esélye – megfelelő körülményekkel – minimálisra csökkenthető. Ez mindannyiunk érdeke, mert valóban nem mindegy, mit eszünk és mit iszunk. A rendszer folyamatos működtetéséhez pedig mindig nagy szükség van sok jó szakember képzésére, akik tudományosan megalapozott és megfontolt döntéseket képesek hozni minden felmerült kérdésben. Ezért ebben a projektben az élelmiszer-adalékanyagokkal és az élelmiszerbiztonsággal fogunk ismerkedni. (További, az ételeink és italaink minőségének ellenőrzésével kapcsolatos szabványvizsgálatok találhatók magyar és angol nyelven pl. a ProBase projekt honlapján: <http://www.compacitypro.nl/ProBaseMenu/tabid/377/Default.aspx>).

Feladatok:

1. lépés: Válassz ki az otthon található, sokféle összetevőt tartalmazó tartós élelmiszerek közül néhányat (minimum ötöt vagy hatot, pl. kekszfélét, gabonapelyhet, ételkonzervet, vajkrémet, majonézt, valamilyen kész szószt vagy mártást stb.), és jegyezd fel, hogy milyen adalékanyagokat tartalmaznak! Ha ún. „E-számokat” találsz, akkor **keresd meg** azok jelentését! **Gyűjtsd össze** az interneten, ill. nyomtatásban az összetevőkről beszerezhető információkat! **Derítsd ki** a legfontosabb jellemzőiket:

- a) Van-e ezeknek az adalékanyagoknak kémiai képlete, vagy keverékekről van szó?
- b) Ha van képletük, akkor mi az?
- c) Ha van E-számuk, akkor mennyi az?
- d) Szerinted mi lehet az oka annak, hogy sok esetben nem a kevesebb helyet foglaló E-számot, hanem helyette inkább a hosszabb nevet tüntetik fel?
- e) Honnan nyerik ki, vagy hogyan állítják elő őket?
- f) Milyen célt szolgálnak az élelmiszerekben és milyen élelmiszeradalék-anyag kategóriába sorolhatók?
- g) Milyen tulajdonságuknak köszönhetik a felhasználásukat?

2. lépés: Gondold végig, milyen általad korábban tanult vagy különböző forrásokból kideríthető kémiai és biológiai ismeretek vonatkoznak erre a témára! Elméleti és gyakorlati ismereteid alapján csoportosítsd az adott élelmiszeradalék-anyagokról beszerzett információkat egy **táblázatban!** Ennek megszerkesztésekor használd a fentiekben (ld. 1. lépés) készített jegyzeteidet!

3. lépés: Keress az interneten olyan E-számokkal kapcsolatos **álhíreket**, amelyek a hivatalos, élelmiszerbiztonságért felelős hatóságok, ill. intézmények vizsgálatai és közleményei alapján **rémhírnek** minősíthetők! Érdekes példa erre a következő linken elérhető honlap: http://dietakucko.hu/index.php?option=com_content&task=view&id=96&Itemid=45. Az itt olvasható állítás szerint az E300 jelű aszkorbinsav „*hólyagrakot okozott a kísérleteknél (szemben a természetes C-vitaminnal)*”. A természettudományok területén nyilvánvalóan képzetlen (és a helyesírási szabályokkal sem sokat törődő) szerző itt nagyvonalúan mellőzi azt a tényt, hogy az aszkorbinsav maga a C-vitamin. Szegény Szent-Györgyi Albertnek (az egyetlen magyar Nobel-díjasunknak, aki természettudományos témában itthon nyerte el a magas kitüntetést, és egyébként éppen az előbbi állítással összefüggésben!) nyilván nagyon fájna ilyeneket olvasni az anyanyelvén és a saját hazájában... Még érdekesebb, hogy a fenti honlap egy korrekt szemléletmóddal és szakmai hozzáértéssel összeállított, a hivatalosan elfogadott forrásokból merítő másik honlapot (ld. http://www.gunda.hu/e_num/) ad meg az E-számokhoz forrásként. Ez utóbbi portálhoz tartozó „Tücsök és bogár” c. weboldalon (http://www.gunda.hu/e_num/details/esz_10.htm) pedig éppen az olvasható hogy mekkora butaság a C-vitamin nátriumsójáról (a nátrium-aszkorbátról) azt állítani, hogy hólyagrakot okoz. Lehet, hogy az erre tévesen hivatkozó honlap-szerző figyelmét csak az (egyébként általa félreértelmezett) állítás ragadta meg, a szakember azt hamisnak minősítő kommentárja már nem... Készíts az általad összegyűjtött legalább két vagy három hasonló rémhírről és azok hivatalos, hatósági forrás(ok)ból származó cáfolatairól egy **összefoglalót!**

3.lépés: Írj a fent összegyűjtött rémhírekből kiindulva egy ismeretterjesztő **cikket** az iskolád újságjába vagy honlapjára, esetleg az osztály faliújságjára! Ebben igyekezz közérthetően elmagyarázni, hogy milyen módszerekkel dolgoznak az ilyen rémhírtérjesztők, mik lehetnek az indítékaik és a működésük célja!

4.lépés: Oldd meg az alábbi, élelmiszerbiztonsággal kapcsolatos **feladatokat!**

Az élelmiszerbiztonsághoz kapcsolódó gyakorló feladatok

1.feladat:

A „dioxinok” kifejezés kémiai értelemben egy egész vegyületcsaládot takar. Valójában **poliklór-dibenzodioxin** a neve az e csoportba tartozó azon szerves heteroaromás (oxigént tartalmazó) vegyületeknek, amelyekben az 1,4-dioxinhoz csatolt benzolgyűrűk több hidrogénatomja klóratomokkal van helyettesítve. Közülük a legveszélyesebbnek azt a vegyületet tekintik, amelynek a molekulájában a szerves kémiai számozás szerint a vegyület 2., 3., 7. és 8. helyzetében levő szénhez kapcsolt hidrogén van helyettesítve klórral. Ennek a vegyületnek a neve **2,3,7,8-tetraklór-dibenzo-p-dioxin**, vagy 2,3,7,8-tetraklór-dibenzo[1,4]dioxin, ill. az angol névből származó mozaikszóval *TCDD*. Érdekes, hogy a nevében és szerkezetében egyaránt némi hasonlóságot mutató 1,4-dioxánt közönséges laboratóriumi oldószerként használják. Ennek nyilvánvalóan az az oka, hogy egészen más fizikai és kémiai tulajdonságai, ill. élettani hatása van, mint az előbb említett távoli rokonainak.

a) Derítsd ki, mi a hasonlóság és a különbség az 1,4-dioxin és az 1,4-dioxán összetétele és szerkezete között! Milyen (egy felületen első pillantásra aprónak tűnő) különbség okozza tehát a teljesen eltérő tulajdonságokat? Rajzold fel a 2,3,7,8-tetraklór-dibenzo[1,4]dioxin képletét és vedd össze azt is az 1,4-dioxánéval!

b) Keresd meg az interneten vagy a szakkönyvekben, hogy milyen élettani hatásai vannak a „dioxin”-ként emlegetett TCDD-nek és az általában csak „dioxán”-nak nevezett 1,4-dioxánnak! Gyűjts legalább két híres példát arra, amikor a dioxin szennyezést, ill. mérgezést okozott! Keress ezeket az eseteket illusztráló fényképeket is!

c) A dioxin Európában megengedett határértéke 6 pikogramm dioxin/gramm zsír. Hány dioxin molekulát jelent ez egy 250 g tömegű étkezési sertésszár csomagban?

d) 2001-ben egy orvos jelentette egy 30 éves nő esetét (http://hu.wikipedia.org/wiki/Polikl%C3%B3r_dibenzodioxin#cite_note-pmid11564625-15), aki masszív TCDD dózist vett fel, amely vérzsiradékában a TCDD koncentrációját 144 ng/g-ra emelte. Ezt eddig a világon a legmagasabb számnak tekintik. Hányszorosa ez a fenti (az EFSA által engedélyezett), az elfogyasztandó zsiradékra megadott határértéknek?

e) A pentaklórfenol egy fatartósító anyag, amit már a világ sok országában betiltottak. Rajzold fel a szerkezetét! Hány izomerje van? Létezhet-e nátriumsója? (Válaszodat indokold meg!)

2. feladat:

A guárgumi az ember számára emészthetetlen poliszacharid. A Wikipédia (<http://hu.wikipedia.org/wiki/Guargumi>) szerint: „A *guargumi* fő komponense a **guarán**, amely egy galaktomannán típusú heteropoliszacharid. A makromolekula gerincét 1-4 kötésekkel kapcsolódó β -D-mannopiranozlánc alkotja, ehhez átlag két mannózonként 1-6 kötéssel galaktopiranozil-oldalláncok kapcsolódnak. Egy gauránlánc átlagosan 10 000 al egységből áll.” ... Vízrel hidrokolloidot képez; mivel nem ionizál (pontosabban: „ionizálódik”), a képződő kolloidra a pH nincs hatással. Extrém pH-kon és magasabb hőmérsékleten viszont bomlásnak indul: míg a molekula pH 5-7 tartományban stabil, erős savak és bázisok hatására hidrolizál, ami egyben a viszkozitás csökkenéséhez vezet. Szénhidrogénekben nem oldódik.” ... „Jellemző rá a tixotrópia (a viszkozitás megváltozása a keverés során), amely 1%-os koncentráció felett jelentős...”

a) Saját szavaiddal, a lehető legrövidebben magyarázd meg, mit jelentenek a következő szavak, ill. kifejezések: „heteropoliszacharid”, „ β -D-mannopiranozlánc”, „hidrokolloidot képez”, „nem ionizál”, „savak és bázisok hatására hidrolizál”. (Ha szükséges, a megértéshez használhatod a Wikipédia azon oldalain lévő magyarázatokat, amelyekre a fenti hiperlinkek mutatnak, de ebben az esetben is értelmezned kell a kifejezéseket!)

c) A szacharidok milyen csoportjába tartozik a guaránt felépítő mannóz és galaktóz? Milyen viszonyban vannak ezek a jól ismert glükózzal? Mi közöttük a hasonlóság és mi a különbség? Hány nyílt láncú izomerje létezik az ilyen konstitúciójú vegyületeknek és hogyan lehet ezt kiszámolni? Mit gondolsz, miért pont a D-glükóz lett az élővilág energiafor-galmának alapvegyülete, és nem pl. a mannóz vagy a galaktóz?

d) Magyarázd meg, milyen okokból kifolyólag nem oldódik a guarán szénhidrogénekben!

e) Milyen szerkezeti tulajdonságainak köszönheti a guárgumi azt, hogy jó vízmegkötő, kitűnő gélképző, valamint hatékony emulgeálószerként is használható?

f) A tixotrópia olyan jelenség, amely még vallási csodákkal is összefüggésbe hozható. A Kémiai Panoráma c. folyóirat 3. számában (2010. évf. I. szám, beszerezhető: <http://www.eotvoskiado.hu/kemia/7471-kemiai-panorama-3-szam-2010-evfolyam-i-szam> ; utoljára megtekintve 2010. aug. 30.) Dr. Wajand Judit tollából érdekes cikk olvasható „A nápolyi csoda - San Gennaro vére és a tixotrópia” címmel. Ez arról szól, hogy a hiedelem szerint a kegyes szent vérért tartalmazó ereklyetartókban lévő szilárdnak látszó vöröses anyag évente néhány alkalommal (és mindig éppen a legnagyobb, körmenetekkel is járó ünnepek idején) elfolyósodik. A fentiek segítségével magyarázd meg ezt a sokáig csodának hitt jelenséget!

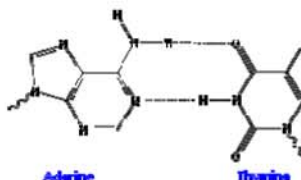
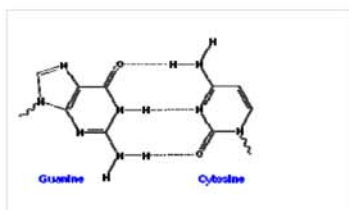
3. feladat:

Keresd meg, és kémiai képlettrajzoló programok (pl. *ChemSketch*) segítségével rajzold fel (vagy egy internetes honlapról másold ki) a melamin és a cianuronsav képletét! A két vegyület által képzett (a fenti bevezetőben már említett) vesekőképződéshez vezető nagyon stabil komplexet hidrogénkötések tartják össze.

a) Magyarázd meg, miért vannak meg itt az intermolekuláris hidrogénkötések kialakulásának feltételei!

b) Maximum hány ilyen kötés jöhet létre egy melamin- és egy cianuronsav-molekula között?

c) Rajzold fel a két molekula szerkezeti képletét a közöttük lévő hidrogénkötésekkel! Melyik természetes makromolekula szerkezeti részletéhez hasonlít ez a komplex? Mi a hasonlóság és mi a különbség?



4.feladat:

A tejtermékek hamisításakor az élelmiszerek minőségét ellenőrző kínai hatóságok megtévesztésének alapja az volt, hogy az élelmiszerek fehérjetartalmára azok nitrogéntartalmából következtetnek. Ezt egy olyan szabványvizsgálattal mérik, ami a *Johann Kjeldahl* által 1883-ban kifejlesztett analitikai módszeren alapul. Ennek az a lényege, hogy az ismert tömegű szerves mintát nagyon tömény kénsavas közegben forralják. A bomláskor keletkező ammónia ilyenkor ammónium-szulfáttá alakul. Ehhez az oldathoz tömény nátrium-hidroxid-oldatot adagolva, az így felszabaduló ammóniagázt pl. ismert térfogatú és koncentrációjú sósav-oldatban nyelik el. A művelet befejezése után a maradék sósavat ismert koncentrációjú nátrium-hidroxid-oldattal „visszatitrlják”. A módszer manapság többnyire automatizált és katalizátorokat is alkalmaznak, azonban az alapja most is a zseniális kémikus által kidolgozott elv (bár ő eredetileg más savat használt az ammónia megkötésére).

a) Írd fel a fent említett reakciók egyenleteit!

b) Mennyi volt a bemért 1,0028 g tömegű élelmiszerminta tömegszázalékos nitrogéntartalma, ha a keletkező ammóniát 15,00 cm³ 0,5017 mol/dm³ koncentrációjú sósavoldatban nyeltük el, majd az így keletkezett oldat semlegesítéséhez (az ún. „vak oldat”-ra fogyott mérőoldat térfogatának levonása után) 7,25 cm³, 0,1005 mol/dm³ koncentrációjú nátrium-hidroxid-mérőoldat fogyott? (A „vak oldat” azt jelenti, hogy minden műveletet a mintát tartalmazó eleggyel azonos módon végzünk el, csak a mintát nem adjuk hozzá. A szabványvizsgálat kivitelezésének módját ld. angolul a következő weboldalon: http://www.foragetesting.org/lab_procedure/sectionB/3/part3.2.htm).

c) Egy kémiai érdekességekkel foglalkozó weboldalon (<http://www.freeweb.hu/hmika/Erdekes/Html/Tejkemia.htm>) a következő olvasható: „A tehéntej átlagos fehérjetartalma 3,4-3,5%. A tej összes nitrogéntartalmának kb. 5%-a, 30 mg/100 cm³ nem-fehérje nitrogén, mint amilyenek a szabad aminosavak, a karbamid, a kreatinin, stb. A tej nem-fehérje nitrogén tartalma 16 és 47 mg/100 cm³ között változik. A tág határ a tej karbamidtartalmának köszönhető, ami az összes nem-fehérje nitrogén tartalom felét teszi ki.” Másrészt a Wikipédia szerint egy tipikus fehérje nitrogéntartalma kb. $w = 10\text{-}12\%$ (http://en.wikipedia.org/wiki/Melamine#cite_note-51). A mindezen adatok alapján elvégezhető számítással becsüld meg, hogy kb. hány gramm melamint kellett az elvárt nitrogéntartalom eléréséhez a csalóknak hozzáadni 100 liter olyan hamisított tejhez, amit úgy kaptak, hogy 75 liter tiszta tejet 25 liter vízzel hígítottak? Miért nem lehet a fenti adatok alapján pontos számításokat végezni?

„Intelligens” és „buta” fémek

Problémafelvetés:

Sajnos mindnyájunkkal előfordulhat, hogy valamely családtagunk (vagy ha már nem vagyunk olyan fiatalok, akkor épp saját magunk) szívében beszűkül, vagy akár el is záródik egy, a vérellátást biztosító fontos ér. Ez legrosszabb esetben a szívizom elhalásával járó infarktushoz vezethet, ami köztudottan életveszélyes állapot. (A szív- és érrendszeri betegségek aránya a halálozások okai között Magyarországon még a világátlagnál is magasabb, ami az általában igen stresszes és mozgásszegény életmódnak, valamint a hagyományosan egészségtelen táplálkozási szokásoknak köszönhető.) Az ilyen helyzetek elkerülése érdekében persze mindenkinek kötelessége és elemi érdeke a megelőzés, a helyes szokások és életmód kialakítása. Azonban a már létrejött akut betegség esetén – a drámai következmények elkerülése érdekében – az orvosok elsődleges feladata a szív ereinek tágítása, áteresztőképességük növelése. Az ilyenkor alkalmazott egyik megoldás az lehet, hogy egy egyenes fémdrótot vezetnek óvatosan a szűk érszakaszba, amely ott aztán spirállá tekeredik, így belülről szétfeszítve eltávolítja egymástól a veszélyesen beszűkült érfalakat. Ezzel az életveszélyes állapot megszűnik, s a beteg új esélyt kap arra, hogy végig gondolja, hogyan is lenne érdemes élnie a továbbiakban. De vajon honnan tudja ez az „intelligens” fém, hogy pont ott, pont akkor és pont olyan alakúvá kell változnia?

Aztán vannak persze kevésbé okos fémek is. A vas szénvel alkotott ötvözete, a közönséges acél a XIX. századi ipari forradalom főszereplője (hogy ne mondjuk „sztárja”) volt, s ma sem tudna az emberi civilizáció létezni nélküle. Megszámálhatatlan mennyiségben készülnek belőle az emberi munka könnyítésére vagy kiváltására szolgáló szerszámok és gépek, a nehéz terhek mozgatására szolgáló különféle járművek, a vasbeton épületek, hidak, tartószerkezetek vázai. Lehetetlen felsorolni, hányféle formában és célra használjuk a jó minőségű acélt. Hiszen megfelelő kezelés (ún. „edzés”) után nagyon erős, hajlékony és rugalmas, rengeteg megpróbáltatást kibír. Gondoljuk csak el, a Japánban lévő *Akashi Kaikyō Bridge* nevű acél függőhíd két alátámasztó pillére között 1991 m a távolság! Tokióban pedig a többszáz méter magas vasbeton felhőkarcolók ugyan erősen kilengtek, de azért nem dőltek össze a 2011 márciusában Japán partjai közelében bekövetkezett, a Richter-skálán 9-es erősségűnek mért, és az írott történelem negyedik legpusztítóbb erejű földrengésének mondott katasztrófa idején sem. Az acél tehát modern kori erős Atlaszként tartja a vállán a világunkat. Csak hát azt nem tudja, hogy nem lenne szabad „szóba állnia” a nedves levegővel. Így a közönséges acél felületén (pláne ha kint van az esős időben) viszonylag gyorsan csúnya, vörösesbarna rozsdá keletkezik. Ez nem egyszerűen esztétikai probléma, hanem életveszélyes is lehet. Ugyanis a porózus szerkezetű rozsdá (ellentétben az alumínium felületén kialakuló tömör védő oxidréteggel) továbbra is átereszt a nedvességet és a levegőt. Ezért aztán egy rozsdás acélrúd esetében kívülről nézvést sose tudjuk megmondani, mennyi még a könnyen lepergő rozsdá alatt az erős acél. Ha nem teszünk ellene semmit, az „izmos”, de „buta” acél folyamatosan fogy, és vastartalma könnyen porló-málló rozsdává alakul. Ekkor megtörténhet, hogy eljön a pillanat, amikor a híd váratlanul összeomlik, mint ahogyan az Minneapolisban történt 2007. augusztusában. A Mississippi folyón átívelő híd központi, 150 m hosszú eleme a délutáni csúcsforgalomban zuhant a mintegy húsz méterrel alatta lévő folyóba. A rajta éppen áthaladó járművek utasai közül 13-an meghaltak, sokan súlyosan megsérültek, s ráadásul az anyagi kár is óriási volt. Még most is lehet a szerencsétlenségről készült videofelvételeket találni az interneten (pl. <http://www.ende.hu/video/f6c699b223c61b1b5ab8>).

Ezért tehát az „erős, de buta” acélt az embernek kell óvnia. Csak az Egyesült Államokban évente 10-100 milliárd dollárra becsülik a korrózió által okozott károk nagyságrendjét (He-

ti Világgazdaság, HVG, 2007. október 20., 51. old.). Elképzelni is nehéz azonban azt az összeget, amit az egész emberiségnek minden évben a különféle, vasból és acélból készült tárgyak, ill. szerkezetek korrózióvédelmére kell költenie. Az 1889-es világkiállításra 7300 tonna öntöttvasból készült Eiffel-torony 220 ezer négyzetméteres felületét például a karbantartási szabálykönyv szerint 7 évente 3 rétegben speciális festékekkel kell lekenni, méghozzá hagyományos „pemzlivel”, nehogy egy pöttynyi hely is védőréteg nélkül maradjon (HVG, 2007. október 20., 52. old.). Ez nagy baj, amelynek igazi oka (ha a továbbiakban eltekintünk a fentebb alkalmazott tréfás megszemélyesítéstől) sajnos a vas és a rozsdák kémiai és fizikai természetében (azaz a vas negatív standardpotenciáljában és a rozsdák lyukacsos, porózus szerkezetében) rejlik. Ebből kifolyólag csak a kémikusok képesek eldönteni, hogy melyek a vas- és acéltárgyak megvédésére a leghatékonyabb, ill. a legolcsóbb korrózióvédelmi módszerek. Ezekről a kérdésekről, valamint sok más, fémekkel kapcsolatos hasznos információról és érdekességről is szól ez a projekt.

Ha rápillantunk a periódusos rendszerre, akkor azt látjuk, hogy a benne található elemek túlnyomó többsége fém. Erre minden valószínűség szerint már az általános iskolai kémia-tanárunk felhívta a figyelmünket. Továbbá arra is, hogy a legkönnyebben úgy lehet megkülönböztetni a fémeket a nemfémektől, hogy a fémek jól vezetik az elektromos áramot és a hőt. Jellemzőnek szoktuk még tekinteni a jellegzetes fémes fényt és az általában jó megmunkálhatóságot jelentő mechanikai tulajdonságokat (bár ebben már vannak kivételek, pl. a higany szobahőmérsékleten folyadék). Ezzel azonban nagyjából vége is a hasonlóságok nem túl hosszú sorának. Tapasztalataink szerint ugyanis a fémek (és pláne ötvözetek) rendkívül különböző kémiai (és részben fizikai) tulajdonságokkal rendelkeznek. Képzeljük csak el, mi történné, ha például nátriumból próbálnánk ástót készíteni vagy hidat építeni, esetleg arany vagy ezüst helyett kalciumból csináltatnánk az ékszereinket... Ahhoz, hogy eldöntsük, melyik fém mire alkalmas, nagyon kell tehát ismernünk a fémek fizikai és kémiai tulajdonságait, különben könnyen pórul járhatunk.

A történelem hajnalán persze ez a kémiai tudás még nem volt az emberiség birtokában. (Most pedig még természetesen nem tudjuk azt, amit néhány évtized múlva magától értetődőnek veszünk. Épp ennek az új tudásnak a megszerzéséhez van szükség arra, hogy minden generációban okos és tehetséges fiatalok vegyék át a stafétabotot a kémia tudományában is a tapasztaltabb idősebb nemzedéktől.) Gondoljuk csak meg, miből készítette az ősember a szerszámaikat és a fegyvereit? Főként kőből és fából. Nem butaságból vagy nemtörődomségből, hanem azért, mert nem ismerte a fémeket. Mi volt ennek az oka? Egyszerűen az, hogy a nemes- vagy félnemes fémeknél (aranynál, ezüstnél, platinánál, réznél) nagyobb reakcióképességű fémek igen ritkán találhatók meg a természetben elemi állapotban. Ha valaha képződtek is, az adott földtörténeti kor körülményeinek, és/vagy a Föld oxidatív légkörének köszönhetően, az idők során vegyületekké alakultak. Viszonylag kis elektronegativitásuk miatt azonban a fémek gyakorlatilag csak elektronjaik egy részét leadva, pozitív oxidációs számmal képesek vegyületekbe lépni. Vagyis vegyületeikből kiindulva az elemi állapotú fémek csak elektronfelvétellel, azaz redukcióval állíthatók elő. Manapság ez nem nagy ügy, hiszen erős redukáló hatású anyaggal (pl. szén, ill. szén-monoxid) vagy (nehezen redukálható fémionok esetében) megfelelően nagy feszültségkülönbséget, ill. áramerősséget alkalmazó elektrolízissel még a legmegátalkodottabb (azaz legkisebb elektronegativitású) fémek, mint pl. a nátrium és kálium ionjai is rábírhatók arra, hogy elektronfelvétellel elemi fémmé alakuljanak át. Volta 1800-ban megkonstruált híres oszlója előtt azonban nem tudtak az emberek a folyamatosan végezhető elektrolízishez eléggé stabilis, hosszan fenntartható feszültséget előállítani. Addig tehát a fémek vegyületeikből való előállításához maradtak a redukálószeres, s azok közül is főként a legközöségesebb: a szén.

A szénnek több előnyös tulajdonsága is van a fémek előállítására szempontjából. Egyrészt égése exoterm, tehát ha egyszer meggyújtottuk, akkor folyamatosan képes szolgáltatni az adott kémiai reakciókhoz szükséges aktiválási energiát, ill. szükség esetén a „reakcióhőt”. Másrészt nem csak a fémek közvetlen redukciójára képes (azáltal, hogy elvonja belőlük az oxigént), hanem a belőle képződő szén-monoxid is jó redukálószer. Hiszen oxigén felvételével (ill. azáltal, hogy a benne lévő szén elektronokat ad át az oxigénnek) széndioxidá alakul. Ráadásul a szén-monoxid gáz és nem szilárd anyag, mint maga a szén. Ezért a szén-monoxid minden ki résbe eljut, s ha megfelelő a hőmérséklet és nem túl reaktív (azaz nem nagyon negatív standardpotenciálú) a fém, akkor redukálni tudja a fém oxidját elemi fémmé. Ez a folyamat minden bizonnyal megvalósulhatott az ősember ételének elkészítéséhez, ill. melegedéshez használt tűzésben is. Hiszen a tűzrakáshoz használt fa tökéletes égése során (ha a tűz belsejébe nem jutott a tökéletes égéshez elegendő oxigén) faszén alakult ki, amelynek izzásakor (részben a magas hőmérsékleten szintén keletkező szén-monoxid hatására) fémek keletkezhetnek a különféle fémvegyületeket, ill. fémércet tartalmazó kőzetekből.

Egyszerű, nyílt lánggal égő tűzben azonban nem lehetett vasat előállítani, mert nem volt hozzá elég magas a hőmérséklet. Ez az oka annak, hogy a vaskorszak csak a réz, majd az azt követő bronzkorszak után következhetett a történelemben. (Ezért sokáig csak a meteoritok formájában Földre hullott elemi vasat ismerte az ember. Emiatt hívták a vasat ekkoriban „mennyei fémmek”). De miért nem elégedett meg vajon az emberiség a rézzel? Végül is tetszetős, vöröses (nem sárga, mert a sárgarézt már a réz és a cink ötvözeteként készüli!) a színe, félnemesfémként aránylag kevésbé reakcióképes (bár a nedves és széndioxidot is tartalmazó levegőn zöldes színű patina borítja be). Igen jó hővezető, tehát jó minőségű edényeket lehetett belőle készíteni (bár ecetes étel például nem tartható benne, mert az ecet oxigén (azaz levegő) jelenlétében a fehérjéinket irreverzibilisen kicsapó rézionokat old ki belőle). Jó elektromos vezetését akkor még nem ismerték, de erre akkoriban nem is volt igény. Szerszámnak és fegyvernek azonban elég gyatra volt a réz, hiszen nem volt elég kemény, tehát viszonylag könnyen elhajlott, kicsorbult. Ez munka közben is kellemetlen lehetett, de egy élet-halál harcban végzetes is... Sajnos általánosan is megállapítható, hogy a hadiipar mindig motiválóan hatott a technika fejlődésére. Hiszen a mindenkori hatalmasok általában még több anyagi javat biztosító még nagyobb hatalmat akarnak. Ezt pedig direkt vagy indirekt erőszakkal szerzik meg embertársaiktól. E céljuk eléréséhez rendkívül fontos, hogy a kor fejlettségi szintjéhez képest a létező legmodernebb haditechnika birtokában legyenek. Ezért az ilyen fejlesztéseket végzők munkájának támogatására nagy anyagi áldozatokat is képesek hozni – persze mondanunk sem kell, hogy – az alattvalóik, ill. adófizetőik pénzéből. Megállapítható, hogy a történelem során csak a szereplők változtak, és a technika fejlődött, az emberi alaptermészet egyáltalán nem. Csak konszenzusos alapon hozott és szigorúan betartatott törvények, meg a nyilvánosság állhatnak ideig-óráig az útjába. Szóval a rezes (az olvasztással előállított és megmunkált ezüsttel és arannyal együtt) többnyire inkább díszítésre, és a gazdagság jelképeként használták. Emiatt nagy eredmény volt, amikor föl tudta váltani a réz ónnal alkotott ötvözetét, a bronz. Hiszen ez már jóval keményebb, erősebb volt a réznél, sokkal több megpróbáltatást kibírt. Fegyveres harcban vagy vadászat idején azonban a bronzfegyverek is gyakran cserben hagyhatták tulajdonosaikat. Legalábbis erre vall az a tény, hogy amikor az emberiség végre megtanult a (a tűzbe nagy mennyiségű levegőt juttató fűtatók segítségével) a vasgyártáshoz is elegendően magas hőmérsékletű tüzet élesztetni, a nyersvasból, majd az acélból készült eszközök gyorsan kiszorították bronz alapanyagú elődeiket.

A faszenes redukcióval nyert nagy széntartalmú nyersvasnak is voltak a bronzhoz képest előnyös tulajdonságai (pl. nagy szilárdság és kopásállóság), de az igazi áttörést a belőle

előállított acél hozta. A hajlékony, rugalmas és erős (tehát fegyver- és szerszámkészítéshez ideális) acélt a szénttartalom csökkentésével és a rácsszerkezet átalakításával állították elő a nyersvasból. Ehhez többszöri felmelegítéssel és lehűtéssel, valamint mechanikai hatásokkal (pl. kalapálással) rendezték át a benne elhelyezkedő atomokat úgy, hogy azok nagy erőhatás után se váljanak szét egymástól, hanem helyett „visszaugorjanak” a régi helyükre. Ez abban nyilvánult meg, hogy egy jó acélpenge általában nem eltörött, csak meghajlott még igen nagy erő hatására is, majd annak megszűnése után visszapattant eredeti helyzetébe. Egy éles, kemény és gyakorlatilag törhetetlen acélkard számtalanszor menthette meg a gazdája életét az olyan harcban, ahol az ellenfélnek csak rosszabb minőségű fegyvere volt. Sajnos a nedves levegőtől persze óvni kellett, hiszen (mint Petőfi írja híres, „A magyar nemes” című versében) a rozsdá képes volt szétmarni a jó minőségű (de még nem rozsdamentes) acélkardot is.

Az ókori és középkori fémmunkások tapasztalata szerint azonban a különböző helyeken bányászott ércekből sajnos igen különböző minőségű fémeket lehetett csak előállítani. A damaszkuszi és a svédacél hírnevét például nemcsak az alapozta meg, hogy a kor legfejlettebb technikáját alkalmazták az előállításukhoz. Jó acélt csak bizonyos eredetű vasércekből tudtak akkoriban előállítani. Ma már tudjuk, ennek az az oka, hogy egyes szennyezőanyagok (pl. a foszfor- és kéntartalom) rideggé és törékennyé teszi a vasat. Ezek az elemek (maguk is savképzők lévén) az egyszerű szén redukció útján nem távolíthatók el a vasból. Csak valamely bázikus salakképzővel (például mészkővel, amiből magas hőmérsékleten égetett mész lesz) képeznek sókat (ahogy Thomas erre végül rájött a XIX. században). Ezt azonban az ókorban és a középkorban még nem tudták. Mint ahogy többnyire híján voltak annak a tudásnak is, hogy az egyes vasércek által kis mennyiségben tartalmazott más (ma már ötvöző elemnek nevezett és tudatosan alkalmazott) fémek miatt rendelkeznek bizonyos acélok igen kedvező és ritka tulajdonságokkal (pl. nagyon nagy keménység, rozsdamentesség stb.). Meglehet azonban, hogy már az ókorban is akadtak kivételek. India fővárosában, Újdelhiben például már mintegy 1600 éve áll egy hétméteres és hattonnás, *Visnu* isten tiszteletére emelt vasoszlop. Ez (a speciális éghajlaton túl) minden valószínűség szerint nagy tömörségének és sajátos elemösszetételének (pl. alig található benne kén és magnézium, de viszonylag magas a foszfortartalma), valamint a felületén képződött passzíváló hatású magnetit rétegnek (amely a legtömörebb vas-oxid) köszönheti időtállóságát (http://en.wikipedia.org/wiki/Iron_pillar_of_Delhi). Érdekes, hogy ebben az esetben a nyersvas magas foszfortartalma (az akkoriban még nem alkalmazott lúgos salakosító anyag hiánya mellett) az előállításához használt speciális, nagy foszfortartalmú fafajtából készült faszénnek is köszönhető. Az indiai kovácsok nem tudhattak a foszfor szerepéről (tekintettel arra, hogy a foszfort mint elemet csak 1669-ben fedezte föl az alkimista *Hennig Brand*). Ám azt nyilván észrevették, hogy az adott fafajtából készült faszénnel nagyon tartós vas állítható elő. Akkortól kezdve pedig, amikor a józanabb gondolkodású embereknek már világszerte meggyőződésévé vált, hogy az előállított fém minősége nem az istenek szeszélyeinek, hanem az ércek alkotóelemeinek függvénye, a kémikusok tudatosan törekedtek arra, hogy meghatározzák, mely anyagokból és pontosan mennyit tartalmaz a kibányászott nyersanyag. Ezzel pedig kezdetét vette a minőségi és mennyiségi elemzés (idegen eredetű szóhasználat a kvalitatív és a kvantitatív analitika) máig vezető diadalútja. Nem véletlen, hogy *Torben Bergman* és *Jöns Jakob Berzelius* munkássága nyomán éppen Svédország lett ennek egyik korai fellelvára, hiszen a svédacél kitűnő minőségét már akkor is biztosítani kellett.

S persze természetesen életbevágóan fontosak lettek a megbízható analitikai módszerek a nemesfémek és a nemesfémércek összetételének elemzésekor is. Emiatt a Selmecbányai Bányatiszti Akadémia laboratóriumi gyakorlati képzései a XVIII. században világhírűek

voltak, így például a Párizsban később bevezetett oktatási módszerek mintájául is ezek szolgáltak. Ennek oka az volt, hogy Magyarország évszázadokon át vezető szerepet töltött be az európai nemesfém-bányászatban. Például a XIII. században a kontinensen termelt arany öthatodát, az ezüst egynegyedét adta az országnak ([http://hu.wikipedia.org/wiki/Selmeci Akad%C3%A9mia](http://hu.wikipedia.org/wiki/Selmeci_Akad%C3%A9mia)). Ez természetesen óriási és állandó bevételt biztosított a mindenkori uralkodóknak. A bányák kimerülésével azonban egyre mélyebbről és egyre kisebb nemesfém-tartalmú érceket kellett feldolgozni, s így az analitika szerepe egyre nőtt. Ezzel együtt egyre fontosabbá vált a megfelelő szakemberképzés is. Ezért lett az első állami (és nem egyházi) alapítású oktatási intézmény a fent említett Akadémia elődjeként létrejött bányatisztképző iskola.

Érdekes még, hogy egyes fémek éppen a középkori bányászok által hasznosnak ítélt fémekkel való együttes előfordulásuk miatt kapták a nevüket. Balázs Lóránt például több ezzel kapcsolatos történetet is leír „A kémia története I-II.” c. alapművében (Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.). Ezek szerint például a nikkell (*Kupfernickel* = „rézördög”), a kobalt (gonosz bányamánók – koboldok) és a volfrám (*Wolfram* = „farkasnyál”) neve is a Szász Érchegység völgyeiben dolgozó bányászok szitkozódásaiból született. Hiszen ezek a számunkra már sok hasznot hajtó fémek akkoriban mind csak akadályozták a középkori kohászok munkáját...

Más jellegű probléma volt, hogy az acél iránti igény növekedésével és Európa érdeinek egyéb okokból is bekövetkező fogyásával, a fa és vele együtt a belőle előállított faszén a XVII. századra hiánycikké vált. Ráadásul a faszén (mint azt saját, kerti grillezésekkor gyűjtött tapasztalataink alapján is tudjuk) igen könnyen porlik. Ebből kifolyólag nem lehetett a kohók méretével növelni a termelést, hiszen a faszén összeroskadt a vele összekevert vasérc súlyától. A porszerű, tömör szénrétegbe pedig nem tudott bejutni a levegő (az oxigén), így leállt az égés. A megoldás végül (mint tudjuk) az akkorra már fűtési célokra nagy léptékben bányászott kőszén kokszosítása (vagyis levegőtől elzárva történő hevítése) lett. Erre főként azért volt szükség, mert az egyszerű, nem elég jó minőségű kőszén kén- és foszfortartalma különben tönkre tette a nyersvasat.

A fentiekben a „hasznos” fémek előállításáról beszéltünk, s viszonylag kevés szó esett a csillogó, és a mai napig rendkívül értékes nemesfémről, az aranyról. Pedig évezredek óta keresztlél az emberiség az aranycsinálás, vagyis az alkímia bűvöletében. A kémia történetének első két évezredét jórészt a lelkiismeretes mesteremberek, alávaló csalók, valamint az egyébként nagy tiszteletnek örvendő tudósok és egyházi személyek azon törekvése határozta meg, hogy ezt a hön áhitott halványsárga anyagot (meg az örök életet adó Élet Vizét) előállítsák. Pedig akkor még nem létezett a mai elektronikai ipar a maga mobiltelefonjaival és egyéb miniatűr eszközeivel, ezért nemigen lehetett az aranyat semmi hasznos dologra használni. Csak a belőle készült tárgyak szépsége, esztétikuma, továbbá időállósága és viszonylagos ritkasága tette kívánatosá mindenki szemében. Puhasága és jó megmunkálhatósága miatt pedig (a szintén tetszetős és ritka gyémánttal ellentétben) könnyen lehetett igen kis darabokat is felhasználni belőle fizetőeszközként. Ezért aztán az ókor és a középkor alkímistái (és alkalmazói, a világ akkori hatalmasai) oly sok keserű csalódás és ezer meg ezer sikertelen kísérlet után se adták föl az arany előállításához szükségesnek gondolt Bölcsék Kövének keresését. Közülük a minden tapasztalatot becsületesen és módszeresen lejegyzők állhatatos munkája nyomán óriási mennyiségű ismeretanyag gyűlt össze, amely az új kor hajnalán már csak a nagy rendszerezők (pl. *Antoine Lavoisier*, a fentebb már említett *Jöns Jakob Berzelius* és *Dimitrij Ivanovics Mengyelejev*) szabályszerűségeket felismerő tevékenységére várt ahhoz, hogy a kémia értékes, az emberiség életminőségét javító tudománnyá fejlődhesen. Ma már mosolygunk az alkímisták hitén és misztikus hókuszpókuszain, de gondoljuk meg: ők nem tudhatták, hogy az

elemek minőségét az atommagjaikban lévő protonok száma határozza meg, s ennek megváltoztatása pedig csak magreakciókkal lehetséges (sőt természetesen még az atomok létezéséről sem tudtak). A magreakciókhoz viszont olyan nagyságrendű energiaváltozások szükségesek, amelyeket egyszerű laboratóriumi körülmények között nem, csak atomreaktorokban lehet létrehozni. Ezekben persze ma már tényleg tudnánk aranyat előállítani (egyes tudósok meg is tették kísérletképpen), de ennek költsége a bányászott arany árának sokszorososa, ezért az atomerőműveket erre semmiképp se érdemes használni. Elődeink, a nagy alkímisták és kémikusok, bármilyen okosak is voltak, nem tudhatták, hogy a kémiai reakciók jó közelítéssel csak az atomok külső elektronjainak játékaként, a közöttük lévő kötések felbomlásaként és új kötések kialakulásaként foghatók föl. Ezért egyetlen kémiai reakcióban sem változik meg a benne részt vevő atomok anyagi minősége (hiszen az sok-sok nagyságrenddel nagyobb energiát igényelne, mint ami egy kémiai reakció során „gazdát cserél”). Ebből persze az következik, hogy mára már teljes bizonyossággal tudjuk, ha bármely kémiai egyenlet egyik oldalán több van az adott atomból, mint a másik oldalon, akkor az még egészen biztosan nincs jól rendezve...

Végezetül pedig térjünk vissza a speciális tulajdonságú fémek, ill. fémötvözetek témájához. Ezeket egyre növekvő számban és számtalan célra használjuk. A könnyűeket járművekhez, a kémiai reakciókat meggyorsítókat katalizátorként, a változtatható ellenállásúakat vagy jó vezetőket elektromos berendezésekben, a rendkívül keményeket pedig hihetetlen teljesítményre képes szerszámokban. Továbbá az ún. „intelligens fémeket” például a szív ereinek kitágítására (amiről már az első bekezdésben is szó esett). Ezek közül az „okos fémek” közül is nagyon sokféle létezik, de a legismertebb a nikkeltitán ötvözet, ami „*Nitinol*” névre hallgat. Ha az ilyen „emlékező fémek” alakját egy kritikus hőmérséklet fölött hozzájuk létre, akkor hiába változtatják meg a fém (ill. ötvözet) alakját a lehűtés után, az eredeti hőmérsékletre visszatérve újra fölveszi azt a formát, amit ezen a magasabb hőmérsékleten előzetesen kialakítottak. Tehát ha egy ilyen hosszú és vékony fémdarabot pont olyan spirállal tekernek fel testhőmérsékleten, amilyen a szív ereinek a belső átmérője, akkor lehűtve hosszú, egyenes dróttá húzhatják. Ilyen egyenes drót formájában az érben a megfelelő helyre juttatva, ott az majd fölveszi a testhőmérsékleten előzetesen

kialakított spirális alakját
(<http://www.kfki.hu/chemonet/hun/olvaso/kemia/intell.html>). Mindez annak köszönhető, hogy az ilyen fémek atomjai a hőmérséklet-változás által okozott szerkezetváltozásokkor egyszerre, összehangoltan, egy irányba és egyenlő mértékben mozdulnak el, vagyis az összevisszaságot eredményező diffúzió nélkül képesek alakot váltani. (Úgy képzelhetjük ezt el, mintha egy paralelogramma csúcsait egyszerre tolnánk egy irányba, majd vissza. A működés szemléltetéséhez sok videofelvételt találhatunk a YouTube-on. Itt van például egy jó minőségű, angol nyelvű magyarázattal: <http://www.wired.com/wiredscience/2008/01/video-smart-met/>.)

E kis összefoglalóban is láttuk tehát, hogy az emberiség történelme során különböző célokból sok-sok fémeket és azok számtalan ötvözetét állította már elő, s az alkalmazások száma folytonosan növekszik. Néha kemény fém kell, néha lágy, egyszer magas, máskor pedig éppen alacsony olvadáspontú, kicsit vagy nagyon reakcióképes, nagy ellenállású vagy jó vezető, alkalmanként hatékony katalizátornak, esetleg kizárólag szépnak és tartósnak kell lenniük. A fémek pedig, ha eleget tudunk róluk, képletesen és valóságosan is meghajlanak az értelmes akarat előtt. Nem „okosak” vagy „buták”, nem jó vagy rosszindulatúak, egyszerűen nincs személyiségük. Azt és csak azt teszik, ami a kémiai természetükből fakad. Ezt pedig az évezredek tapasztalat alapján nekünk kell megismerni. Mégpedig azért, hogy aztán az embertársaink és saját magunk javára tudjuk az így megszerzett tudást fordítani.

Feladatok:

1. lépés: Válassz ki a fémötvözetek közül egyet, és próbáld megtudni a történetét, hogy ki, mikor, hogyan és miért állította elő először, s változott-e az előállításának módja az idők folyamán! **Gyűjtsd össze** az interneten, ill. nyomtatásban megjelent, róla beszerezhető információkat! Olyan fémötvözetet válassz, amelyikről könnyen és sok mindent megtudhatsz (tehát ne legyen például a pontos összetétele szabadalmi titok)! **Derítsd ki** a legfontosabb jellemzőit:

- a) Milyen kémiai összetevőket tartalmaz és milyen arányban?
- b) Van-e a kémiai összetevők közül fő komponens, és ha igen, akkor mi a többi összetevő szerepe?
- c) Körülbelül mennyit állítanak elő ebből az ötvözetből évente a világon és Magyarországon?
- d) Milyen tárgyak formájában találkozhatunk ezzel az ötvözetrel a mindennapi életben, ill. milyen célokra használja ezt az ipar?
- e) Szükség van-e az esetében korrózióvédelemre, és ha igen, akkor milyen módon, s mi ezen eljárások fizikai-, ill. kémiai alapja?
- e) Létezik-e hasonló célokra használt más ötvözet? Ha igen, akkor az mennyibe kerül és van-e előnye, ill. hátránya az alkalmazásának az általad vizsgálttal szemben?

2. lépés: Gondold végig, milyen általad korábban tanult vagy különböző forrásokból kideríthető kémiai és fizikai ismeretek vonatkoznak erre a témára! Elméleti és gyakorlati ismereteid alapján csoportosítsd az adott ötvözetéről szerzett információkat egy **összefoglalóban**! Ennek megszerkesztésekor használd a fentiekben (ld. 1. lépés) készített jegyzeteket!

3. lépés: Az összegyűjtött információk alapján **készítsd el** az adott ötvözet **történetéről** szóló, rövid (kb. 5-6 perces) **kiselőadás** vázlatát! Ki, mikor és hogyan fedezte fel? Mi az összetétele? Milyen kedvező és hátrányos tulajdonságai vannak? Mire használjuk és mennyibe kerül?

4. lépés: Nézz utána, hogyan, milyen analitikai módszerek használhatók az általad választott ötvözet pontos összetételének meghatározására! A kémia tanárod útmutatásai alapján, valamint internetes keresés és/vagy könyvtárzás segítségével **gyűjtsd össze**, hogy hányféle mérési technikát alkalmaztak a múltban, ill. alkalmaznak jelenleg a kémikusok erre! Foglald össze mindezen információkat egy könnyen áttekinthető **táblázatban**, amely az egyes mérési technikák igen rövid működési elvét is tartalmazza! Járj utána annak is, hogy mi ezeknek a technikáknak a kimutathatósági határa és írd be ezeket az adatokat is a táblázatba! **Gondold végig**, és a táblázatban feltüntetett előnyök és hátrányok segítségével magyarázd meg, milyen okai lehetnek annak, hogy az analitikusok nem mindig a legérzékenyebb, legalacsonyabb kimutatási határú módszereket alkalmazzák!

5. lépés: Oldd meg az alábbi, fémekkel kapcsolatos **feladatokat**!

A fémekhez kapcsolódó kémiai gyakorló feladatok

1. feladat:

„A mobiltelefonok és hordozható számítógépek után az autóipart is meghódíthatja az akkumulátorokban használt ezüstfehér fém, a lítium.” – adta hírül 2009. június 20.-i

számának 75. oldalán a HVG. „A kőzetekből, illetve sós tavak vizéből nyert lítium előretörését fékezheti ugyanakkor, hogy nem tudni, akad-e elég belőle a várhatóan hatalmas igények kielégítésére.” – olvasható a cikk egy másik bekezdésében. Az illusztrációként szolgáló fényképen fehér kristályos anyaggal kevert homokkupacok láthatók, és a képaláírásban a „Lítiummező Bolíviában” kifejezés szerepel.

a) Miért készíthető más fémekhez viszonyítva nagy elektromotoros erővel jellemezhető áramforrás a lítium alkalmazásával? Állításodat számszerű összehasonlítással is indokold és részletesen magyarázd meg!

b) Elemként vagy vegyületként fordul-e elő a lítium a természetben? Miért? Hogyan lehetne pontosítani a fent idézett képaláírást?

c) A természetben előforduló lítium nem alkalmas a fenti áramforrások gyártására. Milyen formában használható fel, és miért van ez így? Mi mindent kell tenni a „lítiummezőn” talált anyaggal, hogy ténylegesen felhasználható legyen az áramforrásokban? Írd le röviden a tisztítási folyamat és a gyártás elvét, de szabályos néven nevezve a részfolyamatok minden egyes lépését!

2. feladat: Egy nátrium-kálium ötvözet 3,26 grammját 1,00 dm³ vízben oldva 1225 cm³ standard- standard nyomású és 25 °C hőmérsékletű hidrogéngáz fejlődik. Számold ki az ötvözet tömegszázalékos és anyagmennyiség-százalékos összetételét! $V_m = 24,5 \text{ dm}^3/\text{mol}$; $A_r(\text{Na})=23,0$; $A_r(\text{K})=39,1$

3.feladat: Egy alumíniumot, rezet és magnéziumot tartalmazó ötvözet 2,390 grammját sósavban oldva 1,96 dm³; nátrium-hidroxid-oldatban oldva pedig 0,735 dm³ standard nyomású és 25 °C hőmérsékletű hidrogéngáz fejlődik. (Minden szobahőmérsékleten lehetséges reakció teljes egészében lejátszódik.) Számítsd ki az ötvözet tömegszázalékos és anyagmennyiség-százalékos összetételét! $V_m = 24,5 \text{ dm}^3/\text{mol}$; $A_r(\text{Al}) = 27,0$; $A_r(\text{Cu}) = 63,5$; $A_r(\text{Mg})=24,3$

4. feladat: A káliumnak 24 ismert izotópja létezik, de a természetben csak három izotópja fordul elő, a következő tömegszázalékos összetételben: $w(^{39}\text{K}) = 92,97\%$, $w(^{40}\text{K}) = 0,01\%$ és $w(^{41}\text{K}) = 7,02\%$. Mennyi a kálium relatív atomtömege?

„Kiegyensúlyozott” véleményalkotás

Problémafelvetés:

– *Most akkor lúgosítsak vagy ne lúgosítsak?* – teheti fel magának a látszólag egyszerű eldöntendő kérdést az egyszeri honpolgár, akinek sikerült eddigi tanulmányait megalapozott természettudományos műveltség és gondolkodásmód elsajátítása nélkül megúsznia. A tanácsstalanságának oka egyik oldalról a médiában és minden elképzelhető reklámfelületen elhelyezett, lúgosító hatású tablettákat, vizet, ill. utóbbi előállításra alkalmas víztisztító készülékeket népszerűsítő reklámok áradata. Mindezek nagy lelki nyomást fejtenek ki rá azon állítás hangoztatásával, hogy testünk savassága (szinte) minden betegség alapja. Így (a formális logika szabályai szerint) ezek elkerülésének vagy gyógyításának érdekében a szervezetünket „lúgosítani” kell. Ez tiszta ábrának tűnik, hiszen még általános iskolai tanulmányainkból ismerősen cseng, hogy a savakat a lúgok semlegesíteni tudják. Ha pedig a savasság a probléma (ennek változatos, de mindenképp súlyos és elrettentő hatású következményeit az egyes reklámok hosszan ecsetelik), akkor lúgosítsunk, és máris megoldódik!

Másfelől azonban emberünk feltehetően nyitott szemmel jár a világban. Saját, ill. mások kárán (remélhetőleg) azt már megtanulta, hogy az utóbbi évtizedekben gombamód szaporodó, ilyesmi termékeket árusító cégecskék megjelenésének és gyors gazdagodásának legjobb táptalaja az emberi tudatlanság és hiszékenysége. Ezért (bár a téma kémiai és biológiai alapjaihoz kicsit sem ért), a józan esze és jól fejlett szkepticizmusa azt súgja neki, hogy ha egy ilyen csábítóan egyszerűnek tűnő megoldásért súlyos ezreket vagy tízezreket kell fizetnie, akkor lehet, hogy tulajdonképpen átvágásról és „pénzlehúzás” akcióról van szó, amelynek egyetlen igazi célja a terméket áruló cég tulajdonosainak könnyű és gyors meggazdagodása. Most akkor mit tegyen? Megbetegedni nem szeretne, de csalók áldozata sem akar lenni. A válasz kereséséről (is) szól ez a projekt.

Ennek a témának a kapcsán ugyanis arra látunk majd példákat, hogyan alkalmazhatók a kémia órán az egyensúlyokról (ezen belül is elsősorban a sav-bázis egyensúlyokról) és az egyensúlyok eltolásáról tanult ismeretek a mindennapi életben, pl. az áltudományos téveszmék leleplezésére és megcáfolására. Ezen kívül a projekt feladatainak megoldásakor szükség lesz a kémiában és biológiában a témakörökben tanultak együttes alkalmazására (azaz integrálására) is, hiszen a projekt során gyakran éppen a két tudomány határterületén mozgunk. A bevezető szöveg nem tekinti feladatának a kémiai egyensúlyokról tanult ismeretek összefoglalását, hiszen ez minden olyan tankönyvben megtalálható, ami a témával foglalkozik, és onnan megtanulható, ill. átismételhető.

Először vizsgáljuk meg közelebbről az alábbi, interneten talált idézeteket. (A fájlban szereplő honlapok utolsó látogatásának időpontja minden esetben 2011. ápr. 9. Minden dőlt betűs szövegrészlet a megadott linkeken található weboldalakról szó szerint kimásolt idézet, tehát az összes szakmai, helyesírási és stilisztikai hibát is tartalmazza. Erre annak illusztrálásához van szükség, hogy milyen fokú dilettantizmussal találja magát szemben időnként az interneten gyanútlanul keresgélő ember.)

Itt van például egy cég reklámszövegének egyik olyan részlete, ami a vásárló meggyőzését célozza:

(<http://termeszetsvitamin.com/hirlevelek/vizionizalo?gclid=CIfxqNTCj6gCFRWazAodPwRbDA>)

„Ha még nem hallott a savtalanításról, vagyis a lúgosítás fontosságáról, akkor tudnia kell, hogy a szervezet sav-bázis egyensúlyának felborulása felel a betegségek kialakulásáért. Ezért az első lépés az egészség megőrzéséhez, esetleg visszaszerzéséhez, a sav-bázis egyen-

súly helyreállítása. Ebben a folyamatban lesz segítségére a tiszta ionizált lúgos víz fogyasztása. Az Aquarion vízionizáló egy olyan víztisztító készülék, amely ionizált, oxigén dús, nehézfémektől és mindenfajta mérgező anyagoktól mentes, ultraszűrt, lúgos vizet állít elő.

A fenti sorok olvasásakor komoly bizalomkeltő hatása lehet a „sav-bázis egyensúly” szóösszetételnek. Ugyanis lehet, hogy sokaknak felrémlik: középiskolában már nemcsak úgy általában a savakról és bázisokról volt szó, hanem arról is, hogy közülük egyesek (a „gyenge savak és bázisok”) „egyensúlyra vezető” reakciókban is részt vehetnek (vagyis olyan reakciókban, amelyekben az oda- és visszaalakulás lehetősége az adott körülmények között egyaránt fennáll és beállhat a kémiai egyensúly). Tehát sav-bázis egyensúlyok esetén a H_3O^+ és a OH^- egyensúlyi rendszert alkot. Másrészt hétköznapi szóhasználatban elfogadható kijelentésnek tűnik, hogy a szervezetet „egyensúlyban kell tartani”, hiszen tudjuk, hogy egészségünk és erőnlétünk megőrzéséhez rendszeres anyagbevitelre és kiválasztásra van szükség. (Persze, valójában itt csak látszólagos egyensúlyról, ún. „homeosztázisról” van szó, mivel testünk a fogantatásunk pillanatától folyton változik. Erről magunk is könnyen meggyőződhetünk, ha egy saját kisgyermekkorú fényképünket összehasonlítjuk a jelenlegi tükörképünkkel.)

Ha azonban egy kicsit elgondolkodunk az első mondat végén, akkor azért az már gyanús, hogy nemes egyszerűséggel „a betegségek kialakulásáért” felelős a sav-bázis egyensúly felborulása. Biztos, hogy nincs más tényező, ami miatt betegségek alakulhatnak ki? Hiszen mindenki hallott már például a rákbetegség kialakulásának veszélyét magában hordozó genetikai mutációkról, amelyek bizonyos „rákkeltő” (azaz karcinogén) anyagok vagy egyes sugárzásfajták hatására jönnek létre. Máskor meg mintha azt mondta volna valaki, hogy a „túlzott sóbevitel” magas vérnyomást okozhat, a kalciumszegény étrend csontritkuláshoz vezethet, a C-vitamin hiány meg skorbuthoz és így tovább. Nyilvánvaló, hogy szervezetünkben szinte elképzelhetetlenül sokféle folyamat zajlik egymással párhuzamosan. A fennakadás nélküli „ügymenethez” (vagyis a látszólagos egyensúlyi állapot fenntartásához) ezért nagyon-nagyon sokféle anyag legalább közelítőleg helyes arányban való bevitelére van szükség, tehát nem csak a „sav-bázis egyensúlyra” kell ügyelnünk. Ezért minden józan ítélőképességű és logikusan gondolkodó embernek gyanús kell legyen egy ilyen mondat, ami már önmagában is megkérdőjelezi írója szakmai hozzáértését és hitelességét. (Nem is beszélve az idézetben lévő, és szándékosan nem javított helyesírási hibákról.)

Némi kémia- és fizikatudás birtokában pedig elgondolkodhatunk azon, hogyan is lehetne a víz „ionizált”. Az ivóvíz elektrolízise minden hozzáadott anyag nélkül problematikus, mert viszonylag kis oldottanyag-tartalma miatt nem vezeti jól az elektromos áramot. Azonban tételezzük fel, hogy ennek ellenére megpróbáljuk elektrolizálni. E folyamat során egyenlő mennyiségben keletkeznek a víz saját ionjai. Azaz ugyanannyi (a „savasságot növelő”) oxóniumion jön létre az anódon, mint amennyi hidroxidion a katódon. Ugyanis (mivel a víz kifelé nem mutat töltést), érvényesülnie kell az elektroneutralitás elvének. Ezek az ionok, ha a fogyasztáskor összekeverednek, akkor „a víz autoprotolízise”-ként ismert folyamatban újra vízzé egyesülnek, mivel ekkor ismét beáll az aktuális egyensúly a hidroxóniumionok, a hidroxidionok és a vízmolekulák között. Tehát az így fogyasztott vízben nem lesz a hidroxidionból több mint eredetileg volt. Ha a készülék csak a katódtérben keletkező, valóban lúgos kémhatású vizes oldatot ajánlja fel fogyasztásra, az sem nevezhető „ionizáltnak”, hiszen jelen vannak benne a hidroxidionok töltését semlegesítő, a vízben oldott sókból származó kationok. Meglehet, a nagyobb hatás érdekében a fenti szöveg a levegő ionizátor feltételezett áldásos hatásaival szerette volna felruházni a cég

által árult készüléket is. A levegő ionizátor ugyanis valóban egy nagyon kicsi negatív iontöbbletet juttat a körülötte lévő gázba, de semmiképp sem vizes oldatba! (Más kérdés, hogy a levegő ionizátor hatásainak külön alapos vizsgálat tárgyát kellene képezniük.)

Az „oxigén dús” (sic!) kifejezésre nem is érdemes sok szót pocsékolni, mert Riedel Miklós, az ELTE Fizikai Kémia Intézetének tudományos főmunkatársa már többször és több fórumon elmagyarázta, hogy ebben az esetben miért egyszerű átverésről van szó (pl. http://index.hu/tudomany/2011/01/12/atveres_az_oxigenes_viz/). Az oxigén (mint afféle apoláris molekulákból álló gáz) fizikailag csak igen rosszul oldódik a poláris vízben (kémiailag pedig egyáltalán nem reagál vele). Az oldódás fizikai egyensúlyra vezető folyamat. A csak igen kicsi oldott oxigénmennyiséget biztosító egyensúly még a nagy oxigén túlnyomással való dúsítás befejezése után is gyorsan újra beáll, és így az adott hőmérsékleten, ill. nyomáson „főlősleges” oxigén egyszerűen kibuborékol a vízből. Nem is beszélve arról, hogy az oxigén felvételére kifejlesztett szervünk nem a gyomor, hanem a tüdő. Ezért sajnos az az egyetlen igazán hatásos eljárás, ha szervezetünk oxigénfelvételét a kiadós testmozgás során megszorozzuk lélegzetvétellel növeljük. Tény, hogy ez jóval kellemetlenebb és bonyolultabb megoldás, mint lehajtani néhány pohár vizet, de hát az élet már csak ilyen...

A „nehézfémektől és mindenfajta mérgező anyagoktól mentes, ultraszűrt” kifejezésen viszont megint érdemes elgondolkodni. Tegyük fel, hogy egy adott porusméretű berendezés tényleg ki tud szűrni bizonyos nagyságú oldott részecskéket. Mi azonban nem akarunk eltüntetni minden oldott anyagot. Hiszen köztudott, hogy az ivóvízben a testünk normális működéséhez szükséges ionok vannak. Másrészt pedig desztillált vizet fogyasztani nagy butaság lenne, mivel az megbontaná a testünk ozmotikus egyensúlyát, és ha elég sokat innánk belőle, akkor úgy pukkadnának ki a sejtjeink, mint ahogy a cseresznyék repednek meg a sok esőtől. Rajta tehát, gyorsan nézzünk akkor utána például a szervezet számára közzismerten fontos káliumion, valamint néhány (szintén köztudottan) mérgező nehézfémion méretének, és vessük össze az ionrádiuszait! Az atomok és ionok méretéről úgyis tanultunk már a középiskola első évfolyamán:

(<http://www.tankonyvtar.hu/geologia/asvanynevtar-fuggelek-080904-2>)

K^+ : 0,133 nm; Pb^{2+} : 0,120 nm; Hg^{2+} : 0,110 nm; Cd^{2+} : 0,097 nm

Vagyis egy olyan „ultraszűrő”, amely az utóbbi három (valóban mérgező) nehézfémiont kiszűrné, a (többek között az idegpályákon továbbított ingerület vezetésében) igen fontos szerepet játszó káliumiont is eltávolítaná a vízből (s vele együtt még egy csomó más, a szervezet homeosztázisának fenntartásához nélkülözhetetlen ion). Arról nem is beszélve, hogy vízminősítési szabványaink szerencsére egyáltalán nem engedélyezik nehézfémionok jelenlétét az ivóvízben, ezért az illetékes hatóságok folyamatosan és nagyon gondosan ellenőrzik is ezt (<http://www.dtvrt.hu/index.php?lang=hu&aaz=1113&faz=4>).

Más cégek nem keverednek ilyen zavaros magyarázatokba, hanem egyszerűen pszichés trükkökkel (alkalminak beállított vételárral és extrának feltüntetett szolgáltatással) csábítják

a

vevőket

(http://www.aquaenergy.hu/?gclid=COPYhK_Bj6gCFYeVzAod_0agDA):

„ionizált LÚGOS VÍZ 1,5 literes palackos és 19 literes kiszolgálásban - AKCIÓS ÁR, HÁZHOZ SZÁLLÍTÁS”. (Telefonszám és e-mail cím a honlapon. Érdemes figyelni a csupa nagybetűs kiemelésekre.)

A kémiai alapfogalmakat ismerők számára különleges csemegék találhatók még a magukat szakértőnek feltüntetők által működtetett honlapokon is. Például „dr. Balaicza Erika” (akiről persze a doktori cím miatt sokan automatikusan feltételezik, hogy orvos) aláírással

olvasható a következő szöveg:
(http://www.informed.hu/etmod/dieta/reformkonyha/?article_id=44158&prk=73307532)

„Létezik egy olyan technológia, mellyel egészen pontosan meg lehet határozni a vérből, vizeletből és nyálból a pH-t, a testnedvek elektron- és iontartalmát.”

A hozzáértők tudják, hogy pH mérésére valóban létezik (a potenciometria elvén működő) pH-mérő készülék. Sőt, hasonló elven alapulnak a bizonyos ionszelektív elektródok alkalmazásával működtetett, és a kérdéses ionok koncentrációjának meghatározására alkalmas műszerek is. Azonban a testfolyadékokban nagyon sokféle oldott ion van. Ezért gyakorlatilag lehetetlen a koncentrációjukat egyesével megmérni. Lehet, hogy a szerző a vezetőképesség meghatározására gondolt? Akkor miért nem azt írja?

Továbbá nem kerülhetjük meg azt a kérdést sem, hogy vajon hogyan tudnánk meghatározni az említett testfolyadékok „elektromtartalmát”. Az összes „elektromtartalom” kiszámításához minden bennünk lévő molekulafajtát, egyszerű, összetett és komplexiont, valamint azok pontos számát, ill. az ezeket alkotó atomok anyagi minőségét és számát is ismerni kellene. Mivel elképesztően sokféle és bonyolult összetételű vegyületről van szó, ezekre még igen durva becslést is nagyon nehezen lehetne tenni. Az pedig szakember számára elképzelhetetlen, hogyan is lehetne megmérni az egyes, fent említett részecskékben kötött „elektromtartalmat”. „Szabad elektromtartalom” (azaz olyan elektronok, amelyek a fémeket vezetőkké teszik) viszont vizes oldatokban egyáltalán nincs. Más kérdés, hogy az is felfoghatatlan, vajon miért lenne szükség a vér, a nyál és a vizelet esetében bármelyikféle „elektromtartalom” ismeretére, és hogy mi köze lenne ennek a szervezet „sav-bázis egyensúlyához”. Hiszen a világon mindenféle, közönséges körülmények között létező atomban, ionban és molekulában vannak elektronok... S milyen érdekes, hogy a fenti írás egyetlen irodalmi hivatkozása egy életmódmagazinnal megjelent saját cikk (Balaicza, E.; Ideál - Reforméletmód magazin 2003;15(5):46-47 Celsus Kft. 2003-04-30 22:53:04).

Sajnos igen veszélyes embercsoportot alkotnak a természetgyógyászat jószándékú, ám minden tényleges szakmai hozzáértést nélkülöző önjelölt profétái is. Ők feltehetőleg nem haszonszerzés miatt terjesztik a valótlanosságokat, hanem azért, mert tudatlanságuk miatt ki vannak szolgáltatva a kóklerek kampányainak, s ezért szent meggyőződéssel hisznek ezekben a „tanokban”. Lássunk egy, a „természetes életmódot” propagáló honlapról vett idézetet

(http://www.termeszeteseletmod.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=197:a-ver-es-a-lugositas&catid=43:betegsegek-okai-es-tuenetei&Itemid=87):

„Minden ember számára mond valamit az, hogy a testhőmérsékletünk 37 fokok. Tudja, ha már felmegy 39 fokra, akkor már nagyon rossz valakinek a közérzete, nem is beszélve a 40 fokról. Ideje ugyan így viszonylunkunk vérünk pH értékéhez is. A vér pH értéke Dr. Young nagyon pontosan megmérte: 37.365 (nagyon enyhén lúgos). Ezt a pH értéket tanulnunk kell.”

Tekintsünk el most (az egyébként a szerző általános műveltségéről, ill. inkább műveletlenségéről árulkodó) helyesírási és stilisztikai hibáktól, valamint a kisebb szakmai pontatlanságoktól (hiszen ki lehet találni, hogy a Celsius-fokra gondol a szöveg írója, amikor egyszerűen „fok”-ot emleget)! Ekkor az hámozható ki a szövegből, hogy a szerző egy közismert konkrét példával igyekszik magyarázni a homeosztázis általános alapelvét. (Persze, a 37,0 °C testhőmérséklet már hőemelkedésnek számít, de ne kukacoskodjunk!) A baj csak az, hogy ezt a nagyon fontos elvet saját maga egyáltalán nem érti. Ez éppen abból tűnik ki, hogy szerinte „Dr. Young” (akinek doktori címe és külföldi mivolta jótékonyan növeli az iránta táplált bizalmat – már ha egyáltalán létezik vagy valaha létezett ez az

illető, és foglalkozott a vér pH-jának meghatározásával) „*nagyon pontosan megmérte*”. A homeosztázis elvéből viszont éppen az következik, hogy az egészséges, nyugalmi állapotban lévő, mindenféle szempontból „átlagosnak” tekinthető emberi szervezetben (ami körülbelül olyan absztrakció, mint az „ideális gáz”) is rengeteg folyamat zajlik egyszerre. Mindezek eredőjeként viszont a különféle ionok és molekulák koncentrációja viszonylag keskeny tartományban mozog egy „kvázi egyensúlyinak” tekinthető érték körül, de semmiképp sem állandó! Az angol nyelvű Wikipedia állítása szerint az ezért felelős szabályozó mechanizmusok a vér pH-ját általában a 7,35-7,45 értékek között tartják (http://en.wikipedia.org/wiki/Blood#cite_note-ReferenceA-8). Ennek az állításnak az alátámasztására a Wikipedia a következő két irodalmat idézi:

- Waugh, Anne; Grant, Allison (2007). "2". *Anatomy and Physiology in Health and Illness* (Tenth ed.). Churchill Livingstone Elsevier. pp. 22. ISBN 978 0 443 10102 1. *Acid-Base Regulation and Disorders* at Merck Manual of Diagnosis and Therapy Professional Edition

Az első egy anatómiakönyv tizedik (tehát valószínűleg már sokszor javított és átdolgozott) kiadása, amelynek esetében a szabályosan feltüntetett kiadón, a kiadás évén és a pontos oldalszámon kívül a könyv ISBN száma is szerepel, ami alapján a könyvet meg lehet találni. Joggal számíthatunk tehát rá, hogy az információ hiteles forrásáról van szó. A másik irodalom egy világcég által az interneten közzétett kézikönyv egyik weboldala, amelyen egyértelműen szerepel, ki és mikor ellenőrizte, ill. módosította az oldal tartalmát. Feltételezhető, hogy ezt a kézikönyvet sokan használják. Így ha érkeztek volna fontos kifogások az oldal tartalmával kapcsolatban, akkor a szöveget már javították volna, hiszen egy ilyen nagy múltú cégnek a hitelesség és a vásárlói bizalom megőrzése érdekében adnia kell a jó hírnevére.

Mindebből tehát levonhatjuk azt a következtetést, hogy a mért pH-értékek semmiképp sem lehetnek egyformák a különböző emberi szervezetekben, sőt még azonos szervezet különböző állapotaiban sem! Így az a kijelentés, hogy valaki „*nagyon pontosan*” megmérte a vér pH-ját (csak úgy, általában) természettudományos szempontból értelmetlen. Nem is beszélve magáról a szövegben feltüntetett értékről, ami jóindulatú feltételezés szerint lehet egy gépelési hiba (de akkor miért nem olvasta át az írományát a „gondos” szerző?!), vagy pedig egyszerűen a „tanulmány” írója által az emberi szervezet számára ideálisnak tekintett testhőmérséklet és pH-érték összevonásából származik... Néhány mondattal később viszont ugyanebben a szövegben ez a szám szerepel: „*A vér védekező mechanizmusa az, hogy lúgos ásványi anyagokat von ki a szövetekből, hogy az enyhén lúgos (9,365) pH értéke megmaradjon.*” Ebből már teljesen egyértelmű, hogy az illetőnek sajnos fogalma sincs róla, hogy miről beszél. Ezért az épületes értekezés további elemzését helyhiány miatt nem folytatjuk, de elrettentő példaként ajánljuk mindenki figyelmébe.

Az önjelölt „szakértők” és a természetgyógyászat népszerűsítői sajnos legjobb szándékaik ellenére is komoly károkat tudnak okozni az általuk félig-meddig megértett, vagy éppenséggel teljesen félreértelmezett természettudományos magyarázatokon alapuló, esetleg önállóan kitalált és ezért légből kapott „jó tanácsaikkal”. Nézzük az alábbi idézetet (az eredeti gépelési hibák megőrzésével): (<http://cotcot.hu/cikk/2008/07/24/hogyan-csinald-lugositas>)

„Természetesen

Egy nagyon bölcs ember azt mondta: "Legyen táplálékunk olyan természetes, amilyen csak lehet." Tehát kerüljük a tartósított kajákat, a konzervált eledeleket. Leginkább azt együk, ami természetesen létezik. A legegyszerűbb, ha sorolom:

Savasító ételek, tehát kerül!

Kenyér és gabona: rizs, kenyér, kukoricapehely, tésztafélék tojással, tésztafélék tojás nélkül, grahamkenyér, tojás, zabpehely. Tejtermékek: tejszín, joghurt, lágy sajt, zsíros túró, camembert, kemény sajt, ömlesztett sajt. Magvak: mogyorókrém, földimogyoró, pisztácia. Húsok: sertéshús, kacs, tyúkhús, borjúhús, pulykahús, májas hurka, pisztráng, szalámi, liba, sertésmáj. És akkor az édességek: kristálycukor, keserű csokoládé, jégkrém, tejcsokoládé, teasütemény. És sajnos vannak olyan zöldségek is, amik savasítanak: zöldborsó, lencse, bab.

Kánaán a testnek

Akkor jöjjenek a lúgosító ételek, szépen sorban. Zöldek: spenót, petrezselyem, kelkáposzta, karalábé, metélőhagyma, zeller, sárgarépa, cukkini, kelbimbó, burgonya, karfiol, hónapos retek, padlizsán, paradicsom, zöldbab, fejes saláta, kínai kel, fokhagyma, vöröshagyma, gomba, zöldpaprika, brokkoli, uborka. Husi: hering, tőkehal, édesvízi halak és mindenféle tengeri herkentyű. Gyümölcsöt minden mennyiségben, fel sem sorolom, annyit mondok, hogy a legjobban a banán lúgosít. Persze, hogy ehetsz édességet: dzsemet, lekvárt, mogyorókrémet, és fagyit és mézet! Azért ezek a kaják finomak, és tényleg nem kell sanyargatni a szervezetet, mire lúgos lesz.

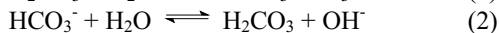
Segítség

Ha mindezt kevésnek ítéled, fogyassz lúgos vizet - ezt egyre több bioboltban beszerezheted, de interneten is rendelhetsz, s természetgyógyászhoz fordulva, de jó forrásból beszerezve a lúgosító port is fogyaszthatod.”

Azzal a kijelentéssel, hogy „Legyen táplálékunk olyan természetes, amilyen csak lehet.” első közelítésben még nagyjából egyet is érthetünk. (Bár szeretném leszögezni, hogy egy gyilkos galócából készült remek gombapaprikás is „természetes”.) A „savasítónak” kiáltott és emiatt elátkozott ételek között viszont meglepődve fedezzük fel (a rengeteg más, a szervezet számára általában nélkülözhetetlen anyag mellett) pl. sok E-vitamint és esszenciális aminosavakat is tartalmazó tojást, a csontépítéshez fontos kalciumionból nagy mennyiséget hordozó sajtokat, és így tovább, folytathatnánk a sort. Az pedig igazán izgalmas titok, hogy szegény mogyorókrém hogyan volt képes egyszerre bekerülni a „tiltott” és a „támogatott” kategóriába is. Továbbá az is érdekes, hogy a szerző sehol nem említi a zsíradékokat, amelyek metabolikus lebontásakor egyébként valóban sokféle gyenge sav keletkezik. S persze a végén még az író jó szándéka is megkérdőjeleződik. Hiszen meglehet, hogy a természetgyógyász, a „lúgosító víz” és a „lúgosító porok” ajánlása mégiscsak egyszerű reklámtevékenység (bár kétségtelen, hogy konkrét személyt, ill. márkát nem javasol az illető).

Az ilyen szerzők erőlködéseit tehát akár humorosnak is találhatnánk, ha nem okoznának komoly károkat. Ugyanis meglehet, hogy sok, a szöveg írójához hasonlóan egyszerű lélek elhiszi, amit ezen a weboldalon olvasott, és megpróbál ennek megfelelően élni, így fontos tápanyagoktól fosztva meg szervezetét. Testünk működéséről ugyanis az a legfontosabb hiteles információ, hogy egy elképzelhetetlenül összetett és bonyolult működésű rendszer. Az evolúciós fejlődés során a sikeres túlélési stratégiákat kialakító élőlények ugyanis a környezetükből érkező, igen sokféle hatást megtanultak ellensúlyozni. Így például az élő sejtek sokat emlegetett „sav-bázis egyensúlyát” egy elképesztően bonyolult sav-bázis puffrendszer tartja fenn. Működésének lényegét a vízzel szénsavvá reagáló szén-dioxid példáján viszonylag könnyű megérteni. A szénsav, mint gyenge sav és a (többek között az ivóvízből származó) hidrogénkarbonát-ion ugyanis önmagukban is pH-kiegyenlítő hatású sav-bázis puffert képeznek vizes oldatokban (tehát a sejtekben és a sejtnedvekben is). A szén-dioxidról pedig tudjuk, hogy a szervezetünkben folyó energiatermelő, lassú oxidációs folyamatok során folytonosan és nagy mennyiségben keletkezik. Tekintsük az alábbi két,

egyenként is egyensúlyban lévő, de egymással is összefüggő reakciót:



Ha ehhez a dinamikus egyensúlyban lévő rendszerhez némi savat adunk, akkor a Le Chatelier-Braun elv értelmében az (1) egyenlettel leírt savi disszociáció balra (a kiindulási anyagok irányába) tolódik el, hogy az oxóniumion koncentrációját csökkentse. A hidrogén-karbonát-ion (2) egyenlettel leírt hidrolízise viszont jobbra, a keletkező anyagok koncentrációjának növekedése irányába mozdul el (mivel az oxóniumionok reagálnak a hidroxidionokkal, s ezért csökkentik azok koncentrációját). Mindkét esetben közös, hogy sav hatására a hidrogén-karbonát-ionok egy része szénsavvá alakul át, így „elnyelve” a hozzáadott oxóniumionok egy részét. Ebből következőleg a pH változása sokkal kisebb lesz, mintha ugyanennyi, ugyanilyen anyagi minőségű és koncentrációjú savat ugyanakkora térfogatú desztillált vízbe öntöttünk volna, mint amennyi a pufferoldatunk. Könnyen belátható, hogy lúgos oldat hozzáadására viszont a fent leírtakkal éppen ellentétes irányú folyamatok zajlanának. Persze, a magyarázatot lehet bonyolítani azzal, hogy a szénsav valójában két lépésben disszociál (tehát a hidrogén-karbonát-ionok egy részéből karbonátionok keletkeznek), valamint hogy a szén-dioxid gáz fizikai oldódása is „egyensúlyra vezető” (fizikai) folyamat, amely a fizikailag oldott szén-dioxid koncentrációján keresztül szintén összefüggésben van a szénsav képződésével, s így a fenti reakciókkal is. Tehát az sem mindegy, milyen a szén-dioxid parciális nyomása a folyadék fölött. Azaz, ha a vérünk pH-járól van szó, akkor azt az is befolyásolja, hogy mikor vettünk utoljára lélegzetet... Ha ezt már értjük, akkor csak azt kell még elképzelni, hogy az ilyen pufferrendszerekből megszámlálhatatlanul sok működik az élő szervezetben egymás mellett és egymással összefüggésben. Hiszen ahányféle gyenge sav és sójának anionja, ill. gyenge bázis és sójának kationja, annyiféle sav-bázis puffer létezik az élő sejtben. Gyenge savakból és bázisokból pedig már csak azért is követhetetlenül sokféle van, mert például a fehérjék karboxilcsoportjai mind gyengén savasak, aminocsoportjai pedig mind gyengén bázisosak. Savi, ill. bázisos disszociációs állandóik nagysága pedig (egyenként!) attól is függ, hogy a fehérje mely részén, milyen kémiai környezetben fordulnak éppen elő. S akkor még nem beszéltünk a foszforsavakról, azok sóiról, ill. különféle származékairól, valamint sok-sok más (többségében számunkra még ismeretlen nevű) vegyület vizes közegben savként vagy bázisként viselkedő funkciós csoportjairól. Ha pedig mindezen komponenseket tartalmazó rendszer viselkedését próbáljuk meg elképzelni, akkor egy szédítő sebességgel, de nagyon kifinomultan reagáló, összetett sav-bázis pufferrendszerre kell gondolnunk, amely gondosan őrködik a sejtben normális körülmények között zajló folyamatokhoz szükséges optimális pH-értéken.

Természetesen, ha egész testünket huzamosabb időn keresztül kitesszük az egészségtelen (pl. stresszes, mozgásszegény) életmód, a káros szenvedélyek és a fölösleges „kalóriabevitel” okozta terhelésnek, akkor fennáll annak a veszélye, hogy a fent leírt sav-bázis pufferrendszer és a hozzá hasonló kiegyenlítő, javító mechanizmusok egy határ átlépése után ezt már nem viselik el. Ugyanis (ha példaként a „sav-bázis egyensúlynál” maradunk) a sav-bázis pufferek pH-ja is változik azért a sav vagy lúg hozzáadásának hatására. A változás mértéke pedig annál nagyobb, minél több hidroxóniumiont vagy hidroxidiont adtunk a rendszerhez. Ezért minél több savat vagy lúgot veszünk magunkhoz, ill. minél több keletkezik a pH értékét adott irányba befolyásoló anyagokból a sejteinkben, annál nehezebb ezt tolerálni a szervezetünknek. Túl sok sav vagy lúg hatására az is megtörténhet, hogy pl. a testnedvek pH-értéke tényleg kilép a még optimálisnak tekinthető tartományból, s így

hosszútávon valóban elkerülhetetlenek a tartós károsodások. (Ehhez tehát még látványos, akut mérgezési tüneteket okozó sav- vagy lúgmarásra sincs szükség!) Ilyenkor következnek be bizonyos betegségek, s szélsőséges esetben a korai halál. Ha viszont igyekszünk kiegyensúlyozottan táplálkozni, azaz mindenből arányosan, de épp csak eleget, és semmiből sem túl sokat fogyasztani (ami a magyar szokásokhoz képest azért jóval több friss gyümölcs és zöldség, ill. kevesebb zsiradék és szénhidrát „bevitelét” jelenti), valamint rendszeresen és eleget mozogni, nem dohányozni, nem használni kábítószereket; és alkoholt, ill. kávé is csak ritka alkalmanként és keveset venni magunkhoz (pl. csak baráti társaságban), akkor jó esélyeket biztosítunk magunknak a hosszú és egészséges életre. Nem vitás, hogy ez a megoldás kellemetlenül bonyolultabb, mint megvenni egy kis „lúgosító” vizet vagy port. Csak hát sajnós ez a valóban hatásos módszer.

Persze, azért a „lúgosításnak” is vannak hatásai. Ezek közül az első az, hogy vékonyabb lesz a pénztárcánk. A második az, hogy esetleg emésztési zavarokat sikerül előidézni azáltal, hogy nem szakavatott módon megpróbálunk belekontárkodni a szervezetünk működését szabályozó, igen összetett folyamatokba. Hiszen föltételezhető, hogy a „lúgosító” (azaz a normál ivóvíz átlagos pH-jánál nagyobb pH-jú) víz a gyomrunkba érve éppen az ételek emésztéséhez szükséges, sósavtartalmú gyomornedvvel fog reagálni, s így abból az optimális mennyiségnél kevesebb marad. Testünk természetesen megpróbálja majd „helyreállítani az egyensúlyt”, azaz még további gyomornedvet termel. Csak hát ez plusz energia- és anyagfelhasználást jelent, ami önmagában is fölöslegesen terheli a szervezetet. Ezt (az egyéni erőnlét és érzékenység függvényében) észrevehetjük vagy sem. Az azonban hosszútávon biztosan ki fog derülni, hogy semmivel sem lett jobb a közérzetünk és egészségesebbek sem lettünk a „lúgosítástól”. (Gyomorsavtúltengés esetén persze szükség lehet a fölösleges gyomorsav részbeni elreagáltatására. Ez azonban egy olyan betegség, amellyel orvoshoz kell fordulni!) Viszont mindenképpen gazdagabbak leszünk egy tapasztalattal. De nem lenne okosabb más kárán tanulni, vagy megpróbálni a saját fejünkkel gondolkozva „kiegyensúlyozottan” véleményt alkotni ahelyett, hogy mindent elhinnénk, amit olvasunk vagy hallunk? Erre kérnek és bíztatnak az alábbi feladatok is.

Feladatok:

1. lépés: Gyűjts össze az interneten, nyomtatásban, ill. boltokban vagy nagyobb áruházakban fellelhető információkat a jelenleg magyarországi kereskedelmi forgalomban kapható, különféle nyomelemek kationjait tartalmazó pezsgőtablettákról! **Derítsd ki** mindegyik általad megismert pezsgőtabletta legfontosabb jellemzőit:

- a) Milyen kémiai összetevőket tartalmaznak?
- b) Mekkora a gyártó által biztosított hatóanyagtartalmuk?
- c) Milyen szempontok alapján tudnád őket csoportosítani?
- d) Milyen kiszerezésben kaphatók és azok mennyibe kerülnek?

2. lépés: Gondold végig, milyen általad korábban tanult vagy különböző forrásokból kideríthető kémiai és biológiai ismeretek vonatkoznak erre a témára! **Gyűjts információkat** arra vonatkozóan is, hogyan viszonyul az egyes gyümölcsök és zöldségek nyomelem-összetétele és -tartalma az egyes pezsgőtablettákéhoz! **Számold ki**, hogy egy doboznyi, adott fajta pezsgőtabletta átlagos áráért mennyit lehetne vásárolni az ugyanazt a nyomelemet (az általad hitelesnek tekintett információk szerint) legnagyobb mennyiségben tartalmazó gyümölcsből, ill. zöldségből! Amennyiben találsz számszerű adatokat, számold ki azt is, hogy a kiszámított mennyiségű gyümölcs, ill. zöldség átlagosan körülbelül mennyit tartalmaz az adott nyomelemből! Továbbá sorolj fel minél több olyan összetevőt, ami

ebben az adott gyümölcsben vagy zöldségben az általad megismert források szerint még előfordul, és a szervezetünknek szüksége van rá! Csoportosítsd az így megszerzett információkat, ill. kiszámolt adatokat egy **táblázatban!** Ennek beküldésével elérhető **maximális pontszám: 20 pont.**

3.lépés: Válassz ki az általad megismert pezsgőtabletták közül **egy terméket.** Gondold végig, vajon miért pont pezsgőtabletta formájában hozzák ezt a hatóanyagot forgalomba. Vizsgáld meg a kiválasztott pezsgőtabletta összetételét, és próbáld meg kideríteni, mitől pezseg és milyen lesz a vizes oldat kémhatása a tablettá feloldása után, ill. hogy vajon függ-e a benne lévő hatóanyag oldhatósága a pH-tól. **Tervezz, és tanárod felügyelete mellett végezz el egyszerű kísérleteket,** amelyekkel a pezsgőtabletta **működését** és a feloldása után kapott oldat összetételét **modellezed!** A rendelkezésedre álló eszközökkel **határozd meg** a tablettá feloldása után a **kémhatást,** esetleg a pH közelítő értékét is. **Vizsgáld meg** azt is, hogy a kémhatás megváltoztatása okoz-e valamilyen látható változást az oldat összetételében. **Tapasztalataidat és mérési eredményeidet gondosan jegyezd fel!** **Magyarázatként** írd fel a végbemenő reakciók egyenleteit és minden egyéb, a fenti kérdések megválaszolása szempontjából fontos információt. **Számítógépes alkalmazások segítségével** rendszerezd egy **jegyzőkönyvben** a megtervezett és végrehajtott kísérlet leírását, a összes tapasztalatot és mérési adatot, valamint a hozzákapcsolódó magyarázatokat! Ennek beküldésével elérhető **maximális pontszám: 20 pont.**

4. lépés: Oldd meg az alábbi, kémiai egyensúlyokkal kapcsolatos **feladatokat!** A **megoldások** gondolatmenetét és a konkrét számításokat is írd le a beadandó fájlba! Ennek beküldésével elérhető **maximális pontszám: 60 pont.**

A kémiai egyensúlyokhoz kapcsolódó gyakorló feladatok

1. feladat:

A tejsav bizonyos szénhidrátok levegő kizárása mellett (vagyis anaerob körülmények között) történő lebontásával keletkezik az élő szervezetekben. Nevéhez híven valóban ez a vegyület okozza a tej savanyodását, mivel a tejcukor (laktóz) baktériumok által végrehajtott erjedési folyamatának (fermentációjának) egyik terméke (de például a kovászos uborka levében is megtalálható az abban zajló erjedés eredményeként). Tejsav keletkezik az izmokban is, ha ott hirtelen nagy mennyiségű energiára van szükség, például egy hosszas és intenzív testmozgás miatt. Ekkor ugyanis nem jut az izomsejtekbe a szőlőcukor (azaz glükóz) tökéletes (azaz szén-dioxiddá és vízzé történő) oxidációjához elegendő oxigén, mivel nem tudja azt elég gyorsan oda szállítani a vér. Az ilyen „anaerob” körülmények között, a tökéletes oxidációnál energetikailag sokkal kevésbé hatékony (a szervezet által csak „szükségmegoldásként” alkalmazott) folyamatban tejsav keletkezik. Ez másnapra kiadós izomlázat okoz, amely csak akkor szűnik meg, ha a tejsav távozik az izomszövetekből, ill. tovább bomlik (a most már elegendő oxigén jelenlétében). Ezt pedig a legjobban egy kis testmozgással segíthetjük elő (vagyis ebben az esetben valóban a „kutyaharapást szőrével” elv működik).

- Írd fel a tejsav konstitúciós szerkezeti képletét és a savi disszociációjának egyenletét!
- A „tejsav” nevű vegyületből kétféle is van. Rajzold föl mindkettő szerkezeti képletét úgy, hogy jól látható legyen az egyes atomcsoportok egymáshoz viszonyított térbeli elhelyezkedése közötti különbség! Hogyan nevezik az izoméria azon fajtáját, amely itt megnyilvánul? Hogyan különböztethető meg a gyakorlatban egymástól ennek a kétféle izomernek a vizes oldata?

- c) A <http://www.vitalitas.hu/olvasosarok/online/komplementerm/2001/3/sav.htm> című weboldalon a következő szövegrészlet olvasható: „Egy vizes oldat savasságát vagy lúgosságát a pH-értékkel szoktuk jellemezni. A pH a hidrogénion-koncentráció negatív logaritmus, semleges pH-n a H^+ és OH^- ionok koncentrációja megegyezik (10^{-7} g/l), ezért a semleges pH értéke pontosan 7.” Saját kémia tudásod alapján javítsd és pontosítsd ezt a szöveget!
- d) Végezz közelítő számítást arra vonatkozóan, hány gramm tejsav van feloldva egy olyan vizes tejsavoldat 200 cm³-es térfogatában, amelynek pH-ja 3,0! ($K_s = 1,4 \cdot 10^{-4}$ mol/dm³)
- e) A tejsav molekuláinak kb. hány százaléka van disszociálva a fenti oldatban?

2. feladat:

Képzeld el, hogy a sav-bázis pufferoldatok pH-kiegyenlítő hatásának modellezéséhez a következő módon készítünk egy ammónia - ammónium-klorid puffert: 50 g ammónium-kloridot feloldunk desztillált vízben. Hozzá öntünk 500 cm³ $w = 25\%$ töménységű és 0,907 g/cm³ sűrűségű ammóniaoldatot, majd 1,00 dm³ térfogatú mérőlombikban jelíg töltjük és homogenizáljuk (azaz alaposan összerázzuk).

- Számítsd ki, hogy mennyi lenne az így készülő pufferoldat pH-ja, ha azt a közelítést alkalmaznánk, hogy a bemért bázis koncentrációja kb. azonos az egyensúlyi ammónia-koncentrációval, a bemért só koncentrációja pedig kb. egyenlő az egyensúlyi ammónium-klorid-koncentrációval! ($K_b = 1,8 \cdot 10^{-5}$ mol/dm³) Mi ennek a közelítő számítási módnak az elvi alapja?
- Számítsd ki, hogy mekkora pH-változást okozna, ha a fenti 1,00 dm³ térfogatú puffertoldatunkhoz 100 cm³ térfogatú, 0,100 mol/dm³ térfogatú sósavoldatot öntenénk!
- Számítsd ki, hogy mekkora pH-változást okozna, ha a 100 cm³ térfogatú, 0,100 mol/dm³ térfogatú sósavoldatot 1,00 dm³ térfogatú desztillált vízhez öntenénk!
- Hasonlítsd össze a fenti két pH-változás nagyságát! Melyik esetben nem változott meg a kémhatás és miért?

2. feladat:

Az ipari hidrogéngyártás egyik nagy jelentőségű, egyensúlyra vezető folyamatában szén-monoxidot és vízgőzt reagáltatnak magas hőmérsékleten.

- Írd fel a fenti reakció egyenletét!
- Mi a magyarázata annak, hogy a reakció egyensúlyi állandója dimenzió nélküli szám?
- Számítsd ki, hogy milyen anyagmennyiség-arányban kell reagáltatni a szén-monoxidot és a vízgőzt ahhoz, hogy az egyensúly eléréséig a szén-monoxid 80%-a reagáljon el, ha az adott körülmények között $K = 5,44$?

Matematika

Bevezető

*Az égben Isten vezet egy Nagy Könyvet,
amelyben minden matematikai probléma elegáns megoldása megtalálható. (Erdős Pál)*

Húsz éve tanítok matematikát, s minden évben vezettem egy vagy több tehetséggondozó szakkört. Ebbéli tapasztalataimon alapul ez a középiskolai matematikai tehetséggondozást segítő anyag. A tehetségnek sokféle definíciója van. Kiket tarthatunk tehetségesnek, mely diákokkal érdemes tehetséggondozás keretein belül foglalkozni? Többféle szempontot is megjelölnék. Tehetségesnek tartom azokat a diákokat, akiknek egy-egy csoportban kevesebb magyarázat is szükséges ahhoz, hogy eredményesek legyenek; tehetségesek azok, akik teljesen önálló tanulásra képesek matematikából, illetve azok, akik erős pozitív attitűdöt mutatnak a matematika iránt (tananyagon túlmutatóan kérdeznek, anyagrészek kapcsolatait vagy használhatóságát firtatják). Nem mindig a legjobb teljesítményűekkel érdemes foglalkozni, sokkal inkább azokkal, akik szívesen foglalkoznak a tananyagon túli részekkel tanórán kívül, a szabadidejükben is. A matematikai tehetséggondozásban igen jól használható Pólya György problémamegoldásra vonatkozó elmélete. Ezt megfelelően leegyszerűsítve azt mondhatjuk, négy lépcső visz a matematikai problémák, feladatok teljes megoldása felé:

I. lépcső: a feladat pontos megértése, a feladatban szereplő fogalmak értelmezése.

II. lépcső: indító ötlet: speciális esetek vizsgálata, általánosítás, hasonló feladatok keresése.

III. lépcső: lényegi ötletek, a megoldás terve és megoldás.

IV. lépcső: a megoldás elemzése, a használt ötlet továbbvitelének lehetősége.

A második és harmadik lépcsőben szereplő lépések ismételtethetők, ha egy megoldási terv nem visz sikerre. Az anyagban szereplő „bemelegítő feladatok” megoldásait ilyen „négylépcsős” alakban közöltem, így a tanárok számára mintát adhat, hogyan célszerű más feladatok megoldásánál is ilyen tanári segítséget adni.

Napjainkban a matematika számos területen kapcsolódik az informatikához. Napjaink matematikai gondolkodása magába foglalja az informatikai eszközök ésszerű használatát. Nemcsak ezen eszközök használatát kell ismerni, hanem be kell tudni építeni a matematikai problémamegoldásba, mindemellett ésszerűen kell alkalmazni, a heurisztika segítőjeként. Erre több helyen is példát ad ez a tehetséggondozó anyag.

Kiket céloz meg ez a tananyag?

- Egyfelől a tehetséges diákoknak ad lehetőséget, hogy további ismereteket szerezzenek; sok új ötletet mutat be; ezzel együtt módszeres és irányított gyakorlást jelenthet a problémamegoldás terén. A kutatási feladatok is nekik szólnak.
- Másfelől olvasmányos és érdeklődést felkeltő munkalapjaival a matematika iránt érdeklődő diákokat célozza meg, akik feltehető, hogy egy témakör megismerése után akár egy-két hozzá kapcsolódó feladat megoldásához is kedvet kapnak.
- Harmadikként a tehetséggondozással foglalkozó középiskolai tanárok használhatják a munkalapokat, a kapcsolódó feladatokat és a kis kutatási feladatokat, mint szakköri segédanyagot. A munkalapok önmagukban kerek egészet adnak, de tetszés szerint bővíthetők, mindegyikük nagyjából másfél órás szakköri időre készült, oktatható (és oktatásban kipróbált) tananyag.

*A matematika annyira komoly szakterület,
hogy egyetlen alkalmat sem szabad elmulasztanunk arra, hogy szórakoztatóbbá tegyük.
(Blaise Pascal)*

„Bemelegítő” feladatok

1. Meg lehet-e adni hét olyan pozitív egész számot, hogy mindegyikük pontosan három másik számmal legyen páronként relatív prím?
2. a) Szerkessz hat pontot, hogy mindegyik pont épp 3 másiktól legyen 3 cm távolságra!
b) Megoldható-e a feladat hét ponttal is?
3. Oldd meg az egyenletet a pozitív egész számok körében:

$$x^4 = y^4 + 10736$$

4. Igazold, hogy ha x , y és z valós számok közül pontosan egyik szám kisebb 1-nél, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$x + y + z + xyz \leq 1 + xy + xz + yz$$

5. Az ikozaéder olyan 20 lapú test, melynek minden lapja szabályos háromszög, s minden csúcsában öt szabályos háromszög találkozik.

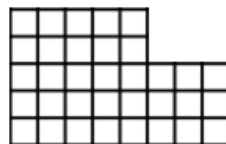
- a) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk a test két csúcsát, mekkora az esélye, hogy az őket összekötő szakasz a test belsejében halad?
- b) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk a test két élét, mekkora az esélye, hogy közös valamelyik végpontjuk?

6. Melyik az a másodfokú függvény, melyre $f(-3) = -17$, $f(2) = 22$ és $f(5) = -9$?

7. Bontsuk a lehető legtöbb (legalább elsőfokú) polinom szorzatára:

$$x^{12} - 1 =$$

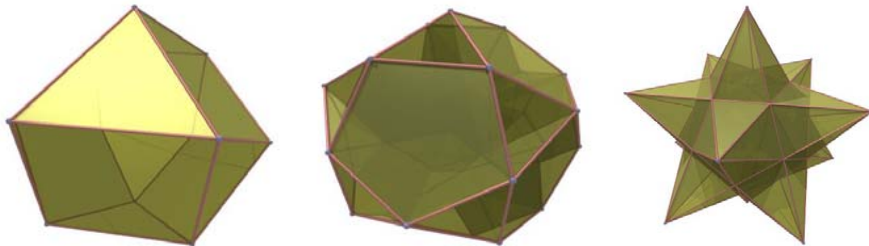
8. A mellékelt ábrán látható, négyzetekből álló síkidomot vágjuk szét négy egyenes vágással úgy, hogy a keletkező részekből egyetlen négyzetet lehessen összeállítani!



9. Két kör középpontja az $O_1(3; 3)$ és az $O_2(-5; -1)$ pont. A körök metszéspontjainak egyike az x , a másik az y tengelyen van.
 - a) Szerkesszük meg a koordináta-rendszert, a két pontot és a köröket!
 - b) Írjuk fel a két kör egyenletét!
10. Egy 25 cm magasságú, szabályos négyoldalú gúla alakú edény teljesen zárt, benne folyadék van. Ha a talpára állítjuk, akkor x cm magasságban, ha a csúcsára állítjuk, akkor y cm magasságban áll benne a folyadék. Igazolja, hogy x és y számok közül legalább az egyik irracionális!
 - A megoldáshoz használható a Wiles-Fermat tétel: Ha $n \geq 3$ és a , b , c , n pozitív egészek, akkor soha nem teljesülhet az $a^n + b^n = c^n$ egyenlőség. (Pierre de Fermat-nak ezt a XVII. században megfogalmazott tételét 1993-ban igazolta Andrew Wiles.)

Poliéderek, szabályos és féligszabályos testek

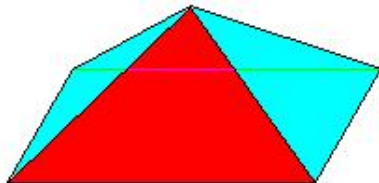
Ezen a munkalapon **poliéderekről** lesz szó, azaz olyan testekről, amelyeket sokszöglapok határolnak. A sokszögeket a test lapjainak, csúcsait a test csúcsainak, oldalait pedig a test éleinek nevezzük.



Minden poliédercsúcspan legalább három sokszög csúcsa találkozik, s a poliéder minden éle két-két sokszög közös oldala.

M11. Létezik-e olyan poliéder, amelyet tizenhét háromszöglap határol?

M12. Egy kisvállalkozó szabályos négyoldalú gúla alakú ajándéktárgyakat készít, s hat különböző színű festéket vesz, hogy a gúlákat befesse. Hány különböző színezésű gúlát készíthet, ha minden oldalt egyszínűre fest, és az élben szomszédos lapokat eltérő színűre festi? Két színezést azonosnak tekint, ha egyikből a másik megkapható elforgatás, mozdítás segítségével. (A szabályos négyoldalú gúla olyan poliéder, melynek egyik lapja négyzet, a többi négy éle pedig egyenlő.)



M13. Igazoljuk, hogy egy konvex poliédercsúcspanál találkozó szögek összege 360° -nál kisebb!

A konvex poliéderekre igaz Euler tétele:

Lapok száma + Csúcsok száma = Élek száma + 2

Röviden: $L+C=E+2$. Ez például a kocka esetében a $6+8=12+2$ igaz egyenlőséget adja.

Egy poliédert akkor nevezünk **szabályos testnek**, ha lapjai egybevágó szabályos sokszögek, s bármelyik két csúcsánál "ugyanolyan fajta" szögek keletkeznek (létezik bármelyik csúcsot a belőle induló félegyenesekkel együtt bármelyik másik csúcsba vivő térbeli egybevágóság). Vizsgáljuk meg, ezek milyen testek lehetnek! Legalább három szabályos sokszögnek kell találkoznia egy csúcspanban, s az egy csúcspanban találkozó szögek összegének az M13 kérdés alapján 360° -nál kisebbnek kell lenni. Ezzel leszűkülnek a lehetőségek:

- A szabályos háromszög minden szöge 60° , ezért ha egybevágó szabályos háromszögekből készítünk szabályos testet, a test egy csúcsában három, négy vagy öt lap találkozhat. (Hat darab már M13-nak ellentmond!)
- A négyzet minden szöge 90° , ezért a test egy csúcsában csak három négyzet találkozhat. (Négy darab már M13-nak ellentmond!)

- A szabályos ötszög minden szöge 108° , ezért a test egy csúcsában csak három ilyen találkozhat. (Négy darab már M13-nak ellentmond!)
- Az ötnél több oldalú szabályos sokszög minden szöge legalább 120° , ezért a test egy csúcsában M13 miatt még három sem találkozhat, kettő esetén pedig nem poliédert kapunk.

A lehetséges esetek tehát:

Hány oldalú szabályos sokszög	Egy csúcsban hány sokszög találkozhat
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Nézzük az első esetet! Jelölje x a lapok számát! Ekkor az x darab háromszöglap csúcsainak száma $3x$, de egy csúcsban három lap találkozhat, ezért ezt hárommal osztani kell, így kapjuk a poliéder csúcsai számát: x . Az x darab háromszöglapnak $3x$ darab oldala van, a poliéderben két-két háromszögoldal találkozhat egy élben, így a poliéder éleinek száma $\frac{3x}{2}$.

Az Euler-tételbe a kapott képleteket beírva a következő egyenletet kapjuk: $x + x = \frac{3x}{2} + 2$

Ennek megoldása $x=4$. Tehát megkaptuk, hogy ha létezik a fenti táblázat első sorának megfelelő test, akkor annak négy lapja kell, hogy legyen. A fenti okoskodásból adódó képletek szerint a csúcsok száma is 4, az éleké pedig 6.

Ilyen test valóban létezik, a neve **szabályos tetraéder**.

M14: Számítsuk ki a fenti módon, hogy a táblázat többi sorában levő esetek hány lapú, hány élű és hány csúcsú testeket adnak!

Az alábbi eredmények jönnek ki, mindegyik kapott test létezik:

Hány oldalú szabályos sokszög	Egy csúcsban hány találkozik	Lapok száma	Csúcsok száma	Élek száma	Név
3	3	4	4	6	szabályos tetraéder
3	4	8	6	12	oktaéder
3	5	20	12	30	ikosaéder
4	3	6	8	12	kocka (hexaéder)
5	3	12	20	30	dodekaéder

E testeket **platon** testeknek is szokták nevezni.

M15a gyűjtőmunka: Keresd meg az elnevezés eredetét, gyűjts történeti anyagot, mit jelképeztek régen e testek!

E testek sok érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Egyik ilyen tulajdonságuk a **dualitás**.

M15b gyűjtőmunka: Mit jelent e testek esetében a dualitás? Mely testek duálisai egymásnak?

Igen érdekes e testek térbeli szimmetriáit vizsgálni.

M6: Hány olyan térbeli egybevágósági transzformáció van, mely egy dodekaédert önmagába visz? Ezek közt hány síkra vonatkozó tükrözés van?

Ehhez a témárészhez kapcsolódik az 5. bemelegítő feladat is.

Újabb testeket kaphatunk, ha megengedjük, hogy a lapjaik legalább kétféle szabályos sokszög közül kerüljenek ki, melyeknek oldalai ugyanakkorák, de a poliéder csúcsaira vonatkozó megkötést meghagyjuk. Ezeket a testeket **félígszabályos testeknek** vagy **arkhimédieszi testeknek** nevezzük. (Kivétel: prizmákra és antiprizmákra nem használják a kifejezést, pedig a fenti definíció igaz rájuk.) (Nevezik még a most definiált testek duálisait is félígszabályos testeknek – ezek bemutatása itt nem célom.)

M17a gyűjtőmunka: Keresd meg az elnevezés eredetét, gyűjts történeti anyagot e testekről!

M17b gyűjtőmunka: Milyen poliédereket neveznek prizmáknak és antiprizmáknak? Mi a Schäfli-szimbólum?

Szeretnénk egy olyan félígszabályos testet készíteni, melynek minden csúcsában két szabályos hatszög és egy négyzet találkozik. Számítsuk ki, hogy létezik-e ilyen test, s ha igen, hány négyzet és hány hatszög kell hozzá!

Jelölje x a szükséges négyzetek, y a hatszögek számát! A lapok száma $x+y$. A poliédercsúcsokat összeszámolhatjuk úgy, hogy a négyzetek összes csúcsainak számát tekintjük: $4x$ -nek, de úgy is, hogy a hatszögek összes csúcsainak számát elosztjuk kettővel,

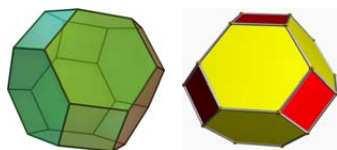
mert egy poliédercsúcsban két hatszögcúcs "olvad össze": $\frac{6y}{2} = 3y$

A poliéderek száma (mivel két-két sokszögdoldal felel meg egy poliéderélnek) az összes sokszögdoldal számának fele: $\frac{4x+6y}{2} = 2x+3y$. Ezután felírhatjuk az Euler-tételt és a

csúcsok számára vonatkozó két képletet, így egy egyenletrendszert kapunk:

$$\left. \begin{aligned} (x+y) + (4x) &= (2x+3y) + 2 \\ 4x &= 3y \end{aligned} \right\}$$

Az egyenlet megoldása $x=6$ és $y=8$. Tehát ha létezhet ez a test, 6 négyzetből és 8 hatszögből áll. A kapott eredmény csak szükséges feltétel (Tudjuk, hogy a félígszabályos testek körében az Euler-tétellel kapott szükséges feltétel elégséges is a létezéshez). Íme a test neve csonka oktaéder:



M18: Számoljuk ki az Euler-tétellel, létezik-e olyan félígszabályos test, melynek egy csúcsában 4 szabályos háromszög és 1 négyzet találkozik? Ha igen, mennyi négyzet- és mennyi háromszöglapja lehet?

M19: Számoljuk ki az Euler-tétellel, létezik-e olyan félígszabályos test, melynek egy csúcsában 1 négyzet, 1 szabályos hatszög és 1 szabályos tíszög találkozik? Ha igen, mennyi négyzet- mennyi ötszög- és mennyi tíszöglapja lehet?

M20: Keresd ki (akár a függvénytáblázatból) a szabályos testek beírt gömbjének sugarát, a felszínét és a térfogatát! Keress összefüggést e három adat között, általánosítsd és igazold a talált tételt!

Kapcsolódó anyagok, weboldalak:

<http://library.thinkquest.org/08aug/00157/>

<http://www.sulinet.hu/tart/cikk/Se/0/14726/3>

http://hu.wikipedia.org/wiki/Szab%C3%A1lyos_test

http://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9deszi_testek

<http://slc.pszk.nyome.hu/file.php/5/munkalap1/arkhim.rtf>

Megoldások, eredmények

M11: Nem létezhet, mert az élek száma $\frac{3 \cdot 17}{2} = 25,5$ lenne, de ez nem egész.

M12: Felülnézetben mutatja az ábra a testet. Három alapvető eset van:

a) 1, 2, 3 és 4 részek négy különböző színnel vannak festve. Ez $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ eset, melyet 4-gyel osztani kell az elforgatás miatt, azaz 90 eset, az alaplapot mindegyiknél 2-féleképp festhetjük, ez 180 eset.

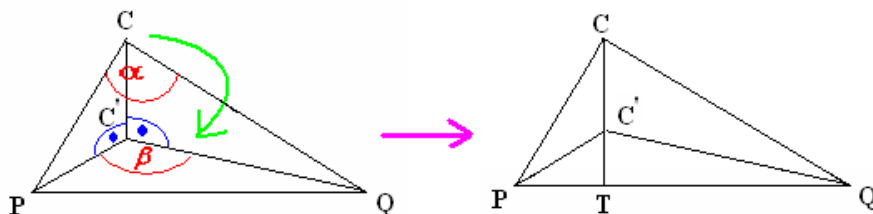
b) Ha 1, 2, 3 és 4 három különböző színnel van festve, akkor a két azonos szín szemben kell, hogy legyen. E két azonos mezőt hatféle színnel színezzhetjük, a másik kettőt 5*4-féleképp, az alaplapot már csak 3-féleképp folytathatjuk. Ez $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ eset. Itt elforgatott esetek nem esnek egybe!

c) Ha 1, 2, 3 és 4 mezőkön két szín van, akkor a szemközti mezők azonosak, az elforgatás miatt a sorrend nem számít, csak ki kell választani a két színt, tehát $\binom{6}{2} = 15$ lehetőség

van. Az alaplap mindig 4-féleképp színezzhető tovább, így $15 \cdot 4 = 60$ eset lesz.

Ez $180 + 360 + 60 = 600$ lehetőség.

M13: Egy C konvex csúcsnál a testet vágjuk el olyan síkkal, amely mindegyik befutó élet elvágja! (Ilyen síkot találhatunk például, ha a három legrövidebb CA, CB, CD él A, B és C végpontjain áthaladó síkot közelítjük a csúcshoz.) A vizsgált C csúcsnál levő szögeknek e síkra eső merőleges vetületeinek összege 360° , már csak azt kellene belátni, hogy mindegyik szög vetülete nagyobb az eredeténél. Legyen $\alpha = \angle PCQ$ egy ilyen szög, $\beta = \angle PC'Q$



pedig a vetülete. $\angle PC'C$ és $\angle QC'C$ derékszögű háromszögek magasságainak közös talppontja. Legyen C ekkor $TC'C$ egy derékszögű háromszög, melyben $TC > TC'$. Forgassuk el C-t a PQ egyenes körül, míg $\angle PCQ$ háromszög síkjába kerül. Ekkor T, C' és C egy egyenesen lesz, könnyű látni, hogy $\angle TCP < \angle TC'P$ és $\angle TCQ < \angle TC'Q$. Emiatt $\alpha < \beta$.

M14: Csak a mintaképp megadott egyenletet kell átírni, megoldani.

M15: http://nepszerukemia.elte.hu/alkimia_Jalovszky.pdf

http://hu.wikipedia.org/wiki/Szab%C3%A1lyos_test

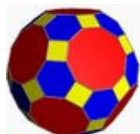
http://hu.wikipedia.org/wiki/Szab%C3%A1lyos_test#Dualit.C3.A1s_a_szab.C3.A1lyos_testek_k.C3.B6z.C3.B6tt

M16: Egy A csúcsot és három B, C, D szomszédját, valamint egy P csúcsot és három Q, R, S szomszédját kiválasztjuk. A-hoz rendeljük P-t, B-hez Q-t, C-hez R-et, D-hez S-et. Ez egyértelműen megad egy egybevágható transzformációt, mely a dodekaédert önmagába viszi. Így csak e hozzárendeléseket kell figyelni. 30 csúcs van, így egy rögzített A-hoz 30-féle P-t választhatunk, a B, C és D -hez 3!-féleképp rendelhető a Q, R, S pont. Tehát

$20 \cdot 6 = 120$ ilyen transzformáció van. A második kérdéshez azt figyeljük meg, hogy minden szimmetriasík csak két élet tartalmaz. Minden él pontosan egy szimmetriasíkban van benne, s minden szimmetriasík két élet tartalmaz. Mivel 30 él van, ezért $30/2 = 15$ ilyen szimmetriasík lesz.

M17: <http://samsara-sacraesphaerae.blogspot.com/2009/01/13-arkhimdeszi-test.html>
http://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9deszi_testek
http://hu.wiktionary.org/wiki/f%C3%A9lig_szab%C3%A1lyos_test

M18: Legyen x db háromszög és y db négyzetlap! A csúcsok kétféle összeszámlálásával: $\frac{3x}{4} = 4y$, az Euler-tétellel: $4y + (x + y) = \frac{3x + 4y}{2} + 2$. Ebből: $x=32$, $y=6$, az ábrán látható a test.



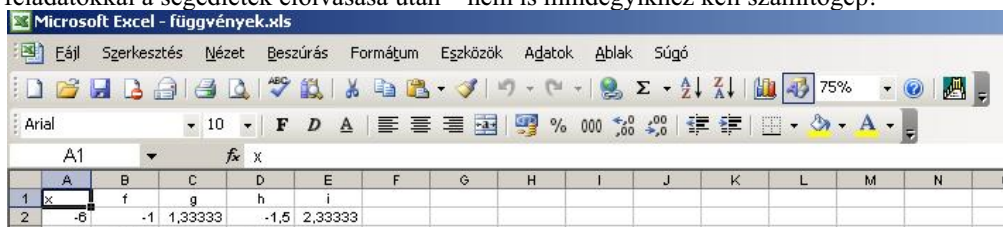
M19: Legyen x db négyzet, y db hatszög és z db tízszöglap! A csúcsok háromféle összeszámlálásával: $4x = 6y = 10z$, az Euler-tétellel: $4x + (x + y + z) = \frac{4x + 6y + 10z}{2} + 2$. Ebből: $x=30$, $y=20$, $z=12$, az ábrán látható a test.

M20: http://hu.wikipedia.org/wiki/Szab%C3%A1lyos_test

Kössük össze a beírt gömb K középpontját a csúcsokkal! Így olyan gúlákra bontottuk a testet, amelyek alaplapja az eredeti sokszög egy lapja, a magasságuk pedig a beírt gömb ρ sugara. Ezek térfogatainak összegzésével adódik, hogy $V = \frac{A \cdot \rho}{3}$, ez minden olyan test esetén igaz, melynek van beírt (minden lapját érintő) gömbje.

Excel-matek

Többször előfordult velem, hogy matematikai jellegű problémám akadt, amelynél nem volt szükség a megoldás levezetésére, csak magára a megoldásra. Ilyen esetekben többször nyúltam informatikai eszközökhöz. Más alkalommal csak sokat kellett volna számolnom, s emiatt szorultam a számítógép segítségére. Az ilyen jellegű problémák esetén jól használható matematikai szoftver a Maple, a GeoGebra vagy a Derive, de ezeket fel kell tölteni gépünkre, s használatukat meg kell tanulni, hogy hasznukat vehessük. Néhány egyszerű problémában a jól ismert táblázatkezelő – esetünkben az Excel – is segíthet. Erről lesz szó ezen a munkalapon. Aki nem járatos az Excelben, az is megpróbálkozhat a feladatokkal a segédletek elolvasása után – nem is mindegyikhez kell számítógép!



I. Egy alkalommal diákoknak kellett geometriai feladatokat feladnom, s szerettem volna, ha egy háromszög oldalai egészek és a háromszög területe is egész. Az egyszerűség kedvéért ehhez két olyan derékszögű háromszöget kerestem, melynek oldalai egész számok, s az egyik befogójuk egyenlő és páros.

M21a: Miért oldja meg a gondot két ilyen derékszögű háromszög?

M21b: Vajon minden „egész oldalú” és egész területű háromszög előáll a keresett típusú két derékszögű háromszögből?

Pitagorasz tételét alkalmazva pozitív egész megoldásokat kerestem az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenletre. E feladat pozitív egész megoldásait **pitagoraszai számhármásoknak** nevezzük. Ismerem a módszert, ahogyan pitagoraszai számhármásokat kaphatok: veszek két pozitív egészet, melyet m -mel és n -nel jelölök, s úgy választom őket, hogy $m > n$ teljesüljön. A két befogót a következő két képlet adja: $a = 2mn$, továbbá $b = m^2 - n^2$, az átfogó pedig: $c = m^2 + n^2$

M22a: Igazoljuk, hogy az így felírt oldalhosszak valóban derékszögű háromszöget adnak meg!

M22b: Mely m és n értékek esetén lesz a háromszög oldalhosszainak legnagyobb közös osztója 1?

M23: Igazoljuk, hogy bármely 2-nél nagyobb pozitív egész szám szerepel befogóként valamelyik pitagoraszai számhármásban!

Szerettem volna, ha az Excel kiszámol sok pitagoraszai számhármast.

Az első két oszlopban szerettem volna a sorban következő m és n értékeket látni, az utána levő oszlopokban pedig az a , b és c háromszögoldalakat. Ehhez az $m=2$ és $n=1$ esetet beírtam, majd öt megfelelő képletet írtam az alatta levő sorba, aztán ezt a képletet a 101. sorig lemásoltam, így a képen látható táblázat keletkezett.

m	n	a	b	c
2	1	4	3	5
3	1	6	8	10
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	2	16	12	20
4	3	24	7	25
5	1	10	24	26
5	2	20	21	29
5	3	30	16	34
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	2	24	32	40

M24: Készítsd el az előző táblázatot! Az Excel következő részeit használd hozzá: alapműveletek, relatív hivatkozás, HA függvény! (Ha nem vagy tisztában ezek működésével, nézd át az Excel-segítség fájlt!)

M25a: Keress az Excellel olyan téglatesteket, amelyeknek élei különböző n -nél kisebb egész számok és testátlójuk is egész szám! Legyen $n=11$ (Lásd az ábrát!).

M25b: Hogyan függ n -től a szükséges sorok száma?

	A	B	C	D	E
1	a	b	c	Testátló	Egész-e?
2	3	2	1	3,741657	nem
3	4	2	1	4,582576	nem
4	4	3	1	5,09902	nem
5	4	3	2	5,385165	nem
6	5	2	1	5,477226	nem
7	5	3	1	5,91608	nem
8	5	3	2	6,164414	nem
9	5	4	1	6,480741	nem
10	5	4	2	6,708204	nem
11	5	4	3	7,071068	nem
12	6	2	1	6,403124	nem
13	6	3	1	6,78233	nem
14	6	3	2	7	IGEN
15	6	4	1	7,28011	nem
16	6	4	2	7,483315	nem

II. Egy másik alkalommal harmadfokú egyenletet kellett volna megoldanom középiskolás szinten. Ehhez tudtam, hogy ha megtalálok egy gyököt, akkor eggyel alacsonyabb (tehát másod-) fokú egyenletre vezethetem vissza a feladatot. Ennek módszere a polinomosztás, amit alább bemutatok. Ha például az

$$x^3 + x^2 - 72x + 180 = 0$$

egyenletről feltételezzük, hogy három egész megoldása van, akkor azok osztói kell legyenek a konstans tagnak.

M26: Igazold, hogy ha egy harmadfokú polinom minden együttthatója egész és három egész zérushelye (gyöke) van, akkor a konstans tagnak mindhárom gyök osztója!

A fenti egyenlet esetén könnyen rábukkanhatunk az $x=3$ gyökre (az Excel segít ebben!). A polinom felírható kell, hogy legyen $(x-3) \cdot p(x)$ alakban, ahol $p(x)$ egy másodfokú polinom.

M27: Igazold, hogy ha egy harmadfokú polinomnak gyöke g , akkor a polinom felírható $(x-g) \cdot p(x)$ alakban, ahol $p(x)$ egy másodfokú polinom!

A feladat tehát az, hogy $x^3 + x^2 - 72x + 180 = (x-3)p(x)$ alakba írjuk a polinomot. A polinomosztás módszere leolvasható a következő két ábráról, az általános iskolai írásbeli osztást kell utánozni, annyi különbséggel, hogy egy kapott hányadost mindig vissza kell szorozni, és az osztandó megmaradt részéből le kell vonni. A polinomok esetében a hányados-polinom következő tagját mindig az osztandóból maradt rész és az osztó legmagasabb fokszámú tagjainak hányadosa adja:

$$\begin{array}{r}
 54765 : 24 = 2281 \\
 \underline{-48} \\
 67 \\
 \underline{-48} \\
 196 \\
 \underline{-192} \\
 45 \\
 \underline{-24} \\
 21
 \end{array}$$

(egész) hányados

maradék

Ennek mintájára:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + x^2 - 72x + 180) : (x - 3) = x^2 + 4x - 60 \\
 \underline{-(x^3 - 3x^2)} \\
 4x^2 - 72x \\
 \underline{-(4x^2 - 12x)} \\
 -60x + 180 \\
 \underline{-(-60x + 180)} \\
 0
 \end{array}$$

hányados-polinom

0 → maradék

Ezekből következik, hogy $x^3 + x^2 - 72x + 180 = (x - 3)(x^2 + 4x - 60)$, tehát egy másodfokú egyenletet kell már csak megoldani. A végső gyökök így: 3, -10 és 6.

M28: Oldd meg az $x^3 + 12x^2 - 108x - 1120 = 0$ egyenletet a fenti módszerrel!

Bonyolultabb a helyzet, ha csak annyit tudunk, hogy az egyik gyök racionális – esetleg több gyök nincs is. Legyen példánk erre a $21x^3 + 5x^2 - 90x + 36 = 0$ egyenlet. Ilyen esetben nem használható az M16 állítás. Bár ismert olyan állítás, mely szerint a racionális gyökök számlálója a konstans tagnak, a nevezője pedig a főegyütthatónak osztója, de ez egyrészt túl sok esetet ad, másrészt most alkalmat keresünk, hogy az Excel egy új lehetőségét ismerhessük meg. A célértékkereső Excel-eszközt fogjuk használni. A magasabbfokú egyenlet bal oldalát úgy írjuk be az egyik (pl.: a B2) cellába, hogy az x ismeretlen minden előfordulási helyén ugyanarra (pl.: a B1) cellára hivatkozunk. E cellába bármilyen adatot beírhatunk (akár 7-et is). Ezután az Eszközök menü Célértékkeresés menüpontját választjuk. Az ábra szerint töltjük ki a két cellát és a párbeszédpanelt:

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C
1	x	7	
2	$21x^3 + 5x^2 - 90x + 36$	6854	

Below the spreadsheet is the 'Célérték keresése' (Goal Seek) dialog box with the following settings:

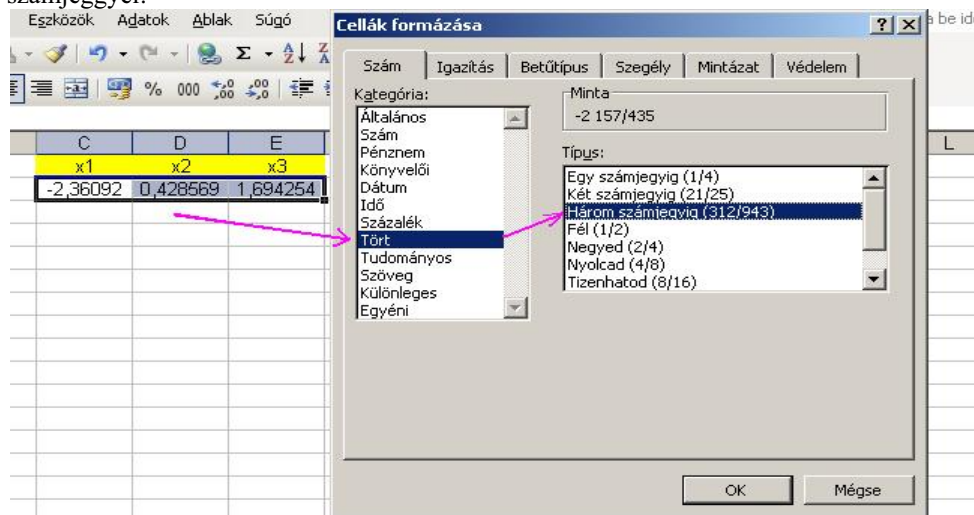
- Célcella: B2
- Célérték: 0
- Módosuló cella: B1

Annotations in the image point to the formula in B2, the value 7 in B1, and the resulting value 6854 in B2.

Ha az OK gombbal elindítjuk a célértékkeresést, akkor az Excel megpróbálja a módosuló cellaként megadott cellában úgy változtatni a cella tartalmát, hogy a célcellában a célérték álljon a képlet eredményeként. (Ehhez persze az kell, hogy a célcella egy hivatkozást tartalmazzon a módosuló cellára, vagy hogy a belőle induló hivatkozási láncban szerepeljen a módosuló cella.) Az Excel kereső algoritmus akkor áll le, ha a célértéket 3 tizedesjegy erejéig közelíti a módosuló cella értéke, vagy ha „reménytelennek ítéli” a gép a célérték elérését.

Ha a fenti adatokkal elindítjuk a célértékkeresést, akkor 1,69425492311333 értékkel áll le a gép. Ha 0-val indítjuk, akkor 0,428569468861206 értéket ad. Ha pedig -10 értékkel indul, akkor -2,36092105953484 érték jön ki. Ez a három gyök közelítő értéke. Lehet-e köztük racionális?

Bemásoltam a C2, D2, E2 cellákba a három eredményt, majd a három cellára cellaformázásként a számformátumon belül a törtformátumot választottam három számjeggyel:



Az eredmény:

C	D	E
x1	x2	x3
-2 157/435	3/7	1 302/435

A kapott három tört közül a 3/7-ről behelyettesítéssel kiderül, hogy PONTOS gyök. Így polinomsztással adódik a következő: $21x^3 + 5x^2 - 90x + 36 = (7x - 3)(3x^2 + 2x - 12)$.

Tudjuk, hogy egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényező nulla, tehát a másodfokú tényező gyökeivel együtt a harmadfokú egyenlet PONTOS gyökei:

$$\frac{3}{7}; \frac{-1 + \sqrt{37}}{3}; \frac{-1 - \sqrt{37}}{3}$$

M29: Oldd meg a $78x^3 - 22x^2 - 211x + 120 = 0$ egyenletet a fenti módon, ha tudjuk, hogy van racionális gyöke!

M30: Oldd meg az $55x^4 + 228x^3 - 528x^2 - 583x - 756 = 0$ egyenletet a fenti módon, ha tudjuk, hogy van legalább két racionális gyöke!

Az itt megoldott két probléma Excel-fájlja:

<http://slc.pszk.nyeme.hu/file.php/5/munkalap2/Excel-matek.xls>

Internetes segítség az Excelhez:

http://m-forum.hu/downloads/elmelet/Hivatkozások_fuggvények.pps

<http://www.akg.hu/info/excel/index.html>

<http://www.hatekonysag.hu/blog/excel-abszolut-relativ-vegyes-hivatkozások.htm>

http://ecdweb.hu/index.php?title=Excel_2000_-_Cellahivatkoz%C3%A1sok

A Fibonacci-sorozat és az aranymetszés

A középkor egyik legtehetségesebb matematikusa volt Fibonacci (szül.: Pisa, kb. 1170 – kb. 1250, más nevein Leonardo di Pisa vagy Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci), olasz matematikus. Liber Abaci című könyvében említi a következő feladatot:

Nyulakat tenyésztünk a következő (elméleti) feltételek mellett:

- az első hónapban egyetlen újszülött nyúl-pár van;
- az újszülött nyúl-párok két hónap alatt válnak termékennyé;
- minden termékeny nyúl-pár minden hónapban egy újabb párt szül;
- és a nyulak örökké élnek?

Hány pár nyulunk lesz n hónap múlva?

A havonkénti nyulpárok számát a következő sorozat mutatja:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Ezt az $\{F_n\}$ sorozatot nevezik Fibonacci-féle sorozatnak. A sorozatnak érdekes tulajdonságai vannak, a matematika számos területén felbukkan.

M31a: Igazoljuk, hogy a fenti Fibonnacci-féle feladat megoldása olyan F_n sorozat, amelyet az $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ képlet jellemez!

M31b: Hányféleképpen mehetünk fel egy 10 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha egy lépésre egy vagy kettő lépcsőfokot léphetünk?

M32: Számoljuk ki és ábrázoljuk a Fibonacci-sorozat elemeit táblázatkezelő segítségével! Írassuk ki és ábrázoltassuk a sorozat első n elemének összegét és reciprok-összegét!

M33a: Tekintsünk egynél nagyobb n és k egészeket, készítsünk egy $n \times k$ méretű téglalapot, amelynek a bal alsó sarkából kivágunk egy 1×1 -es négyzetet. Vágjuk le a téglalaphból a lehető legnagyobb négyzetet a jobb felső saroktól kezdve! (Lásd az ábrát!) Ezután újra ugyanilyen módon vágunk a maradék téglalaphból, addig folytatjuk, amíg a „csonka” téglalapot fel nem daraboltuk négyzetekre. Mely n és k értékek esetén keletkeznek csupa különböző négyzetek?

M33b: Az iménti feladat eredményét felhasználva írjunk fel képletet az $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2$ összegre!

Sorozatokkal kapcsolatos (így a Fibonacci-sorozattal kapcsolatos) állítások igazolásához is hasznos segítség a **teljes indukció** módszere. E módszert többnyire a pozitív egész számok halmazának egy végtelen részhalmazára tett állítások igazolására használják.

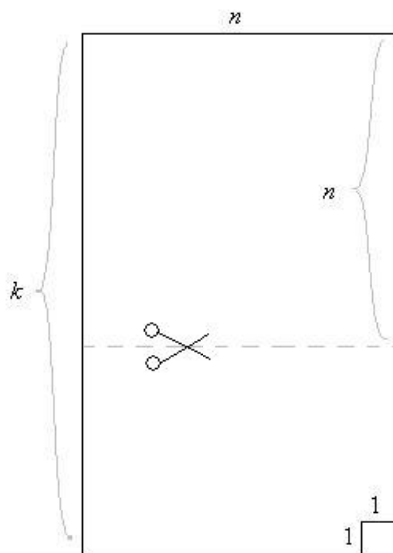
A Fibonacci-számokat vizsgálva például megfigyelhetjük, hogy:

$$1 = 2 - 1$$

$$1 + 1 = 3 - 1$$

$$1 + 1 + 2 = 5 - 1$$

$$1 + 1 + 2 + 3 = 8 - 1$$



$$1+1+2+3+5 = 13-1$$

$$1+1+2+3+5+8 = 21-1$$

Megfogalmazódik az a sejtésünk, hogy

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Bemutatjuk, hogyan lehet ezt teljes indukcióval belátni. Az $n=1; 2; 3; 4; 5; 6$ esetekre fentebb megvizsgáltuk, hogy igaz az állítás.

Tételezzük fel, hogy $n=k$ értékig már igazoltuk a sejtést, és igaznak bizonyult. Ez azt jelenti, hogy $F_1 + F_2 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1$ teljesül, ha $n=1; 2; 3; \dots k$.

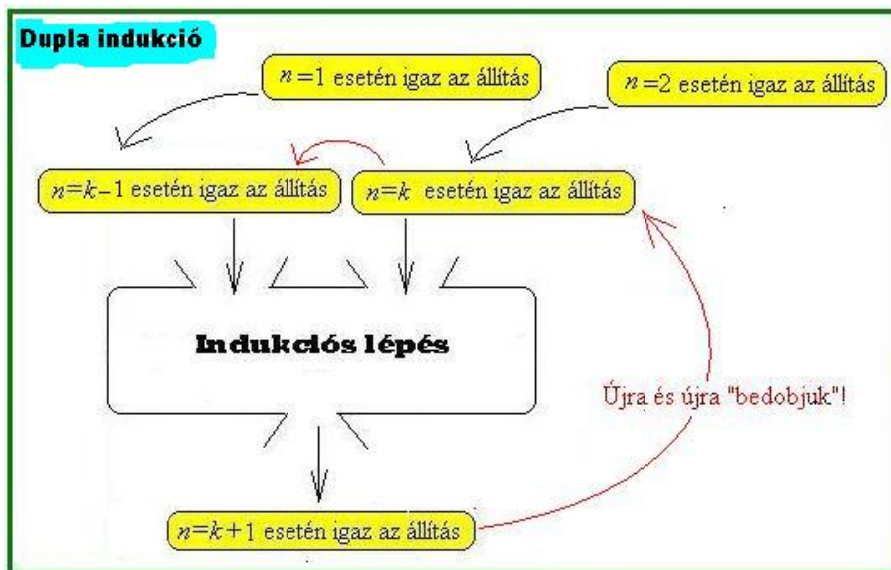
Ezután e feltétel (indukciós feltevés) felhasználásával igazoljuk, hogy $k+1$ esetén is teljesül az állítás:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k + F_{k+1} = (F_1 + F_2 + \dots + F_k) + F_{k+1} = (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} = (F_{k+1} + F_{k+2}) - 1 = F_{k+3} - 1$$

Tehát ha valamely n számra teljesül az állítás, akkor ebből következik, hogy az $n+1$ -re is igaz. E „bizonyítás-váz” bármely n -re elmondható, s úgy működik, mint egy gép:

A Fibonacci-sorozat esetében minden elemet két megelőző határoz meg, ezért számíthatunk rá, hogy bonyolultabb állítások igazolásához esetleg vissza kell menni még egy lépéssel a $k-1$. elemig. A második „gép” ábrája azt mutatja, hogyan megy a bizonyítás „dupla” indukcióval.





Erre a dupla indukcióra látunk egy példát a következő helyen:
<http://slc.pszk.nyme.hu/mod/resource/view.php?id=108>

M34: Igazoljuk a következő állítást teljes indukcióval: $F_n \mid F_{2n}$

M35: Igazoljuk a következő állítást teljes indukcióval: $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

Felvetődik a kérdés, hogy létezik-e olyan képlet, amellyel az n ismeretében a Fibonacci-sorozat n . elemét közvetlenül kiszámíthatjuk, azaz „megspórolhatjuk-e” valahogyan az összes előző elemek kiszámítását?

Ha az M35-ben szereplő képlet alapján dolgozunk, akkor kihagyhatunk elemeket, de így is ki kell számolni néhány elemet, s sok ügyeskedésre is szükség van!

M36: Számítsuk ki az M35 képletének felhasználásával, minél kevesebb közbülső elem kiszámításával, az F_{99} értékét! (Az első 10 elem értékét fentebb megadtuk.)

Az M32 feladatot megoldva exponenciális függvényhez hasonló grafikont kaphattunk. Lehetséges, hogy a keresett képlet egy exponenciális függvény szabálya? Ha ez igaz lenne, akkor az n . elem n -edik gyöke mindig ugyanaz a szám lenne – az exponenciális függvény alapja.

Ha az Excellel kiíratjuk a $G_n = \sqrt[n]{F_n}$ sorozat értékeit, látjuk, hogy ez csupa különböző eredményt ad, de az n -et növelve egyre közelít egy értékhez. Lehet, hogy az exponenciális függvényt egy konstanssal szoroztuk, azaz egy mértani sorozatról van szó? Ez esetben két-két szomszédos elem hányadosa mindig megegyezne, s a kvóciens (q) értékét adná.

Ha az Excellel kiíratjuk a $H_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ sorozat értékeit, látjuk, hogy ez is csupa különböző eredményt ad, de az n -et növelve sokkal gyorsabban közelít egy számhoz – ugyanahhoz az értékhez, mint az előbb!

Ezek szerint a Fibonacci-sorozat „kevésbé” tér el egy mértani sorozattól, melynek q hányadosa körülbelül 1,618.

Ha a sorozat elemeit $F_n = p \cdot q^n$ alakban szeretnénk közelíteni, ez lehetséges az előzőek alapján, és p értéke is nagy pontossággal meghatározható.

M37a: Végezzük el az Excellel a most leírt három közelítést, adjuk meg az Excel pontosságával q és p értékét megfelelően sok sorozatelem alapján! Hány elem kell ehhez? Mellékeljük a megfelelő Excel táblázatot!

M37b: Számítsuk ki a fenti p és q értékkel a $p \cdot q^n$ sorozat elemeit! Kerekítsük az elemeket egészre! Melyik elemtől kezdve ad pontatlan értéket a Fibonacci-sorozat elemeire? Mellékeljük a megfelelő Excel táblázatot! Lehet a hiba oka az Excel pontatlansága?

Fordítsuk meg a kérdést! Ha egy $\{a_n\}$ sorozat $p \cdot q^n$ alakú, teljesülhet rá az $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ képlet? (Nevezzük el ezt a képletet **Fibonacci-féle rekurzió**nak!)

Ez a következő egyenlőséget adja: $p \cdot q^{n+1} = p \cdot q^n + p \cdot q^{n-1}$

Osszuk el mindkét oldalt $p \cdot q^{n-1}$ -nel! q -ra nézve másodfokú egyenlőséget kapunk: $q^2 = q + 1$. Két megoldása van:

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

M38a: Mutassuk meg, hogy minden $a_n = x \cdot q_1^n + y \cdot q_2^n$ alakú sorozatra teljesül a Fibonacci-féle rekurzió (ahol x és y tetszőleges valós számok)!

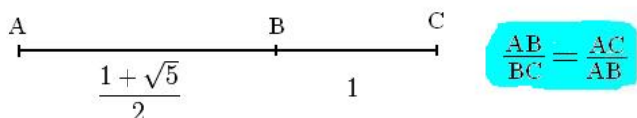
M38b: Keressük meg azt az x és y értéket, amelyre teljesül, hogy az M38a-ban szereplő sorozatra $a_1 = 1$ és $a_2 = 1$!

Az M38a-ban igazolt tulajdonság miatt az M38b-ben talált sorozat azonos a Fibonacci-féle sorozattal, hiszen az első két elem megegyezik, s a rekurzió szerint minden elemet az előző kettőből ugyanaz a képlet számítja.

A fentebb megtalált $q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ számnak több érdekes tulajdonsága van. Ha az alábbi

ábra szerint egy $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ hosszúságú AB szakasz mellé teszünk egy egységnyi hosszúságú

BC szakaszt, akkor a nagyobbik szakasz annyiszorosa a kisebbiknek, mint ahányszorosa az



együttes AC szakasz a nagyobbiknak. Ezt már az ókorban tudták, s azt mondták, hogy ebben az esetben az AC szakasz B osztópontja az **aranymetszési pontjában** van. Egy AC szakasz ilyen arányú felosztását az ókor óta harmonikus, esztétikai értékeket hordozó tökéletes arányként tartják számon. Ez az arány az állat- és növényvilágban is számos formában megjelenik. Sok művész tudatosan alkalmazza az irodalom és a zene területén is, bizonyított tény, hogy több zenemű, költemény aranymetszési pontjában van a mű fordulópontja. Találkozhatunk vele a geometria területén belül is, például a szabályos ötszögben.

M39: (kutatómunka) Gyűjts történeti anyagot az aranymetszésről! Hol jelenik meg az egyes tudományokban, a művészetekben, a természetben?

M40: Igazold a Fibonacci-sorozat M38b-ben megtalált zárt képlete alapján, hogy a Fibonacci-féle számok megkaphatók úgy, ha egészre kerekítjük a következő sorozat elemeit:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

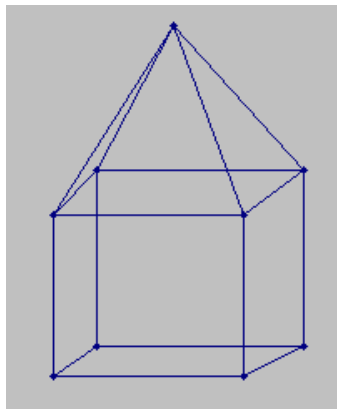
Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy a Fibonacci-sorozat szomszédos elemeinek hányadosai egyre pontosabban közelítik az aranymetszés számát. Ha tehát például olyan verset szeretnénk írni, melynek fordulópontja a vers aranymetszési pontjában van, akkor ezt könnyen megtehetjük, ha úgy intézzük, hogy a vers fordulópontja előtti és utáni sorainak száma két szomszédos (lehetőleg nagy) Fibonacci-szám legyen.

Kapcsolódó linkek:

Fibonacciról: <http://http.hu.wikipedia.org/wiki/Fibonacci>

A Fibonacci-sorozatról: <http://index.hu/tudomany/fib0407/>

Építsünk házat!



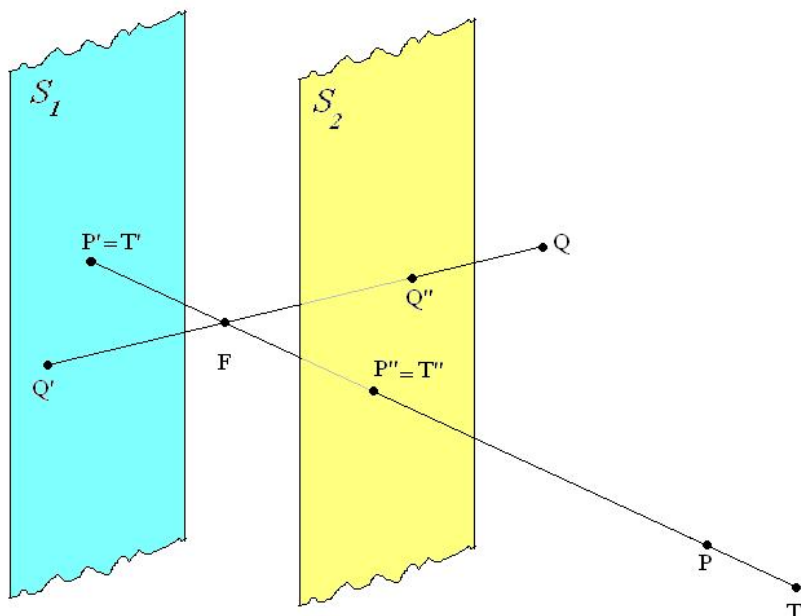
Biztosan játszottál már olyan játékszoftverrel, amelyben térbeli testek között mozoghattál, szobákban, épületek között járkálhattál, s a képernyő „valóságosan” mutatta, mit látsz éppen. Hogyan lehet egy térbeli alakzat képét síkban megjeleníteni, kirajzolni, hogy az „élethű” legyen? Erről szól ez a munkalap. (Megértéséhez a síkbeli koordináta-rendszer ismeretére és a vektorok alapvető ismeretére van szükség.)

Az élethű ábrázolás jelentse most azt, hogy olyan képet ad egy testről, mint amit a szemed alkot róla. A fényképezőgép alkotta síkbeli kép is azért élethű, mert a szem képalkotását utánozza. Ennek modellezéséhez tehát először tehát a szem (a fényképezőgép, a tükrök stb.)

képalkotásával érdemes megismerkedni.

Erről szól a fizika tehetséggondozás első feladatlapja.

Hogyan keletkezik a kép a szemünkben? Tekinthejtük úgy, mintha minden térbeli P pontot egy vászonra vagy a szem esetében a retinára vetítenénk – matematikailag értelmezéssel egy S síkra vetítünk, a szemlencse F fókuszpontján és a P ponton átmenő egyenessel. Egy P pont képe tehát úgy keletkezik az adott S síkon, hogy a rögzített F ponton átmenő PF egyenesnek tekintjük az S síkkal való dőléspontját, ez a P pont P' képe.



Az ábrán egy P, egy Q és egy T pont vetített képét láthatjuk. Ha e pontokból érkező fénysugarak az F ponton áthaladnak, akkor az S_1 -gyel jelzett síkon keletkezik a képük: P', Q' és T'. (F modellezheti itt a szemlencse fókuszpontját, S_1 modellezheti a retinát a szemben). Az S_1 síkon fordított állású képet kapunk. Az ábrán szemléletesen is megjelenik, hogy helyet cserél például a „fent” és a „lent”. Ha azt az S_2 síkot tekintjük, mely S_1 -gyel párhuzamos, és F-től ugyanolyan távolságra van F „túloldalán” (vagyis e sík S_1 -nek F-re vonatkozó tükörképe), akkor az e síkon kapott kép azonos (azaz egybevágó) az S_1 -en keletkező képpel, de „egyállású” az eredetijével. Az ábrán a P, Q és T pont esetén, ha a pontokból érkező fénysugarak az F ponton áthaladnak, akkor az S_2 -vel jelzett síkon a P'', Q'' és T'' képük keletkezik. Ez a sík lesz megfelelő számunkra, hogy térbeli tárgyak síkbeli képeit megadjuk. (Az agyunk a retinára – azaz az S_1 síkra – vetített „fordított állású” képet úgy alakítja át, mintha az S_2 síkon kapott, „eredetivel egyállású” kép lenne.) Megfigyelhető az ábrán az is, hogy P és T pontok képe egybeesik, mert F rajta van a PT egyenesen.

A következő feladatoknál az S_2 síkra történő vetítésre teszünk fel kérdéseket:

M41a: Igazoljuk, hogy a most megadott transzformáció egyenestartó, azaz három egy egyenesre eső pont képe mindig egy egyenesre esik!

M41b: Igaz-e tetszőleges pozitív p érték esetén, hogy van olyan szakasz, amelyre igaz, hogy képének hossza p -szerese az eredeti szakaszhozhoz?

M42a: Igazoljuk, hogy a most megadott transzformáció nem aránytartó, azaz $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ nem teljesül bármely A, B, C, D pont esetén!

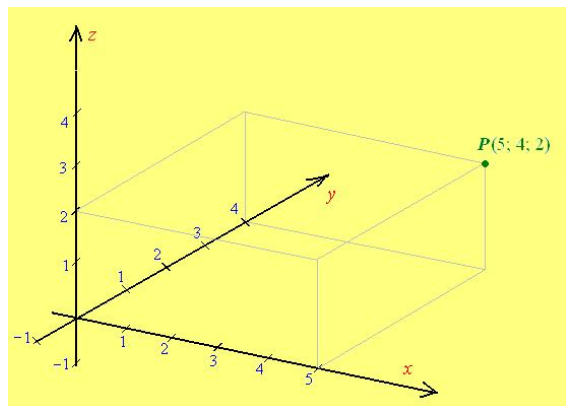
M42b: Adjuk meg olyan feltételt az A, B, C, D pontokra, amelynek teljesülése esetén $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ mindig igaz!

M43a: Adjunk meg olyan térbeli háromszöget, amely feleakkora területű, mint a képe!

M43b: Adjunk meg olyan térbeli háromszöget, amely kétszer akkora területű, mint a képe!

Vannak olyan pontok is, melyeknek nincs képük, ezekről később esik szó. A most tárgyalt transzformációt a geometriában **centrális projekciónak** nevezik, de nevezhetjük magyarul akár „ponton át síkra vetítésnek” is.

A megfelelő transzformáció tehát megvan, de hogyan lehet térbeli pontokat egy számítógépnek megadni? A legegyszerűbb: térbeli koordináta-rendszerrel. Az általános iskolában tanult síkbeli xy -koordináta-rendszerhez vegyünk fel egy harmadik tengelyt, vagyis egy „ z ” számegyeneset, mely az xy síkra merőleges, ugyanolyan skálázású, mint a két eddigi tengely (ugyanakkora rajta az egység), s áthalad az origón. Egy térbeli P pontból



mindhárom tengelyre merőlegest bocsátunk a térben, a merőlegesek talppontjai (a három számegyenesen ezek számok) adják $(x; y; z)$ sorrendben a P pont három koordinátáját. Ezek ugyanazok a számok lesznek, mintha a P pont yz , xz és xy síktól vett előjeles távolságát tekintenénk (Lásd az ábrát!).

Hogyan lehet térbeli koordinátákkal számolni?

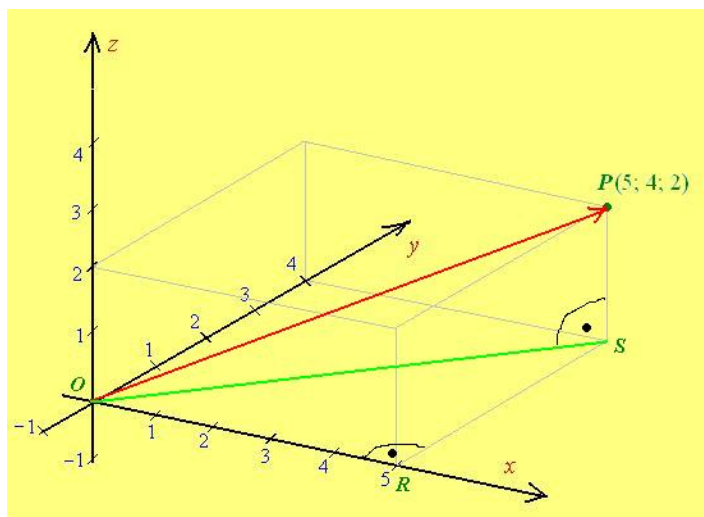
Szeretnénk egyenesekkel, síkokkal dolgozni, szeretnénk eltolást és elforgatást végezni. A legegyszerűbben helyvektorokkal lehet számolni. A helyvektorok origó kezdőpontú vektorok, tehát elég a végpontjuk három koordinátáját megadni, ha jellemezni akarjuk őket. Például az ábrán látható P pontba mutató helyvektor: $\vec{v}(5; 4; 2)$

Ha egy pontot egy vektorral eltolunk, akkor koordinátáinként össze kell adnunk a pont és a vektor koordinátáit. Például ha az ábrán látható P pontot eltoljuk a $\vec{w}(3; 10; -8)$ vektorral, akkor a $P'(8; 14; -6)$ pontot kapjuk.

Két pontot összekötő „szabad” vektort úgy kaphatjuk meg helyvektorként, hogy a vektor végpontjának koordinátaiból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit. Például az A $(3; 7; 11)$ és a B $(10; -1; 6)$ pontok esetében $\vec{AB} = \vec{u}(7; -8; -5)$.

Egy vektor „számszorosát” úgy kaphatjuk meg, hogy a vektor mindhárom koordinátáját megszorozzuk az adott számmal. Például a $\vec{v}(8; -4; 5)$ vektor másfélszerese (azaz 1,5-szerese) a $\vec{v}'(12; -6; 7,5)$ vektor. Ez $\vec{v}$ -vel egy egyenesbe eső helyvektor, de a hossza másfélszerese az eredeti vektorénak. A szorzószám lehet negatív is, ekkor a kapott vektor hossza ugyanúgy változik, mint pozitív lenne szorzószám esetében, de a kapott vektor az eredetivel ellentétes irányba mutat. Ha a szorzószám 0, akkor a végeredmény $\vec{v}'(0; 0; 0) = \vec{0}$, azaz nullvektor.

Ha egy térbeli vektor hosszát akarjuk meghatározni, például az $\vec{OP}(5; 4; 2)$ vektorét, akkor az ábrán látható OSR térbeli derékszögű háromszögből kiszámolhatjuk Pitagorasz tételével, hogy $OS = \sqrt{5^2 + 4^2}$, majd az OSP térbeli derékszögű háromszögből kiszámolhatjuk Pitagorasz tételével, hogy $OP = \sqrt{OS^2 + 2^2} = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{45}$ egység. Általánosságban mondhatjuk, hogy egy vektor hosszát megkapjuk, ha három koordinátájának négyzetösszegéből gyököt vonunk. Ez negatív koordináták esetén is igaz,



hiszen a háromszögek oldalai pozitív számok, és egy számnak és az ellentettjének ugyanaz a négyzete. Könnyű kiegészíteni az okoskodást arra az esetre is, ha a vektornak van 0 koordinátája, a képlet akkor is helyes.

Ha két pont közti szabad vektorból helyvektort készítünk, majd a kapott vektor hosszát kiszámítjuk, megkapjuk az eredeti két pont távolságát!

A következő állítás is érdekes: Ha $\mathbf{a}(x_a; y_a; z_a)$ és $\mathbf{b}(x_b; y_b; z_b)$ vektorok egyike sem nullvektor, akkor merőlegességük szükséges és elégséges feltétele, hogy $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$ legyen. A bizonyítás a honlapon megtalálható – aki vektorok skaláris szorzatának fogalmát ismeri, annak persze ismert ez az állítás.

M44a: Igazoljuk az eddigiek alapján: Ha egy S síkra az $\mathbf{n}_S(A; B; C)$ (nem null-) vektor merőleges, és a sík egy pontja a $P_0(x_0; y_0; z_0)$, akkor a tér $P(x, y, z)$ pontjai közül pontosan azok vannak az S síkon, melyekre igaz az $Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ egyenlőség. (I)

M44b: Az eddigiek és az M44a alapján írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely áthalad a következő három ponton: A(10; 20; 0), B(11; 7; 5) és C(20; 2; 2)!

Az M44a-ban szereplő egyenlőséget az S sík egyenletének nevezzük, az $\mathbf{n}_S$ vektort pedig a sík (egy) normálvektorának. Ha a sík egyenletében $A=0$, akkor a sík párhuzamos¹ az x tengellyel, ha $B=0$, akkor a sík párhuzamos az y tengellyel, ha $C=0$, akkor a sík párhuzamos a z tengellyel. Ez abból adódik, hogy a leírt három esetben az $\mathbf{n}_S$ vektor merőleges egy megfelelő koordinátatengelyre.

Ha egy $P(x, y, z)$ pont koordinátái két nem párhuzamos sík egyenletét egyszerre teljesítik, akkor rajta van a síkok metszéspontján. Így felírhatjuk egy e egyenes egyenletrendszerét, ha két e -t tartalmazó sík egyenletét felírjuk.

Van egyszerűbb módszer is. Legyen egy e egyenes egy pontja $P_0(x_0; y_0; z_0)$ és $\mathbf{v}_e(F; G; H)$ (nem null-)vektor párhuzamos az e egyenessel (irányvektora e -nek)! Ekkor az egyenes bármely $P(x; y; z)$ pontjának három koordinátáját megkaphatjuk, ha P_0 pontot eltoljuk a $\mathbf{v}_e$ vektor „valahányszorosával”. Jelöljük ezt a szorzószámot t -vel! Tehát az egyenesen levő P pontok három koordinátáját a következő képletek adják:

$$\begin{cases} x = Ft + x_0 \\ y = Gt + y_0 \\ z = Ht + z_0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

Ha t értékét tetszőlegesen változtatjuk, akkor a kapott x , y és z értékek mindig az e egyenes egy-egy pontjának három koordinátáját adják. A fenti három összekapcsolt egyenlőséget az egyenes egyenletrendszerének nevezzük. Könnyű belátni, hogy az egyenes összes pontja előáll a t érték megfelelő megválasztásával, $t=0$ esetén pedig épp a P_0 pontot kapjuk (mert nullvektorral toltuk el).

Keressük meg például az A(2; 5; 8) és B(10; -1; 6) pontokon átmenő egyenes egyenletrendszerét! $\overrightarrow{AB}$ helyvektorként felírva az egyenes egy irányvektora lesz: $\mathbf{v}_e(8; -6; -2)$. Az egyenesen levő P_0 pont legyen az A pont (lehetne ez akár a B is). Így az egyenes egyenletrendszere:

¹ A „párhuzamos” szó ez esetben azt is jelentheti, hogy a sík tartalmazza a megfelelő tengelyt.

$$\begin{cases} x = 8t + 2 \\ y = -6t + 5 \\ z = -2t + 8 \end{cases}$$

Ha például t értékét 5-nek választjuk, akkor $x = 42$; $y = -25$; $z = -2$, vagyis az e egyenesnek egy pontja $Q(42; -25; -2)$.

A fenti egyenletrendszer mindhárom egyenletéből kifejezhetjük t értékét, s egyenlővé tehetjük egymással a kapott képleteket: $\frac{x-2}{8} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-8}{-2} (=t)$. Az egyenes egyenletrendszerét ilyen alakban is meg szokták adni. Ehhez persze az szükséges, hogy az irányvektor egyik koordinátája se legyen 0 (mivel ezek a koordináták kerültek a három nevezőbe).

M45: Állapítsd meg a sík egyenlete és az egyenes egyenletrendszere segítségével kétféleképpen is, hogy egy síkba esik-e a következő négy pont: $A(5; 1; -5)$, $B(7; 6; -8)$, $C(1; 3; 2)$, $D(-3; 17; 10)$!

M46: Keresd meg a fenti egyenes következő tulajdonságú pontjait:

- rajta vannak az xy síkon,
- az A ponttól négyszer olyan távol vannak, mint a B ponttól,
- az origótól $\sqrt{237}$ egységnyi távolságra vannak,
- az egyenesen levő pontok közül az origóhoz legközelebbi pont!

M47: Egy síknak több (I) alakú egyenlete, egy egyenesnek több (II) alakú egyenletrendszere van. Add meg, hogy egy síkegyenletből, illetve egyenes-egyenletrendszerből hogyan kapható meg az összes többi!

Most már eleget tudunk ahhoz, hogy kiszámíthassuk térbeli pontok síkbeli képét. Válasszunk egy síkot, amelyre vetítünk, és válasszunk egy pontot, amelyen keresztül vetítünk!

Legyen az S sík egyenlete $3x-5y+2z = 43$, a „vetítési” pont pedig az $F(4; 1; -2)$ pont. Határozzuk meg a $P(7; 2; 6)$ pont vetített képét az S síkon! Ehhez az FP egyenes és az S sík dőfspontját kell meghatározni. Az $\overrightarrow{FP}$ vektor az egyenes irányvektora: $\mathbf{v}_e(3; 1; 8)$. Az FP egyenes egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = t + 1 \\ z = 8t - 2 \end{cases}$$

A dőfspont három koordinátája teljesíti az egyenes egyenletét, tehát oda beírva igaz egyenlőséget ad: $3(3t+4) - 5(t+1) + 2(8t-2) = 43$. Ezt megoldva $t=2$ adódik, tehát az egyenes egyenletrendszerébe visszahelyettesítve $P'(8; 3; 14)$ a vetületi pont.

Az egyszerűség kedvéért választhatjuk S síknak a $z=1$ egyenletű síkot és F pontnak az origót. Ekkor a kapott képpontok x és y koordinátáit rögtön meg is jeleníthetjük egy síkbeli koordináta-rendszerben, s az a helyes látott képet fogja adni. Excelben elkészítettem egy olyan munkalapot, amelyben térbeli pontokat lehet koordinátákkal megadni, az Excel kiszámolja a vetületi pontok koordinátáit, s a „Pont(XY)” grafikontípus segítségével „drótvázás” test képeként kirajzolja azt.

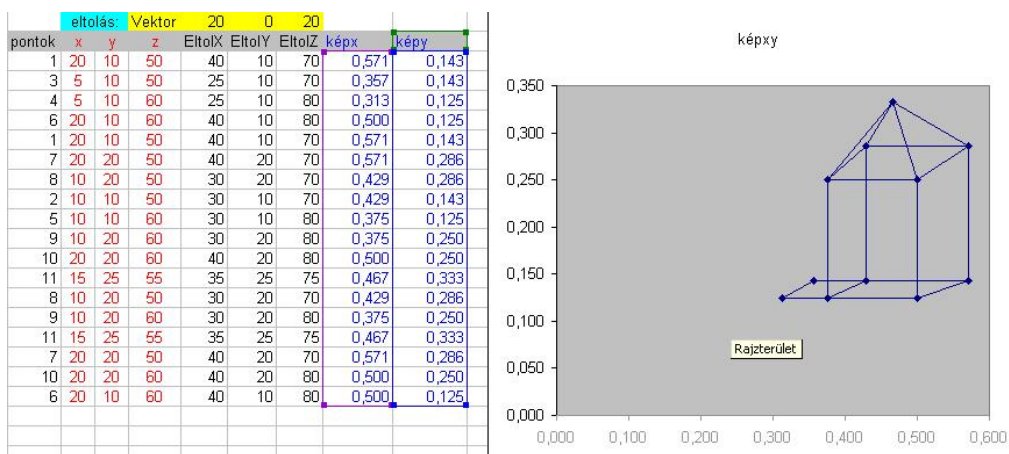
Arra kellett ügyelni, hogy az egymás után következő pontokat sorban köti össze az Excel szakaszokkal, azok x és y koordinátáiból álló cellapárokat kell megadni. A munkalaphoz tartozó Excel segédfájl bemutatja a Pont(xy) grafikon használatát.

M48a: Készíts egy ilyen Excel munkalapot valamely egyszerű testről!

M48b: A fentiekben szerepelt, hogy bizonyos térbeli pontoknak nincs síkbeli vetített képük. Melyek ezek?

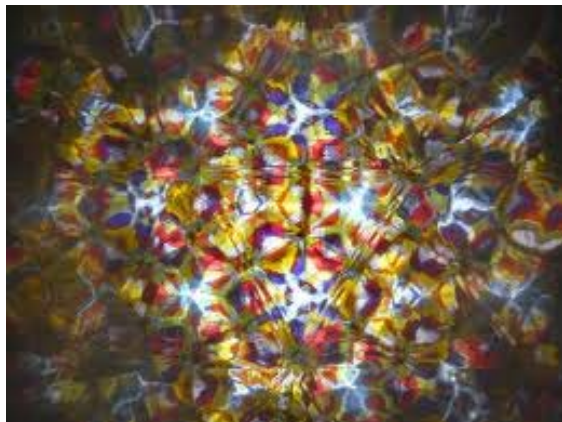
M49: Ábrázold a $P(10; 10; -10)$ és a $Q(10; 10; 10)$ pontokat összekötő szakasz képét az Excellel! Tapasztalatod alapján javíts a munkalapod képletein úgy, hogy ne fordulhasson elő ilyen ábrázolás! („Rossz” helyen levő pontok esetében ne ábrázolja a gép a megfelelő pontokat, használd a HA() függvényt!)

M50: Készíts olyan Excel táblázatot, amely összetettebb alakzat síkbeli képét mutatja! A táblázatot kiegészítheted plusz szolgáltatásokkal is (eltolás, esetleg elforgatás lehetősége)!



Az ábrán egyszerű ház látható egy lábtörlővel. Mintha fénykép lenne! A kész rajzon megfigyelhető, hogy a z tengely irányába eső párhuzamosok „összetartanak”, az x tengely és y tengely irányába eső párhuzamosok pedig nem. Hogy miért? Érdekes elgondolkodni rajta, bár túlmutat e munkalap keretein...

Tengelyes tükrözések szorzata Biliárd-matematika



Geometriai transzformációknak azokat a függvényeket nevezzük, amelyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz, azaz pontokhoz pontokat rendelnek. Ez a munkalap csak síkbeli transzformációkkal foglalkozik.

Ha két transzformációt egymás után alkalmazunk, akkor a két transzformáció szorzatát (egymásutánját, kompozícióját) kapjuk. Úgy jelöljük, hogy a transzformációk jeleit egymás után írjuk. E definíció kettőnél több transzformáció esetén is értelmes. A

kaleidoszkópban látott kép például tükrözések szorzatából keletkezik.

Transzformációk szorzata esetén a pontok képét „vesszőzéssel” jelöljük: ha elvégzünk egy transzformációt, akkor egy P pont képét (azt, amit a transzformáció, mint függvény a P -hez rendel) P' -vel jelöljük. Erre egy újabb transzformációt alkalmazva a kép képét P'' -vel jelöljük, erre a kapott képre egy újabb transzformációt alkalmazva a kapott pontot P''' -vel jelöljük stb.

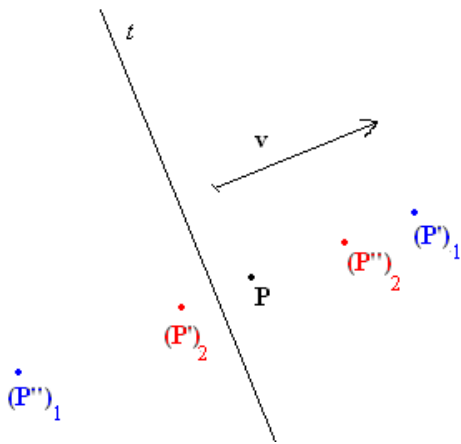
Ha egy t egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözést csak t -vel jelölünk, általában nem vezet félreértésre. Ugyanígy egy v vektorral való eltolást jelölhetünk csak v -vel. Ha egy P pont egy elforgatás középpontja, és α a szöge, akkor jelölhetjük P^α -val.

Megállapítható, hogy a transzformációk szorzata általában nem felcserélhető. Ha például a sík pontjaira elvégzünk egy v vektorral való eltolást, majd egy rá merőleges t_1 tengelyre tükrözünk, akkor két különböző transzformációt kapunk eredményül. Az ábráról leolvasható, hogy a vt_1 és t_1v transzformációk más pontot rendelnek az ábrán látható P ponthoz. Az első esetben a $(P'')_1$, a második esetben pedig a $(P'')_2$ pontot.

Bármely három g_1, g_2, g_3 transzformáció (két szorzásból álló) szorzatára érvényes a következő összefüggés: $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$.

Ez abból következik, hogy minden P -hez ugyanazt a P''' -t rendeli mindkét transzformáció-szorzat.

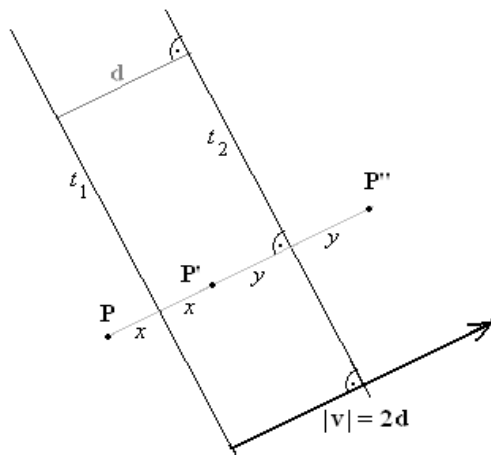
Vizsgáljuk meg általános és középiskolából ismert távolságtartó transzformációk szorzatát! Milyen transzformációt adhat **két tengelyes tükrözés szorzata**? Jelöljük az egyik tengelyt t_1 -gyel, a másikat t_2 -vel!



Ha a két tükrözés tengelye azonos ($t_1=t_2$), akkor a két tükrözést egymásután elvégezve minden ponthoz önmagát rendeljük hozzá. E transzformációt identitásnak vagy identikus transzformációnak nevezzük. Jelölése: $t_1 t_1 = id$.

Ha a két tükrözés tengelyei párhuzamosak, akkor szorzatként egy olyan eltolást kapunk, melynek vektora merőleges mindkét tengelyre, hossza kétszerese a tengelyek távolságának, s iránya a t_1 -től a t_2 felé mutat. Ezt az ábra igazolja arra az esetre, amikor a P pont és a t_2 egyenes a t_1 egyenes különböző oldalán fekszik, P' pedig a két tengely között van.

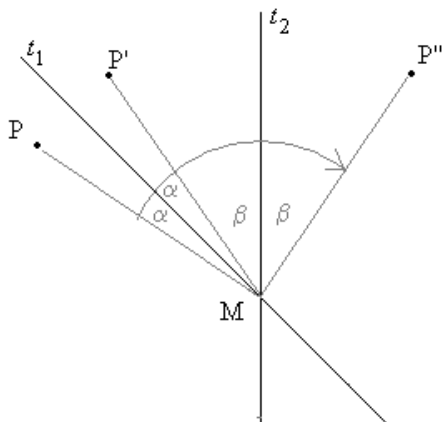
Megfigyelhető, hogy a tengelyek iránya és távolsága egyértelműen meghatározza a szorzatként kapott eltolást. Bármilyen vektorral eltolhatjuk a síkban a két tengelyt, így mindig ugyanazt az eltolást adja a $t_1 t_2$ szorzat.



Ha a két tükrözés tengelyei metszik egymást, akkor szorzatként egy olyan elforgatást kapunk, amelynek középpontja a tengelyek

metszéspontja, az elforgatás szöge pedig kétszerese a tengelyek t_1 -től a t_2 felé mutató szögének. Ezt az ábra igazolja arra az esetre, amikor a P, P' és P'' pontok a „lehető legegyszerűbben” helyezkednek el. (Az állítás itt az irányított szögekre felírt $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 2(\alpha + \beta)$ egyenlőségből, illetve a $PM = P'M = P''M$ egyenlőségből következik.)

Megállapíthatjuk, hogy a tengelyek metszéspontja és szöge egyértelműen meghatározza a szorzatként kapott elforgatást. Bármilyen szöggel elforgathatjuk a síkban M körül a két



tengelyt, így mindig ugyanazt az elforgatást adja a $t_1 t_2$ szorzat.

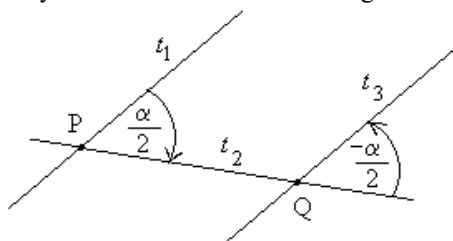
Megfigyelhető, az is az eddigiekben, hogy két körüljárásfordító tükrözési transzformáció szorzata körüljárástartó lett.

M61: A fenti két ábra csak bizonyos esetekre ad bizonyítást. Egészítsük ki a két bizonyítást t_1 , t_2 és P minden elhelyezkedése esetére!

Közismert, hogy két eltolás szorzata eltolás. De milyen transzformáció két elforgatás szorzata? Több esetet vizsgálunk meg.

Lehet a két szög egymás ellentettje, így a két forgatás P^α és $Q^{-\alpha}$. Jelöljük ekkor t_2 -vel a PQ

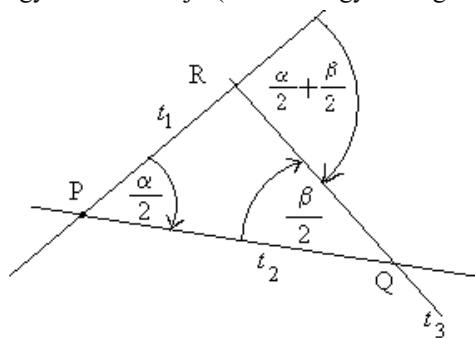
egyenes, az ezzel $\frac{\alpha}{2}$ szöget bezáró, P-n áthaladó



egyenes legyen t_1 és a t_2 -vel $-\frac{\alpha}{2}$ szöget bezáró, Q-n áthaladó egyenes neve legyen t_3 az

ábra szerint. Így $P^\alpha = t_1 t_2$ és $Q^{-\alpha} = t_2 t_3$, azaz $P^\alpha Q^{-\alpha} = (t_1 t_2)(t_2 t_3) = t_1(t_2 t_2)t_3 = t_1 t_3$. De így éppen két párhuzamos tengelyre való tükrözés szorzatát kaptuk, azaz eltolás lesz az eredmény.

Ha a két forgatás P^α és Q^β , és a két szög nem egymás ellentettje (valamint egyik szög ellentettje sem 360° többszörösével való elforgatottja a másik szögnek), akkor az előzőekhez hasonlóan vehetőek fel a t_1, t_2, t_3 tengelyek, $P^\alpha = t_1 t_2$ és $Q^\beta = t_2 t_3$. Emiatt pedig $P^\alpha Q^\beta = (t_1 t_2)(t_2 t_3) = t_1(t_2 t_2)t_3 = t_1 t_3 = R^{\alpha+\beta}$. Tehát két elforgatás szorzata ebben az esetben egy olyan elforgatás, amelynek szöge az eredeti elforgatások szögeinek összege. Az állítás triviálisan igaz a $P=Q$ esetre is.



M62a: Igazoljuk hasonló módon, hogy egy v eltolás és egy P^α elforgatás szorzata egy α szögű elforgatás, ha $\alpha \neq k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$)!

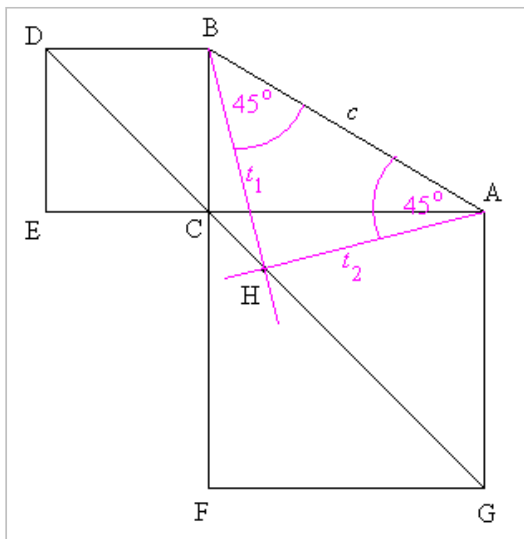
M62b: Igazoljuk, hogy négy tengelyes tükrözés szorzata mindig helyettesíthető két megfelelő tengelyes tükrözés szorzatával!

Az M62b állításból következik, hogy akármennyi tengelyes tükrözés szorzata felírható legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként.

Hogyan használhatjuk a fentebbi megállapításokat feladatok megoldására? Nézzünk egy példát erre:

Feladat: Egy ABC derékszögű háromszög AC és BC befogói fölé megrajzoljuk a CBDE és ACFG négyzeteket. Legyen H a DG szakasz felezőpontja. Igazoljuk, hogy ABHC húrnégyszög!

Megoldás: Az ábra szerint vegyük fel az AB szakasszal A-nál és B-nél 45° -ot bezáró t_1 és t_2 egyeneseket! Végezzük el a $B^{90^\circ}A^{90^\circ}$ transzformációt, amely két elforgatás szorzata. Ez a transzformáció a D pontot (a C ponton „keresztül”) G-be viszi. Ugyanakkor az ábra jelöléseivel felírva ez azonos a $(t_1 c)(c t_2) = t_1(c c)t_2 = t_1 t_2$ transzformációval, ami a fentebbiek alapján egy $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ -os elforgatással egyenlő. Az elforgatás középpontja a már bizonyítottak alapján a t_1 és t_2 tengelyek metszéspontja. Másrészt ez a pont, a D-t G-be vivő 180° -os elforgatás középpontja csak H lehet. Tehát BAH háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög. A háromszög derékszögű H csúcsa rajta



van az AB átfogó Thalész-körén. Ugyanezen a körön rajta van a Thalész-tétel miatt az ABC háromszög derékszögű C csúcsa is. Így ez a kör tartalmazza az A; B; C; és H pontokat, melyek emiatt egy húrnégyszög csúcsai.

A következő feladatokat próbáljuk transzformációk szorzatának felhasználásával megoldani! (Más jellegű megoldás is lehetséges persze, de szokjuk csak meg a „transzformációs” gondolkozást!)

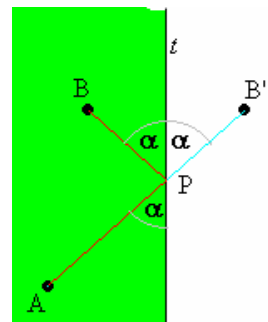
M63: Rajzoljunk ABC hegyesszögű háromszög AC és BC oldalaira kifelé egy ACD és egy BEC szabályos háromszöget! Rajzoljunk az AB oldalra a háromszög belsejébe egy olyan egyenlő szárú ABF háromszöget, amelynek AB az alapja és alapon fekvő szögei 30° -osak! Igazold, hogy DEF háromszög egyenlő szárú! Mekkora a szögei?

M64: Rajzoljunk ABC hegyesszögű háromszög AC és BC oldalaira kifelé egy ACD és egy BEC egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek átfogói AC és BC! Legyen F az AB oldal felezőpontja! Határozd meg DEF háromszög oldalainak arányát!

M65: Az A, B, C, D, E, F pontok úgy helyezkednek el a síkon, hogy ABC, ADE és CDF pozitív körüljárású szabályos háromszögek. Igazold, hogy AEFB paralelogramma!

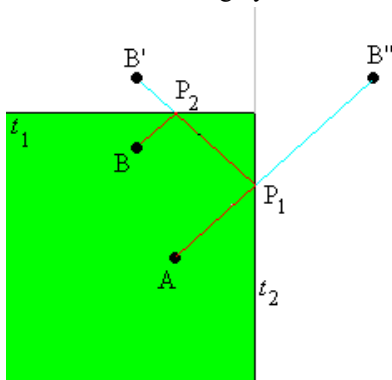
M66: Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalán fekszik P pont, BC oldalán Q pont, AC oldalán pedig az R és S pont úgy, hogy $AP=AS$, $BP=BQ$ és $CQ=CR$. Igazold, hogy PQRS húrnégyszög!

A mindennapi életben is találunk példát tengelyes tükrözések szorzatára. Bizonyára sokan találkoztak már ezzel a problémával: Milyen irányban kell meglökni egy biliárdgolyót, hogy a falról visszapattanva (tökéletesen rugalmas ütközést feltételezve) eltalálja a másik golyót? Az ábrán az A jelű golyóval kell a B jelűt eltalálni. A falra, mint tengelyre tükrözzük a B golyót és az AB' szakasz adja a lökés irányát. A megoldás helyes, mert a jelzett α szögek a tükrözés miatt egyenlők lesznek.



Ha két falat kell a golyónak érinteni, akkor ugyanez a helyzet,

csak a B' -t tovább kell tükrözni a másik falra. Így a B'' és A pontok összekötő szakasza adja a helyes megoldást. Az ábra tanulmányozása és a fentebb elmondottak alapján már megoldható a következő néhány feladat:



M67: Egy téglalap alakú, 90 széles és 180 cm hosszú biliárdasztalon van egy golyó. A golyó két szomszédos saroktól 50 cm-re, illetve $20\sqrt{13}$ cm-re van. Milyen irányban kell a golyót meglökni, hogy mind a négy falról egyszer visszapattanva visszatérjen eredeti helyére?

M68: Egy konvex négyszög alakú biliárdasztalon van egy golyó. A feladatunk, hogy megadjuk, milyen irányban kell a golyót meglökni, hogy mind a négy falról egyszer visszapattanva visszatérjen eredeti helyére. A tükrözések szorzatáról elmondottak alapján adjunk minél egyszerűbb megoldást a kellő irány megszerkesztésére, s illusztráljuk egy (lehetőleg nem speciális) példával a megoldás menetét!

M69: Egy biliárdasztal csúcsai a koordináta-rendszerben a következő pontok: $A(0;0)$, $B(0;6)$, $C(12;6)$ és $D(6;0)$. Egy biliárdgolyó a $P(4;2)$ koordinátájú helyen áll. A golyót meglökvé, az AD, AB, BC, CD falról ilyen sorrendben visszapattanva visszatér a golyó az eredeti helyére. Számítsuk ki a golyó útját leíró négy egyenes egyenletét!

M70: Egy ABCD biliárdasztal húrnégyszög alakú. Igazoljuk, hogy ha két golyóra teljesül, hogy azokat meglökvé, az AD, AB, BC, CD falról ilyen sorrendben visszapattanva visszatérnek az eredeti helyükre, akkor a golyókat egymással párhuzamosan löktük meg!



A valódi biliárdban persze nem teljesen rugalmasak a falak, s nem teljesen egyenesen gurul a golyó. A játékosoknak nincs lehetőségük méréseket, geometriai számításokat, szerkesztéseket elvégezni, s ha el is végeznék, nem tudnák precízen kivitelezni a még oly pontosan kiszámított lökést sem.

De hisz épp ez adja a játék izgalmát!

Börtön-kombinatorika

E munkalap témája a kombinatorika, ez speciális véges halmazok elemszámának meghatározásával foglalkozó tudományág. Hogy mindent pontosan értsünk, kezdjünk egy kis elméleti áttekintéssel!

Elméleti áttekintés

Ha egy n elemű halmaz elemeit sorba rendezzük, akkor e sorbarendezéseket az n elem permutációinak nevezzük (szakkifejezéssel: ezek rendezett n -esek). Mivel a sorban első elemet n -féleképpen választhatjuk, s az n -féle kezdést $n-1$ -féle második elemmel folytathatjuk, s az így kapott $n \cdot (n-1)$ -féle „kételemes” kezdést $n-2$ -féleképpen folytathatjuk stb., ezért az összes lehetőségek száma: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Ezt a számot az $n!$ jelöléssel rövidítjük (kiejtés: *n faktoriális*). Pl.: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait ($n \geq k$) az n elem k -adosztályú kombinációinak nevezzük. Itt, mivel halmazról van szó, nem számít az elemek sorrendje! Számoljuk össze az eseteket úgy, hogy a sorrend lényeges legyen, azaz képezzünk rendezett k -asokat az összes lehetséges módon az n elemből. Ekkor a sorban első elemet n -féleképpen választhatjuk, s az n -féle kezdést $n-1$ -féle második elemmel folytathatjuk, s az így kapott $n \cdot (n-1)$ -féle „kételemes” kezdést $n-2$ -féleképpen folytathatjuk stb., ezért az összes lehetőségek száma: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot q$, ahol a q értékét úgy kell választani, hogy összesen k darab szám legyen szorozva. (Ekkor $q = n - k + 1$, kiszámolható.) Minden egyes k -elemű részhalmazt most $k!$ -szorosán számoltunk, hisz elemeinek minden lehetséges sorrendje szerepel a kapott rendezett k -asok között. Emiatt el kell osztani a lehetséges rendezett k -asok számát $k!$ -sal, hogy megkapjuk, hányféle lehetőség van, ha a sorrend nem számít:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{k! \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Erre az értékre van egy rövid jelölés is:

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

(kiejtés: „ n ” alatt a „ k ”). Példa:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 56$$

A kombinációk számát leíró számokat binomiális együtthatóknak nevezzük. Számos tulajdonságuk ismert. Néhányat most kombinatorikai módszerekkel fogunk belátni.

$$(0.) \quad \binom{n}{0} = 1, \text{ valamint } \binom{n}{1} = n$$

Az első állítás azért igaz, mert 0 elemű részhalmaza minden halmaznak csak egy van, az üres halmaz. A második állítás azért igaz, mert minden halmaznak annyi egyelemű részhalmaza van, ahány eleme van.

$$(1.) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ez igaz, mivel az n elemű halmaz minden k elemű részhalmazát párba állíthatjuk saját $(n-k)$ elemű komplementerével, így annyi k elemű részhalmaz van, mint ahány $n-k$ elemű.

$$(2.) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

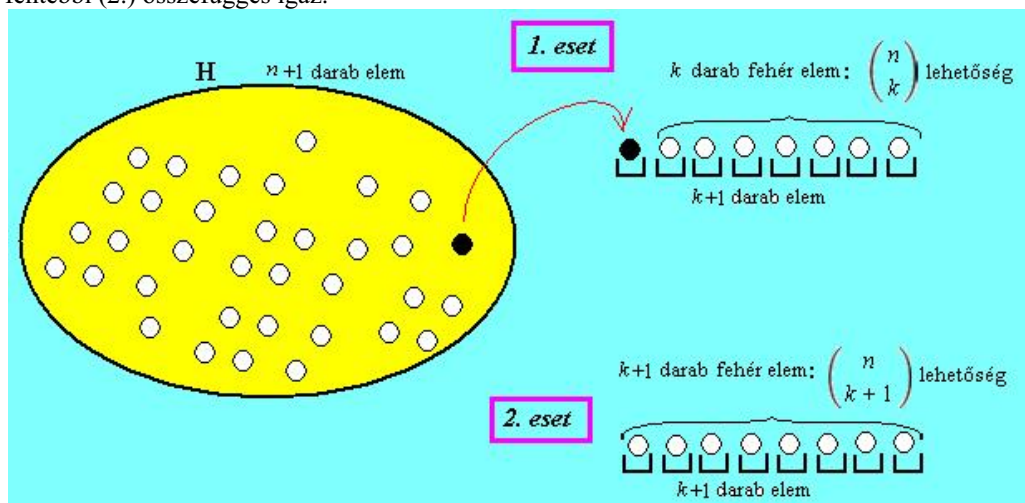
Ennek igazolásához tekintsünk egy olyan $n+1$ elemű halmazt, melynek n darab eleme „fehér”, egy eleme pedig „fekete”. Válasszunk ki az összes lehetséges $k+1$ elemű

részhalmazt! Az ilyen részhalmazok száma a fentiek alapján $\binom{n+1}{k+1}$.

Ugyanezeket a részhalmazokat összeszámolhatjuk úgy is, hogy külön számoljuk a fekete elemet tartalmazó részhalmazokat, illetve azokat, amelyek csupa fehér elemeket tartalmaznak. Az első esetben n darab fehér közül kell k darabot választani a fekete mellé, a második esetben az n darab fehér közül kell az összes $k+1$ darab elemet kiválasztani. Ha

így számoljuk össze a $k+1$ elemű részhalmazokat, akkor ennyi t kapunk: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Mivel mindkétszer ugyanarra a feladatra adtunk eredményt, a két darabszám egyenlő, s a fentebbi (2.) összefüggés igaz.



$$(3.) \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

A bal oldalon egy n elemű halmaz $0, 1, 2, \dots, n$ elemű részhalmazainak számát adtuk össze, tehát itt egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma áll. Az n elemű halmaz minden részhalmazát elkészíthetjük úgy, hogy az n elem mindegyikéről eldöntjük, "be vesszük-e", vagy kihagyjuk a készülő részhalmazból. Így minden elemnél kétféle döntést hozhatunk, tehát a lehetséges döntés-sorozatok száma 2^n . Épp ez a szám áll a jobb oldalon.

Alapfeladatok táblázata: <http://slc.pszk.nyome.hu/file.php/5/munkalap8/kombinat.doc>

Igazoljuk a következő azonosságokat hasonló modellekkel, „kombinatorikus” úton (n és k pozitív egészeket jelentenek)!

$$M71: \quad \binom{n}{10} + \binom{n-1}{10} + \dots + \binom{10}{10} = \binom{n+1}{11} \quad ,ha \quad n > 10$$

$$M72: \quad \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$M73: \quad \binom{n}{0} \binom{2n}{n} + \binom{n}{1} \binom{2n}{n+1} + \dots + \binom{n}{n} \binom{2n}{n} = \binom{3n}{n}$$

A következő feladatok egy képzeletbeli állam képzeletbeli börtönéről, azon belül is a „kasszaőr cella” tíz lakójáról szólnak. Különbő okokból az elítéltek életében fontos szerepet játszik a kombinatorika.

Persze a történetnek csak a matematikai részét vegyük komolyan! 😊

A börtön egyik lakója (kérte, hogy nevét ne írjuk le, ezért itt A-nak nevezzük) azért került ide, mert feltört egy széfet, és elrabolta belőle a drágaköveket. Az ítélethirdetésnél a bíró kijelentette, hogy A. a széfet becsületesen is kinyithatta volna, ha a zár minden kombinációját kipróbálja. Azt a büntetést szabta ki, hogy annyi órát töltsön a börtönben az elítelt, ahányféle lehetőség lett volna a széf zárján. Az elítelt ügyvédje fellebbezett a túlzott büntetés miatt, mivel a széf kódja kilencjegyű volt, s mindegyik jegye egy számjegy lehetett (0-tól 9-ig). Azt kérte, hogy enyhítsék a büntetést csak olyan kódszámok darabszámára, melyben a számjegyek szigorúan monoton növekednek. A fellebbezést nem fogadta el a bíróság, de enyhítette a büntetést a monoton növekvő kódok számának megfelelő órára.



M74a: Hány év lett volna a büntetés eredetileg?

M74b: Mennyi ideig tartott volna az ügyvéd által javasolt büntetés?

M74c: Mennyi ideig tart a végső büntetés?

Két másik rab, B. és C. szintén egy drágaköveket tartalmazó széf feltörése miatt került a börtönbe, ketten törtek fel egy olyan páncélszekrényt, amelynek kódja tízjegyű volt, s mindegyik jegye egy számjegy lehetett (0-tól 9-ig). Mindketten szereztek egy információt a kódról, de két információjukat nem tudták felhasználni, ezért végül felrobbantották a széfet.

A kódról B. azt az információt szerezte, hogy a kódszám jegyeinek összege 45, míg C. azt tudta meg, hogy a kód a jegyeit váltakozó előjellel összegezve (+; -; +; -; ...) nullát ad.

A bíróság mindkettejükre azt a büntetést mérte, hogy egyikük is, másikuk is annyi napot töltsön a börtönben, amennyi kód megfelelne az információjuknak.

M75a: Hány kód felel meg egyszerre mindkét információnak?

M75b: Kettejük közül B. vagy C. büntetése súlyosabb?

A negyedik rab, D. is egy ugyanilyen típusú (10 számjegy 0-9-ig) széfet tört fel. Neki az az információja volt a kódról, hogy a benne szereplő számjegyek összege 85. Ezen a széfen egy kód beállítása és a kinyitás próbálása 20 másodpercet vett igénybe, ezért úgy gondolta, hogy egy éjszaka alatt az összes kódot végig tudja próbálni. Pechje volt, reggel ott találták még a páncélszekrény mellett, amint karikás szemekkel próbálgatta a lehetőségeket.

M76: Mennyi időbe telt volna D-nek az összes kód kipróbálása?

Ilyen típusú széfet akart feltörni az ötödik és hatodik rab, E. és F. is. Közülük E. azt az információt szerezte, hogy a kódban nem szerepel 0 számjegy, a F pedig, hogy legfeljebb háromféle számjegy van benne. Persze hiába volt a két információ, még mindig rengeteg lehetőség maradt a kódra, így tehát nem tanakodtak rajta, hanem egy ütvefűróval feltörték a széfet, elvitték a tartalmát, és elmenekültek. Egy hét múlva épp egy szép vörös rubinon próbáltak túladni, amikor a rendőrök lefogták őket. Ugyanaz a bíró ítélte el őket, aki A-t, B-t, és C-t is, így nem csodálkozhatunk, hogy az ítélet szerint annyi percet kell letölteniük a börtönben, ahányféle lehetőségük lett volna a kódszámra a két információ birtokában.



M77: Hány napot, hány órát és percet kell tehát az „intézményben” tölteniük?

Az a négy cellatárs, G. H. I. és J., akikről még nem esett szó, szintén kasszafűró. Ötödik társuk, K. adta fel őket a rendőrségen, azért kerültek ide. A kasszával minden a terv szerint ment nekik, de az osztozkodásnál alig tudtak megegyezni. Apró ékköveket találtak a kasszában, ezek sorszámozva voltak 1-től kezdve sorban az utolsóig. Végül az osztozásra ezt találták ki: először G. elveszi azokat az ékköveket, amelyeknek sorszáma ötten osztható, utána H. elveszi a maradék kövek közül azokat, amelyek sorszáma néggyel osztható, aztán I. elveszi a maradékból a 3-mal osztható sorszámuakat, végül a maradékból J. elveszi a páros sorszámuakat. Az ezután megmaradt kövek K. tulajdonát képezik. Tudjuk, hogy a főnök kapta a legtöbb ékkövet, második legtöbbet a sofőr, utánuk következett a két kasszafűró azonos díjazással, végül a legkevesebbet az utcai figyelő kapta. Tudjuk, hogy K. 44 darab ékkövet kapott, s tudjuk továbbá, hogy a kövek száma 200-nál kevesebb volt.

M78a: Pontosan hány ékkő volt a zsákmány?

M78b: Kinek milyen feladata volt a bandában?

A rabok életében fontos szerepet játszik a cella takarítása, minden napon más takarít. Sorsolással tervezik meg mindig egy tíznapos időszakra a takarítást, úgy, hogy egy emberre ne kerüljön sor túl sűrűn: ügyelnek rá, hogy aki többször is takarít a tíz napban, a két takarítása között legalább három pihenőnapja legyen. Persze aki szerencsés – „mákos”, az a tíz napban egyszer sem takarít.

M79: Hányféleképpen lehet a feltételnek megfelelően úgy sorsolni a tíznapi takarítási rendet, hogy J. ne legyen „mákos”?

Egy alkalommal nagy lehetőség kínálkozott a tíz rab számára: uralkodói rendelet jött, hogy mind a tízen kiszabadulhatnak, ha teljesítenek egy próbát. A próba ez: a rabok sorszámaikat (az 1-10-ig terjedő számokat) felírják egy-egy papírra, s a tíz papírlapot valamilyen sorrendben lerakják a börtönigazgató szobájának asztalára. A rájuk írt számok nem látszanak, mert a lapok hátlappal felfelé fekszenek. Sorban engedik be a rabokat, a szoba egyik ajtaján, mindenki felfordíthat öt lapot, megnézheti, majd pontosan ugyanúgy vissza kell raknia a kártyákat (örök ügyelnek a szabályok betartására). Ezután a rabnak távoznia kell a másik ajtón, s ha kiment, akkor jöhet be az első ajtón a következő rabtársa (aki ugyanezt teszi a lapokkal). Mikor mind a tízen jártak a szobában, az örök jelentik, hogy hány rab látta a saját számát. Ha mind a tíz elítélt látta a saját sorszámaát, akkor mind a tízen szabadok, ha akár egy is van köztük, aki a saját számát nem látta, akkor mindnyájan rabok maradnak.

A próba előtti estén beszélgetnek a rabok:

A: Fiúk, igen kicsi az esélyünk. Mindenkinek 50%-nyi esélye van, hogy saját számát megtalálja a tíz lap között. Ez annyi, mintha mindenki egy pénzdarabbal dobna, és mindenkinek fejet kellene dobnia. Ezt a próbát szinte lehetetlen kiállni, mert ha a pénzdarabok nyelvén mondom el, akkor az összes lehetséges eset $2^{10}=1024$, s ebből egyetlen eset jó nekünk – ha mindenki fejet dob.

B: Akkor az összes eset 1/1024 részében szabadulunk ki... Az esélyünk egy ezreléknél is kevesebb... (Sóhajok, összenézés, néma csend...)

C: Fel a fejjel! Nézzétek, a matematikus nagybátyám, Béla küldött egy kis kalácsot!

D: Van benne mazsola? A csücske az enyém!

E: Az én részemben valami papírszelet van!

C: Add ide ... nicsak, ezt Béla nagybátyám írta! Figyeljetek, felolvasom: „*Hallottam a próbáról, s kigondoltam, hogy hogyan növelhetitek a megmenekülésetek esélyét. Mindegyikötök először balról számítva az annyiadik papírt húzza fel, amennyi a saját börtönbeli száma. Ezután azt a papírt húzza fel, ahányas számot a felhúzott papír mutat. Ezután újra a megnézett papírlap által mutatott számnak megfelelő lapot húzza fel, és így tovább, amíg öt papírt meg nem nézett. Ha meg akartok menekülni, mindenki így cselekedjen!*”

A: Vesztenivalónk nincs, kövessük ezt holnap!

B: Én megbízok a bácsikádban.

D: Én is, mert igen finom kalácsot küldött...



Vizsgáljuk meg ennek a taktikának a tényleges esélyét! Ehhez meg kell ismerkednünk néhány új matematikai fogalommal.

A tíz elem permutációit felfoghatjuk úgy is, mint egy tízelemű halmazon értelmezett függvényt, melynek értékkészlete ugyanaz a tízelemű halmaz. Jelöléssel úgy írhatjuk le, mintha egy függvény értéktáblázatát írnánk le, csak zárójelbe téve írjuk két sorba a

hozzárendeléseket, az első sor valamely eleméhez a második sorban alatta levő elemet rendeli a permutáció. Például:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Ha két permutációt (mint függvényt) egymás után alkalmazunk, egy újabb permutációt kapunk. Ezt a permutációk szorzatának nevezzük. Pl.: tekintsük az alábbi permutációt:

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 8 & 2 & 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

A két permutáció szorzata úgy kapható meg, hogy ha egy k számhoz az első permutáció n -et rendel, és n -hez a második permutáció m -et rendel, akkor a permutációk szorzata k -hoz m -et rendeli:

$$p_1 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 8 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Ha fordítva járunk el, látható, hogy más eredményt kapunk, tehát a permutációk szorzása nem felcserélhető.

Ha egy permutáció hozzárendeléseit „megfordítjuk”, a permutáció **inverzét** kapjuk. (Persze célszerű az első (felső) elemek szerint növekvő rendbe rendezni a hozzárendeléseket.) Íme a p_1 inverze (jelöléssel p_1^{-1}):

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$p_1^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 6 & 1 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

A permutációt saját inverzével bármelyik oldalról megszorozva az identikus permutációt kapjuk, mely minden elemhez önmagát rendeli. Minden permutációnak egyértelműen meghatározható az inverze a fentebbi módszerrel.

Egy permutáció négyzetének nevezzük azt a permutációt, amelyet úgy kapunk, hogy egy permutációt önmagával szorzunk meg. Ha ezt újra és újra megszorozzuk az adott permutációval, akkor annak további hatványait kapjuk. Pl.: itt a p_1 permutáció első néhány hatványa:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix} & p_1^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 4 & 9 \end{pmatrix} \\
 p_1^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix} & p_1^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 8 & 1 & 4 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix} \\
 p_1^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 3 & 2 & 6 & 1 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix} & p_1^6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy ahogy sorban hatványozzuk p_1 -et, minden egyes elemhez előbb-utóbb önmagát rendeli p_1 -nek valamelyik hatványa. Könnyen látható, hogy ez bármely permutáció esetén így van.

Ha tehát egy elemre alkalmazunk egy rögzített permutációt, aztán ezt az elem képére alkalmazzuk, aztán újra és újra alkalmazzuk, míg az eredeti elemhez nem jutunk, akkor az eredeti elem a közben kapott elemekkel együtt egy úgynevezett **ciklust** alkot. Minden elem csak egy cikluson belül lehet. Az egy cikluson belüli elemek bármelyike megkapható bármelyik másiktól a permutáció ismételtetésével, de különböző ciklusokon belüli elemek nem kaphatók meg így egymásból. A ciklusok megfigyeléséhez célszerű a permutáció hatványait egymás alá írni, amíg minden elem alatt meg nem jelenik önmaga. Ennek alapján minden permutációt rövidebb (és a szerkezetét jobban mutató) írásmóddal jelölhetünk, úgy, hogy a ciklusait az elemek megfelelő rendjében zárójelek közt felsoroljuk:

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 6 & 4 & 3 & 1 & 8 & 5 & 9 & 2 & 7 \\
 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 4 & 9 \\
 8 & 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 9 & 1 & 7 \\
 2 & 5 & 3 & 8 & 1 & 4 & 7 & 6 & 9 \\
 4 & 8 & 3 & 2 & 6 & 1 & 9 & 5 & 7 \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9
 \end{array}
 \quad p_1 = (1\ 6\ 5\ 8\ 2\ 4)\ (3)\ (7\ 9)$$

Tehát a p_1 permutáció egy hatelemű, egy egyelemű és egy kételemű ciklusból áll. Ha az 1-től n -ig terjedő számok halmazát valahány részhalmazra bontjuk, s az egyes részhalmazokban levő elemekből őket valamilyen sorrendbe rakva ciklusokat képezünk, akkor ezzel mindig egyértelműen megadunk egy permutációt. Az is igaz, hogy egy permutációt hatványozva előbb-utóbb az identikus permutációt kapjuk. Az iménti p_1 permutációnak először a hatodik hatványa volt ez.

M80a: Adjunk meg olyan 13 elemű permutációt, amelyet sorra hatványozva először a 21. hatványa adja az identikus permutációt!

Most már eleget tudunk a permutációkról, térjünk vissza a rabok feladatához!

Ha egy sorban összekeverik az asztalon a rabok sorszámait, akkor ezzel egy permutációját adják meg az 1..10 halmaznak. A Béla bácsi által javasolt módszerrel minden rab a saját rabszámát tartalmazó ciklus elemein ugrál végig. Ha ez a ciklus legfeljebb 5 elemből áll,

akkor biztosan megtalálja saját számát. Ha a saját rabszámát tartalmazó ciklus hatelemű vagy annál hosszabb, akkor nem találja meg a számát. Tehát Béla bácsi módszerével akkor találja meg a rabszámát *minden rab*, ha az asztalon összekevert rabszámok permutációjának minden ciklusa legfeljebb öt elem hosszúságú.

A megmenekülés esélyét az adja, ha megmondjuk, az összes permutáció hányadrésze olyan permutáció, amelyben minden ciklus legfeljebb 5 elem hosszú.

Először kiszámoljuk az összes lehetséges permutációk számát, ez $10! = 3628800$.

A rabok számára kedvező esetek számát úgy számoljuk ki, hogy kiszámoljuk a rossz esetek számát, és kivonjuk az összes esetek számából.

Rossz eset, ha 6, 7, 8, 9 vagy 10 hosszúságú ciklus van a permutációban. Ha megmondjuk, hogy mely elemekből áll egy k elemű ciklus, akkor a k darab elem bármelyikét választhatjuk a ciklus első elemének, s a többi elem tetszőleges sorrendje megad egy megfelelő ciklust. Így $(k-1)!$ a ciklusok száma. Ennek felhasználásával:

Ha van 6 elemű ciklus, akkor annak elemeit $\binom{10}{6}$ -féleképpen választhatjuk ki, a fentiek alapján $5!$ -féleképpen lehet a kiválasztott elemekből ciklust „készíteni”, s a maradék 4 darab elemet $4!$ -féleképpen lehet még elhelyezni a permutációban (azaz a börtönigazgató asztalán).

Így a lehetőségek száma:

$$\binom{10}{6} \cdot 5! \cdot 4! = 604800$$

Ha 7 elemű ciklus van, akkor a lehetséges permutációk száma hasonló okoskodással:

$$\binom{10}{7} \cdot 6! \cdot 3! = 518400$$

Ha 8 elemű ciklus van, akkor a lehetséges permutációk száma hasonlóképpen:

$$\binom{10}{8} \cdot 7! \cdot 2! = 453600$$

9 elemű ciklus esetén a lehetséges permutációk száma hasonlóképpen:

$$\binom{10}{9} \cdot 8! \cdot 1! = 403200$$

Végül a 10 elemű ciklusok száma: $9! = 362880$.

Összesen ez 2342880 „rossz” eset. A jó esetek száma $3628800 - 2342880 = 1285920$.

A megmenekülés esélye az, hogy hány jó eset van az összes esethez képest, azaz

$$\frac{1285920}{3628800} = 0,3544$$

Így 35,44% a megmenekülés esélye, **több mint 362-szerese** az elítéltek által először vizsgált esélynek!

M80b: Számítsuk ki az esélyt 20 rab esetére, hasonló feltételek mellett (itt 10 lapot nézhet meg minden elítélt)!

A történet úgy végződik, hogy a rabok pontosan a megadott taktikát követték, s bizonyára még szerencsájük is volt, mivel teljesítették a próbát. Még aznap szabadon engedték őket – az uralkodó tartotta a szavát.

Béla nagybácsinak egyik reggel csomagot hozott a postás. Egy kalács volt benne. Felesége azonnal felvágta, s egy kistányéron az asztalra tette, hogy ezt egyék a reggeli kávé mellé.

– Van benne mazsola is, Bélám! – jegyezte meg, mikor beleharapott. – Tyű, hát ez itt egy hatalmas mazsola! – méltatlankodott Béla nagybácsi a szájába nyúlva. – De nézd, nem is mazsola, hanem valami átlátszó, csiszolt kő...

A munkalap elkészítésében segítséget kaptam a következő matematikai jellegű rovat „lakóitól”:

Logikai feladványok rovata: <http://forum.index.hu/Article/showArticle?t=9000780>

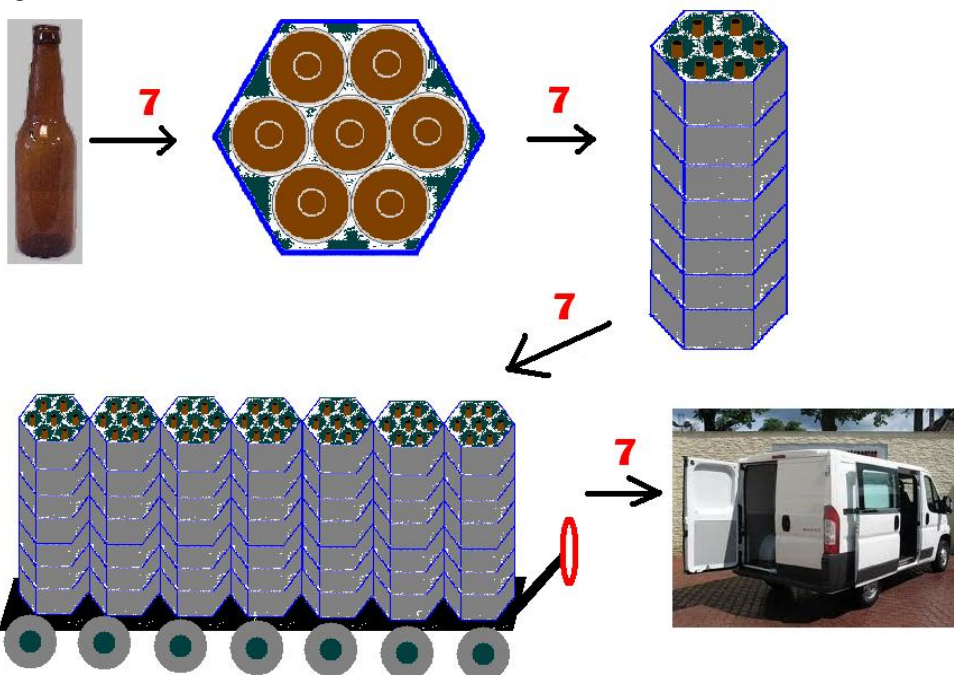
Számrendszerek

(sörösüveg-számlálás és bűvészkedés)

Ez a munkalap a számrendszerekkel foglalkozik. Egy szemléletes modell segítségével elmagyarázza a hetes számrendszert, s ezen keresztül más alapú számrendszerek felépítését.

Néhány érdekességen és sok feladaton keresztül elvezet ismeretlen alapú számrendszerekhez is...

Egy nagy élelmiszer-áruház raktárvezetőjének sok gondja van a visszaváltott sörösüvegek pontos nyilvántartásával. Olyan sörösrekeszeik vannak, amelyekben **hét** sörösüveg fér el. Minden **hét** rekeszt egy oszlopba raknak fel, s **hét** ilyen oszlopot tudnak egyszerre egy targoncával elvinni. Egy furgon szállítja el az üvegeket a raktárból, éppen **hét** targonca tartalma fér el benne. Szabály, hogy ha hét üveg összegyűlik, azt mindig rekeszbe kell helyezni, ha hét rekesz teli van, akkor azt oszlopba kell rakni, ha hét oszlop összegyűlt, azt targoncára kell tenni, s minden hét targoncányi üveget azonnal el kell szállítani a furgonnal.



Egy napon a raktáros elveszítette a nyilvántartását, hogy aznap hány üveg gyűlt össze. Szerencsére emlékezett, hogy aznap két furgonnal vittek el üveget, s látta, hogy még öt teli targonca áll a raktárban. Mellette egy kész oszlop, amellet pedig négy teli rekesz és öt sörösüveg állt. Segítsünk neki megszámolni, hogy mennyi üveg ez összesen!

Egy rekesz 7 üveget jelent, míg egy oszlop $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$ üveget, egy targonca $7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 = 343$ üveget, egy furgon pedig $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401$ üveget tartalmaz. Tehát a raktáros gondját egyszerű számítással megoldhatjuk:

$2 \text{ furgon} + 5 \text{ targonca} + 1 \text{ oszlop} + 4 \text{ rekesz} + 5 \text{ üveg} = 2 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 5 = 6599$ üveg.

Jelöljük a sörösüvegek számát matematikai felírással: $25145_{(7)}$. E jelölést így olvashatjuk ki: „kettő-öt-egy-négy-öt a hetes számrendszerben”. Itt az alsó indexbeli kis zárójeles hetes

szám azt jelenti, hogy 7 a váltószám az előző és következő „tárolóeszközök” között. (Jelölni kell a nullát is, nehogy a különböző tárolóobjektumok keveredjenek, pl.: 20105₍₇₎.) Egy „fordított” feladatot is könnyen megoldhatunk: Ha például tudjuk, hogy 4231 darab sörösüveg volt, akkor ez hány furgont, targoncát, oszlopot, rekeszt és kimaradó üveget jelent?

Számolhatunk így: 2401 üveg egy furgon, tehát **egy** furgon még kitelik az üvegekből, kettő már nem. Ha az egy furgonnyi 2401 darab üveget levonjuk a 4231-ből, akkor 1830 darab üveg marad. Hány targoncányi ez, azaz hányszor 343 üveg? 18309-ban a 343 megvan **ötször**, és marad 115 üveg, ami nincs targoncán. Hány oszlop képezhető a 115 maradék üvegből? 115-ben a 49 megvan **kétszer**, s marad 17 üveg. E 17 üveg **két** darab hetes rekeszt és **három** kimaradó üveget jelent. Az okoskodásban a vastag betűkkel kiemelt részeredmények ezt adják: $4231 = 15223_{(7)}$.

Okoskodhattunk volna egyszerűbben is! Ha 4231-et héttel elosztjuk, megkaphatjuk, hogy hány rekesz keletkezik: 4231-ben a 7 megvan 604-szer, és a maradék **3** (üveg). Ha a kapott 604 rekesz számát héttel osztjuk, akkor hányadosként 86-ot kapunk **2** maradékkal, azaz az oszlopok száma 86 (és 2 rekesz marad ki). A 86-ot, azaz az oszlopok számát osztjuk 7-tel, így kapjuk, hogy 12 targonca keletkezik, és **2** oszlop marad ki. Végül a 12 targoncányi rakomány **1** furgont tölt meg, és kimarad **5** targoncányi.

Így is megkaptuk tehát a 15223₍₇₎ felírást.

1	alap:	
2	7	
3	a szám:	értéke:
4	1	1
5	5	12
6	2	86
7	2	604
8	3	4231
9		
10		
11		
12		
13		
14		

Ezek szerint a 7-es számrendszerbe könnyű átszámolni, ha az eredeti számot 7-tel osztjuk, aztán a hányadosokkal újra meg újra ugyanezt tesszük, és a maradékokat fordított sorrendben feljegyezzük.

Természetes, hogy a furgonon túl is folytatható a számolás, ha mindenképp modellt akarunk hozzá készíteni, akkor mondhatjuk például, hogy 7 furgon egy vasúti vagon, 7 vagonból áll egy vonat, 7 vonatból lesz egy hajórakomány stb.

Más számrendszerekkel ugyanez a helyzet, ha például ötös számrendszerben akarunk számolni, akkor **öt** sörösüveg van egy rekeszben, **öt** rekeszből áll egy oszlop, **öt** oszlop egy targonca stb. Akkor vagyunk gondban, ha a számrendszer alapja 10-nél nagyobb. Mit írjunk például a 13-as számrendszerben, ha 10 rekesz keletkezett, és 13 sörösüveg

maradt ki? Nyilván nem jó jelölés a 1012₍₁₃₎, mert a négy jegy azt jelzi, hogy targoncát is kell használni, pedig erről szó sincs. A megoldás, hogy új számjegyeket kell kitalálni. Jelölhetné például a 10-est § jel, a 11-est # jel és a 12-est † jel. Ekkor a számunk §†₍₁₃₎ lenne. De ehelyett sokkal egyszerűbb és kevésbé félreérthető, ha az angol ABC betűivel jelöljük az „új” számjegyeket, azaz a 10-et **A**-val, a 11-et **B**-vel és a 12-t **D**-vel. A számunk jelölése tehát AD₍₁₃₎. Így minden n alapú számrendszer esetén elmondható, hogy n jegy szerepelhet a benne felírt számokban, amelyek a 0, 1, ..., $n-1$ számokat jelentik.

M81: Készítsünk olyan Excel-táblát, amely tetszőleges 2 és 10 közötti egész alap esetén kiszámolja egy benne felírt szám 10-es számrendszerbeli értékét! Legfeljebb 10 jegyre készüljön fel, de egyetlen képlet másolásával bővíthető legyen! Az eredményt az „érték” oszlop legalsó száma adja. Használható az üres() függvény és az "" üres cellaérték is. Segít a fentebbi ábra!

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a szám:	alap: 7							
2	232457	33208	4744	677	96	13	1	0	0
3		1	0	5	5	5	6	1	0
4		0	1	2	3	4	5	6	7
5		1	1	501	5501	55501	655501	1655501	1655501
6	Eredmény:	1655501							
7									

M82: Készítsünk olyan Excel-táblát, amely tetszőleges 2 és 10 közötti egész alap esetén kiszámolja, és egy cellába írja egy 10-es számrendszerbeli szám adott számrendszerben felírt értékét! Legfeljebb 8 jegyre készüljön fel, de egyetlen képlet másolásával még néhány jegyre bővíthető legyen! Az eredményt az „Eredmény:” melletti cella tartalma adja. Használható a maradék() és az int() függvény is. Itt is segít a feladat feletti ábra!

Külön figyelmet érdemel a kettes számrendszer. Itt csak két számjegyük van, a 0 és az 1. Itt kétüveges rekeszekre, kétrekeszes oszlopokra, két oszlopból álló furgonra stb. kell gondolni. Ha bármilyen egységből kettő összegyűlik, azt rögtön egy nagyobb egységre válthatjuk.

Igen érdekes mintázatot ad, ha például az első 32 szám kettes számrendszerbeli alakját felírjuk. Érdekes csak az 1-esek helyére koncentrálni, az egységesebb kép céljából a vezető 0-kat is kiíratjuk az Excellel (a jobb oldali keskeny képen látható).

M83: Készítsük el ezt az Excel-táblát, amelyben az azonos színű területeket egyetlen képlet másolásával töltjük ki!

Most egy kettes számrendszeren alapuló bűvésztükköt mutatunk be. A trükk a következő: A bűvész megkér néhány nézőt, hogy gondoljanak egy 1 és 500 közé eső egész számra. Ezután néhány hosszúkas, színes lapot tart eléjük, melyeken hemzsegnek a számok, a bűvész megkéri a nézők mindegyikét, hogy mutassák meg, melyik lapokon szerepel a számuk. Ha egy néző megmutatja, a bűvész épp csak ránéz a lapokra, felnéz a plafonra, csinál néhány varázskört a pálcájával, majd megmondja a számot.

	A	B	C	D	E	F
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	1
3	2	0	0	0	1	0
4	3	0	0	0	1	1
5	4	0	0	1	0	0
6	5	0	0	1	0	1
7	6	0	0	1	1	0
8	7	0	0	1	1	1
9	8	0	1	0	0	0
10	9	0	1	0	0	1
11	10	0	1	0	1	0
12	11	0	1	0	1	1
13	12	0	1	1	0	0
14	13	0	1	1	0	1
15	14	0	1	1	1	0
16	15	0	1	1	1	1
17	16	1	0	0	0	0
18	17	1	0	0	0	1
19	18	1	0	0	1	0
20	19	1	0	0	1	1
21	20	1	0	1	0	0
22	21	1	0	1	0	1
23	22	1	0	1	1	0
24	23	1	0	1	1	1
25	24	1	1	0	0	0
26	25	1	1	0	0	1
27	26	1	1	0	1	0

1				
	2			
3	3			
		4		
5		5		
	6	6		
7	7	7		
			8	
9			9	
	10		10	
11	11		11	
		12	12	
13		13	13	
	14	14	14	
15	15	15	15	
				16
17				17
	18			18
19	19			19
		20		20
21		21		21
	22	22		22
23	23	23		23
			24	24
25			25	25
	26		26	26
27	27		27	27
		28	28	28
29		29	29	29
	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Az érthetőség kedvéért csak 1-31-ig készítettük el a lapokat, mindegyik egy színes, álló csík (baloldali kép). E lapokon „szellősen vannak a számok, az ábra szerint egymás mellé passzítva minden sorban csak egy szám látható, így követhetjük, mely szám mely lapokon szerepel. A bűvész valódi lapjain természetesen „sűrűn írva” szerepelnek a számok.

A lapokat így készítettük: Minden számot kettes számrendszerbe írunk át. Az első lapon azok láthatók, amelyeknek az utolsó kettes számrendszerbeli számjegye 1, a másodikon azok, melyeknek az utolsó előtti jegyük 1, és így tovább, az ötödik lapon azok a számok szerepelnek, amelyekben hátulról az ötödik helyen 1-es áll.

Így ha például a néző azt mondja, hogy az első, a negyedik és az ötödik lapon látja a gondolt számát, akkor a gondolt szám kettes számrendszerbeli alakja $11001_{(2)}$, tehát a szám $1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 25$. De sokkal egyszerűbb a dolgunk, ha megfigyeljük, hogy minden lapon épp az a kettőhatvány az első szám, amelyiket

jelzi az adott lap. Így tehát csak a választott lapok első számait kell összeadni a bűvésznek. Erre van is ideje, amíg fennakadt szemekkel a mutatóványhoz tartozó hókuszpókuszkokat végzi.

M84: Készítsük el azt az Excel-táblát, amelyben mindegyik bűvész-lap mindegyik számát egyetlen képlet másolásával töltjük ki! A táblázat legyen vízszintes és függőleges irányban is csak képletmásolással bővíthető!

M85: Egy ház vízóráján elromlott a számláló. Mint tudjuk, öt korong van a 0-9 számjegyekkel beszámozva, ezek mutatják a fogyasztott köbméterek számát. Ha egy kis korong a 9-esről 0-ra gördül, akkor az előtte levő kis korongot egy számmal továbblökli. A számláló oly módon romlott el, hogy minden kis korongon „átugrik” egy-egy számot: az elsőn az 1-est, a másodikon a 2-est, a harmadikon a 3-ast, a negyediken a 4-est és az ötödiken az 5-öst. Tehát például az első hat köbmétert 00001, 00002, 00003, 00004, 00006 és 00007 jelzi. Mennyit fogyasztott a háztulajdonos, ha a számláló 24783 állást mutat? Mennyit fog mutatni a hibás számláló, ha a ház vízfogyasztása eléri az 55555 köbmétert?



Egy érdekes feladat, amelyben nem szerepel számrendszer, de a megoldása számrendszerekkel kapcsolatos:

Válasszunk ki a 0-tól 80-ig terjedő egészek közül 16 számot, hogy semelyik három különböző kiválasztott szám ne legyen egy számtani sorozat három szomszédos eleme!

Ha a , b és c szám egy számtani három szomszédos elemei, akkor $a=b-d$ és $c=a+d$, ahol d a sorozat differenciája. Ekkor igaz, hogy $\frac{a+c}{2} = \frac{b-d+d+b+d}{2} = \frac{2b}{2} = b$, azaz a két szélső

szám átlaga a középső. Írjuk fel a 0-80 számokat a hármasszámrendszerben, s egészítsünk ki vezető nullákkal minden számot négy jegyre!

Így $0=0000_{(3)}$; $1=0001_{(3)}$; $2=0002_{(3)}$; $3=0010_{(3)}$; $4=0011_{(3)}$; $5=0012_{(3)}$; ... ; $80=2222_{(3)}$.

Most válasszuk ki azokat a számokat, amelyekben csak 0 és 2 jegyek szerepelnek. Ilyen szám pontosan 16 darab van. Azt állítjuk, hogy semelyik két különböző kiválasztott szám átlaga nem lehet a kiválasztottak között, mert tartalmazni fog 1-es számjegyet a hármasszámrendszerbeli alakja. Két kiválasztott szám átlagának számításakor ugyanis a bennük szereplő három-hatványok számát tudjuk átlagolni: Tekintsünk két különböző kiválasztott számot, és írjuk egymás alá hármasszámrendszerbeli alakjukat! Ha egymás alá kerül két kettes, ott az átlagban is kettes lesz. Ha egymás alá kerül két nulla, ott az átlagban is nulla lesz. Mivel a két szám különbözik, lesz olyan hely, ahol egy nulla és egy kettes van egymás (egyik a másik) alatt. A két szám átlagában itt egyes lesz!

Csak a rend kedvéért álljon itt a megfelelő 16 szám: 0; 2; 6; 8; 18; 20; 24; 26; 54; 56; 60; 62; 72; 74; 78; 80.

Nyilván hasonló módszerrel lehet a 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 3^n-1 számok közül is 2^n darabot hasonló feltételekkel kiválasztani.

M86: Egy öt súlyból álló súlykészlettel a (dekagrammban mérve) 1 ; 2 ; ... ; n tömegű testek mindegyike megmérhető úgy, hogy a súlyokat a kétkarú mérleg bal serpenyőjébe, a testet a jobb serpenyőbe tesszük. Adjunk meg egy ilyen súlykészletet úgy, hogy az n értéke a lehető legnagyobb legyen! Feltételezzük, hogy a megmértendő test dekagrammban mérve egész tömegű.

M87: Egy öt súlyból álló súlykészlettel a (dekagrammban mérve) 1 ; 2 ; ... ; n tömegű testek mindegyike megmérhető, úgy, hogy a testet a kétkarú mérleg jobb serpenyőjébe tesszük, a súlyokat pedig a bal és jobb serpenyőbe is tehetjük. Adjunk meg egy ilyen súlykészletet úgy, hogy az n értéke a lehető legnagyobb legyen! Feltételezzük, hogy a megmértendő test dekagrammban mérve egész tömegű.

Érdekes kapcsolat van a számrendszer alapszáma és az adott számrendszerbeli oszthatósági szabályok között. Figyeljük meg a tízes számrendszer oszthatósági szabályait!

A kettes és az ötös oszthatóság szabálya hasonló: a 2 vagy az 5 n -edik hatványával osztható egy szám, ha az utolsó n jegyéből álló szám osztható 5 -tel vagy 2 -vel. Ez azért van, mert $10=2 \cdot 5$, s emiatt $2^n | 10^n$ és $5^n | 10^n$ – tehát az első n jegyet nem kell figyelni.

Íme egy példa: $8|9363552$, mert $9363552=9363 \cdot 10^3+552$ és $8|10^3$, továbbá $8|552$.

A kilences oszthatósághoz a számjegyek összegét kell vizsgálni. Ez azon alapul, hogy $10^n-1=(10-1)(10^{n-1}+...+1)$, azaz $9|10^n-1$. Egy példával: $9|2574$, mert:

$2574=2 \cdot 1000+5 \cdot 100+7 \cdot 10+1=2 \cdot (999+1)+5 \cdot (99+1)+7 \cdot (9+1)+4= (2 \cdot 999+5 \cdot 99+7 \cdot 9) + 2+5+7+4$, s ezen összeg első fele és második fele is osztható 9 -cel. Mivel a 3 a 9 -nek osztója, ezért e szabály a 3 esetére is igaz.

A tizenegyes oszthatósághoz a számjegyek váltakozó előjelű összegét kell vizsgálni. Ez azon alapul, hogy $10^{2n}-1=100^n-1=(100-1)(10^{n-1}+...+1)$, azaz $11|10^{2n}-1$, továbbá $10^{2n+1}+1=(10+1)(10^{2n}-10^{2n-1}+...-10+1)$, azaz $11|10^{2n+1}+1$.

Egy példával: $11|28567$, mert:

$28567=2\cdot10000+8\cdot1000+5\cdot100+6\cdot10+7=2\cdot(9999+1)+8\cdot(1001-1)+5\cdot(99+1)+6\cdot(11-1)+7=$
 $(2\cdot9999+8\cdot1001+5\cdot99+6\cdot11) + (2-8+5-6+7)$, s ezen összeg első fele és második fele is osztható 11-gyel.

E szabályok más számrendszerekre is átvihetők. Tehát egy x alapú számrendszerben az x összes osztójára, valamint az $x-1$ és $x+1$ számok összes osztóira van oszthatósági szabály!

M88: Írjuk fel a 14-es számrendszerben minél több 20-nál kisebb számmal való oszthatóság szabályát! Mindegyik szabályt példán keresztül mutassuk be!

M89: Igazoljuk, hogy az $1331_{(x)}$ bármely $x>3$ alapú számrendszerben egy egész szám köbe!

M90: Igazoljuk, hogy a $4053_{(x)}$ egy $x>5$ alapú számrendszerben nem lehet prímszám!

„Egyenletlenségek”

Sokszor kapunk olyan alkalmazott matematikai feladatot, amelynek megoldásánál nyilvánvalóan látszik, hogy hozzá algebrai modellt alkotva, azaz egyenletet vagy egyenletrendszert készítve megoldható a feladat.

Ez a munkalap ízelítőt ad nem algebrai jellegű feladatmegoldásokból. Ezek teljes értékű megoldásai egy-egy feladatnak, akár egy dolgozatban, akár az érettségien vagy bármilyen szintű matematikaversenyen adunk ilyen fajta megoldást. Elég ugyanis bármely matematikai



feladat megoldásához, ha megmondjuk, hogy a feladat alaphalmazának mely elemei megoldások és megmondjuk, hogy más elemei miért nem lehetnek megoldások. Természetesen, ha egy feladatot okoskodással oldunk meg, akkor világos fogalmazású mondatokban, pontosan és logikusan kell elmagyaráznunk megoldásunk gondolatmenetét. E munkalap feladatainál érdemes odafigyelni: helyenként KIZÁRÓLAG „okoskodásos”, nem egyenlettel való megoldást kér a munkalap, más helyen éppen az egyenlettel való megoldás a feladat!

1. feladat: Egy medencét a hideg víz csapja 1 óra alatt, a meleg víz csapja 80 perc alatt tölti meg. A teli medencét egy lefolyó-szivattyúval 2 óra alatt lehet üríteni. Egy alkalommal az üres medence megtöltéséhez kinyitották a melegvizet csapot. 17 perc múlva megnyitották a hidegvíz csapot is, majd újabb 7 perc múlva valaki véletlenül elindította a lefolyót is. Összesen mennyi idő alatt telt meg így a medence?

Megoldás okoskodással: Számoljunk percekben! A hidegvíz csap $1/60$, (azaz $4/240$) a melegvizet pedig $1/80$ (azaz $3/240$) részét tölti meg a medencének egy perc alatt. A lefolyó megnyitásáig így a melegvizet csap 24 perc alatt $24 \cdot 3/240$, a hidegvíz csap pedig $7 \cdot 4/240$ részt, azaz együtt összesen $100/240$ részét töltötték meg a medencének. Tehát amikor a lefolyót megnyitják, akkor a medence $140/240$ részét kell még megtölteni. Ha egyszerre van nyitva a két csap és a lefolyó, akkor minden percben $1/60 + 1/80 - 1/120 = 5/240$ része telik meg a medencének. Ha a hátralévő $140/240$ medencerészt elosztjuk ezzel, akkor megkapjuk, hány perc alatt töltik meg az utolsó szakaszban: 28. Így a medence megtöltésének teljes ideje: $17 + 7 + 28 = 52$ perc.

E feladatot (és az összes ilyen jellegű feladatot!) még szemléletesebbé tehetjük, ha „időszalagot” készítünk hozzá.



Ezen jól megfigyelhető, hogy melyik pillanatban melyik csap vagy lefolyó volt nyitva. Az időszalag az algebrai megoldásnál is segít, vele könnyebb a megfelelő egyenlet felírása.

2. feladat: Béla feltörte a malacperselyét, amelyben csak 5, 10 és 20 forintosokat talált. 65 pénzdarab volt benne, összesen 740 forint értékben. Béla megfigyelte, hogy ugyanannyi ötforintos van, mint ahány húszas. Mennyi öt-, tíz- és húszforintos volt a perselyben?

Megoldás okoskodással: Ha mind a 65 pénzdarab 10 forintos lenne, akkor 650 forint lenne a perselyben. Ha két tízforintost kicserélünk egy öt- és egy húszforintosra, akkor öt forinttal növeljük a pénz mennyiségét, ráadásul így teljesül, hogy azonos darabszámú ötös és húszas lesz. Ismételjük újra meg újra ezt a „cserét”, amíg a pénzösszeg 740 forint nem lesz! A 650 forinthez 90 forint hiányzik, hogy 740 legyen. Ha minden „csere” 5 forinttal növel, akkor tehát 18 cserére van szükség. Azaz 18 darab ötös és 18 húszas lesz, míg a tízesek száma $2 \cdot 18 = 36$ -tal csökkent. Így $65 - 36 = 29$ darab 10 forintos van.



3. feladat: Egy előadóteremben egy csoport tanuló szeretne helyet foglalni. Ha minden asztalhoz csak 8 tanuló ülhetne, akkor kilencüknek nem jutna hely. Ha minden asztalnál 10 ülőhely volna, akkor pedig 15 hely üresen maradna. Hány asztal van a teremben és hány személyből áll a csoport? (Az *Egységes érettségi feladatgyűjtemény* 920. feladata az *Egyenletrendszerek* témaköréből.)

Megoldás okoskodással: Mi lenne, ha 15-tel több tanuló lenne? Akkor a létszám épp az asztalok számának 10-szerese lenne. Ha most csökkentenénk minden asztalnál a helyek számát, akkor asztalonként két tanuló állna fel, s akkor épp a feladat első felében leírt eset állna elő. Az eltérés az első és második esetben leült diákok közt $9 + 15 = 24$ fő, s ez az asztalok számának kétszerese. Tehát 12 asztal van, s $8 \cdot 12 + 9 = 105$ személy.

4. feladat: Egy folyami hajó állóvízi sebessége 22km/h. Elindul a folyón lefelé A városból B városba, ott pontosan fél órát áll, majd a folyón felfelé visszaindul B-ből A-ba. Az egész utat 4 óra 54 perc alatt tette meg. Milyen távolságra van egymástól az A és a B kikötő, ha a folyó folyási sebessége 2 km/h?

Megoldás okoskodással: Számoljunk órákkal, kilométerekkel és km/h-ban mért sebességekkel! Tudjuk, hogy a hajó valódi (azaz a parthoz viszonyított) sebességét megkapjuk, ha a folyón felfelé haladva az állóvízi sebességéből levonjuk, a folyón lefelé haladva pedig az állóvízi sebességéhez hozzáadjuk a folyó sebességét. Így 20 km/h és 24 km/h sebességeket kapunk. Ugyanazt az utat kell megtennie felfelé és lefelé, az azonos utakon a sebesség és az idő fordítottan arányos egymással, mert szorzatuk állandó.



A sebességek aránya 20:24 (azaz 5:6) tehát ennek reciproka a két mozgás időinek aránya, azaz 6:5. Az összes idő átváltva 4,9 óra, vagyis 4,4 óra az oda és visszaút időinek összege. Ezt fel kell osztani 6:5 arányban, vagyis az ezt 11-gyel osztva kapott 0,4 órát be kell, hogy szorozzuk 6-tal és 5-tel. A felfelé út ideje tehát 2,4 óra, a lefelé út ideje pedig 2 óra. Ha felfelé 2,4 órán át megy a hajó 20 km/h sebességgel, akkor az út $20 \cdot 2,4 = 48$ km. (Ugyanez jön ki, ha a lefelé út idejéből és sebességéből számolunk.)

5. feladat: Egy háromjegyű számban a számjegyek összege 17. Az első jegy duplája a másodiknak. A szám ötten több, mint jegyei négyzetösszegének nyolcszorosa. Melyik ez a szám?

Megoldás okoskodással: Az első két számjegy összege háromszorosa a második jegynek, ezért osztható kell, hogy legyen hárommal. Viszont a három számjegy összege 17, ezért az első két jegy összege nem lehet 8-nál kisebb. Tehát az első két jegy összege csak 9, 12 vagy 15 lehet, de mivel az első jegy ennek kétharmada, nem lehet sem 10, sem 12. Tehát csak 6 vagy 8 lehet, így a szám a 845 vagy a 639. Ellenőrizve: a kettő közül csak a 845-re teljesül, hogy $845 = (8^2 + 4^2 + 5^2) \cdot 8 + 5$.

6. feladat: Egy hatjegyű szám utolsó jegye 7. Ezt a 7-est a végéről az elejére írva a szám 4-szeresét kapjuk. Melyik ez a hatjegyű szám?

A szorzást felírhatjuk úgy, ahogy a kézi szorzást végezni kell. A megoldást az ábra mutatja.

$$\begin{array}{r}
 \text{---} 7 \cdot 4 \\
 7 \text{ ---}
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 \text{---} 487 \cdot 4 \\
 7 \text{ ---} 48
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 \text{---} 79487 \cdot 4 \\
 7 \text{ ---} 7948
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{---} 87 \cdot 4 \\
 7 \text{ ---} 8
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 \text{---} 9487 \cdot 4 \\
 7 \text{ ---} 948
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 \text{---} 179487 \cdot 4 \\
 7 \text{ ---} 17948
 \end{array}$$

Minden lépésben elvégezzük a következő jeggyel való szorzást, de mivel a szorzandó és a szorzat számjegyei azonosak, csak eggyel el vannak tolva, rögtön be lehet írni a szorzandó előző helyi értékére (ezt a piros nyilak jelzik). A kapott szám az 179487, ez az egyetlen lehetséges megoldás.

7. feladat: Két egész szám összege 120, szorzata 3456. Határozza meg a számokat! (Az *Egységes érettségi feladatgyűjtemény* 935. feladata az *Egyenletrendszerek* témakörből)

Megoldás okoskodással: Határozzuk meg a 3456 prímtényezős felbontását! $3456 = 2^7 \cdot 3^3$. Két olyan szorzótényezőre kell bontani, amelyek összege 120. Ha egyik tényezőben nincs 3-as prímtényező, akkor a két tényező összege nem lenne 3-mal osztható. Így egyikben kettő, másikban egy darab 3-as prímtényező lehet. Mivel mindkét tényező kisebb kell legyen 120-nál, ezért a 3^2 mellé legfeljebb három 2-es prímtényezőt lehet választani. A lehetséges osztópárok tehát: $(3^2 \cdot 2^3) \cdot (3 \cdot 2^4) = 72 \cdot 48$, $(3^2 \cdot 2^2) \cdot (3 \cdot 2^5) = 36 \cdot 96$, $(3^2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2^6) = 18 \cdot 192$ vagy $(3^2) \cdot (3 \cdot 2^7) = 9 \cdot 384$. Ezek közül csak a 72 és a 48 összege 120, ez a két keresett szám.

8. feladat: Azt mondja egy apa a fiának: Három évvel ezelőtt én 9-szer olyan idős voltam, mint te, viszont 6 év múlva 12-szer annyi éves leszek, mint te voltál 3 évvel ezelőtt. Hány éves most az apa és a fia? (Az *Egységes érettségi feladatgyűjtemény* 921. feladata az *Egyenletrendszerek* témakörből.)

Megoldás okoskodással: Figyeljük meg, hogy az apa mindkétszer ahhoz az életkorhoz viszonyít, ahány éves volt a fia 3 éve. Ennek a 9-szereséről és 12-szereséről van szó, e két mennyiség különbsége



tehát a megfigyelt életkor háromszorosa. Egyik 3 éve volt, a másik 6 év múlva lesz, tehát ezek különbsége 9, így a fiú 3 évvel ezelőtt ennek harmada, 3 éves volt. Az apa 27 volt akkor, tehát most a fiú 6 éves, az apa 30.

Feladatok

M91: Oldd meg okoskodással: Xénia 80 perc alatt hordja tele vízzel a medencét, Yvonne 70 perc alatt, Zalán 60 perc alatt. Mennyi idő alatt végeznek a munkával együtt? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 626. feladata.)

M92: Oldd meg okoskodással: Három egymást követő természetes szám négyzetének összege 974. Melyek ezek a számok? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 698. feladata.)

M93: Oldd meg okoskodással: Egy parkolóban 50 jármű áll: autók, motorkerékpárok és buszok. A járművek kerekeinek száma rendre 4, 2, illetve 6; összesen 184 kerekük van. Hány darab van egy-egy gépjárműtípusból, ha tudjuk, hogy a buszok száma egyötöde az autók számának? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 644. feladata.)

M94: Oldd meg okoskodással: Egy négyjegyű szám utolsó jegye 8. Ha ezt a szám végéről az elejére írjuk, akkor az eredetinel 3204-gyel nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 622. feladata.)

M95: Oldd meg okoskodással: Egy túra egyik résztvevője minden nap elkölti pénzének felét és még 200 forintot. A kitűzött távot három nap alatt sikerült megtennie, amikor pénze elfogyott. Hány forinttal indult útnak a turista? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 631. feladata.)

M96: Oldd meg okoskodással: Egy szállodában 24 szoba van, összesen 64 férőhellyel. A szobák két-, illetve háromágyasak. Hány kétágyas szoba van? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény 632. feladata.)

M97: Oldd meg okoskodással: Egy négyjegyű szám első két jegyének és utolsó két jegyének összege is 10. Ha a számot középen „kettévágjuk”, akkor a kapott két kétjegyű szám négyzetösszegének duplája 259-cel kisebb, mint az eredeti szám. Ha fordított sorrendben írjuk le a számjegyeket, az így kapott szám 5454-gyel nagyobb az eredetinel. Melyik ez a szám?

M98: Oldd meg egyenlettel az 1, 2, és a 4. feladatokat!

M99. Oldd meg egyenlettel az 5. és a 6. feladatokat!

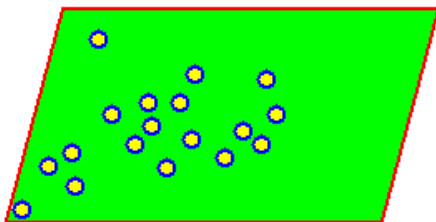
M100. Oldd meg egyenlettel az M97. feladatot!

Hátha valaki nem ismeri...

Ez a rész olyan közismert feladatokat gyűjtött össze, melyek „közszájon forognak”, mondhatni, hozzátartoznak a matematikai alaprésztudáshoz. A feladatokban közös, hogy szellemesek, ötletesek, szépek – s a megoldásukhoz többnyire csak logikára van szükség.

1. Egyszer két diák vitatkozott, melyikük jobb matematikából. A tanárukhoz fordultak, hogy döntse el vitájukat. A tanár ennek eldöntésére egy matematikai játékot ajánlott nekik:

–Itt ez a paralelogramma alakú asztal, s itt van egy dobozban rengeteg azonos méretű kis korong. Az asztalra kell felváltva letennetek a korongokat, mindegyikötök egy lépésben csak egyet tehet le. A korongok akár érintkezhetnek is, de nem fedhetik egymást sehol, s a már régebben letett korongokat nem szabad elmozdítani. Az veszít, aki nem tud már tenni, vagyis akinek először esik le egy korongja az asztalról.



Miután kisorsolták, ki kezd, a kezdő diák letette az asztalra az első korongot. A másik diák ekkor megszólalt:

- Nyertél! – A tanár a fejét csóválta:
- Nem tudok dönteni, mert mindketten igen jól tudjátok a matematikát!

Miért mondta ezt a tanár? Hová került az első korong?

Megoldás: Az első diák az asztal közepére tette a korongját. Azt tervezte, hogy bárhová teszi is társa a korongját, ő az azt követő lépésében az asztal középpontjára tükrözi a letett korong helyét, s ezt a stratégiát tartja ezután. Így minden lépésben olyan helyre tesz, ahol biztosan van még hely, tehát csak a másik veszíthet. Ezt a gondolatmenetet végiggondolta a második diák is, s látta, hogy reménytelen tovább játszani. Amikor a tanár látta, hogy mindketten rájöttek erre a stratégiára, megdicsérte mindkettejüket.

2. Egy túravezető egy nyolcfős csoporttal túrázik.

Egyszerre csak egy útelágazáshoz érnek, ahol négyfelé lehet továbbmenni. A túravezető emlékezte szerint valamelyik úton 20 percnyi járásra van a turistaház, ahol meg tudnak szállni. Mivel egy óra múlva sötét lesz, ezért a túravezető csoportokra osztja a turistákat (önmagát is „beosztva”), s azt kéri tőlük, hogy minden csoport menjen 20 percig egy-egy úton, és akkor akár meglátják a turistaházat, akár nem, mindenképp forduljanak vissza. Így ha 40 perc múlva visszaérnek az elágazáshoz, s elmondják,



meglátták-e a szállást, akkor kiderül, melyik úton kell majd elindulni. A vezető indulás előtt megtudta, hogy két tréfamester van a turisták közt, akik néha hazudnak, néha igazat mondanak, attól függően, hogy milyen épp a hangulatuk. Sajnos az nem derült ki, melyik két turista lehet a tréfamester. Hogyan kell a „felderítőcsoportokat” kialakítani, hogy beszámolójuk gyors mérlegelése után mindenképp biztosan elérhessen a túracsoport

sötétedésig a turistaházba? (A túravezető becsületes, ő nyilván nem hazudik „saját magának”...)

Megoldás: A túravezető két háromfős és egy kétfős csoportra osztja a turistákat. Elküldi őket három úton, a negyediken saját maga indul el. Ha ő meglátja a szállást, nem törődik a turisták beszámolóival, elviszi őket a saját útján.

Ha az ő útján nem volt turistaház, akkor meghallgatja a turisták beszámolóit.

Ha minden csoport minden embere egybehangzóan ugyanazt állítja, akkor a két hármas csoport biztosan igazat mond, s e két információ alapján megvan, hol lehet a szállás. (Lehet esetleg mindkét tréfamester a kétfős csoportban, s hazudhatnak akár mindketten, de ez így nem lesz figyelembe véve.)

Ha egy olyan csoport van, ahol különböznek a beszámolók (pl.: egyik turista azt állítja, hogy meglátták a szállást, kettő pedig azt, hogy nem – nevezzük ezt „ellentmondó” csoportnak), ott biztosan van tréfamester, ezen ellentmondó csapat tagjainak a beszámolóit nem vesszük figyelembe, így a többi csoport minden tagja biztosan igazat mond, s beszámolóik alapján egyértelmű, merre van a szállás.

Ha két olyan csoport van, ahol különböznek a tagok beszámolói (két ellentmondó csoport), ott mindkettőben biztosan van hazudó tréfamester, de e két csapat közül legalább az egyik biztosan háromtagú. Egy háromtagú ellentmondó csoport két tagjának a beszámolója megegyezik, s mivel ez esetben csak egy tréfamester lehet a csoportban, biztos, hogy ők ketten igazat mondanak. Így a háromfős ellentmondó csoportokról tudhatjuk, hogy megtalálták-e a szállást, s ennek alapján már megmondható, merre kell menni.

3. Egy folyó alatt kábelköteget vezettek át, amelyben 30 kábel van. Sajnos, mindegyik kábel azonos színű és vastagságú, így nem lehet őket megkülönböztetni. A kábelköteget lefektető munkások elfelejtették megjelölni, hogy a folyó egyik partján levő kábelvégeknek melyik a másik vége a túlparton. Egy villanyszerelőnek adják azt a feladatot, hogy derítse ki: melyik kábelvéghez melyik túlparti kábelvég tartozik. Ehhez a szokásos eszközök állnak rendelkezésére: bármelyik két kábelvéget össze tudja forrasztani bármelyik parton, illetve egy műszerrel meg tudja mérni, hogy két különálló kábelvég közt van-e fémes összeköttetés (pl.: ellenállást mér). Milyen módon tudja a lehető legkevesebb átkeléssel kideríteni, melyik egyik parti kábelvégekhez melyik túlparti kábelvégek tartoznak?



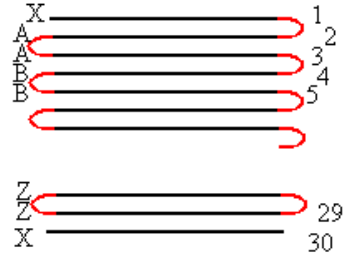
Egyik megoldás a több lehetséges közül: Az első átkelés előtt a szerelő az egyik parton kettesével azonos betűvel jelöl, majd párosával összeköt egymáshoz 28 kábelvéget, míg kettőt nem köt semmihez, e két „szabadon hagyott” kábelvéget egy-egy X-szel megjelöli.

A szerelő átkel a folyón, majd a túlsó parton megméri, melyik kábelek innenső végei vannak összekötve. Kiválasztja az egyik X jelű, „szabad” kábel túlsó végét, és 1-es számmal megjelöli. Ehhez hozzáköti egy innenső oldalon összekötött párnak az egyik végét, ezt 2-essel, majd e pár másik végét 3-assal jelöli. A 3-assal jelölt kábelhez

hozzáköti egy újabb innenső oldalon összekötött párnak az egyik végét, ezt 4-essel, majd e pár másik végét 5-össel jelöli. Az 5-össel jelölt kábelhez hozzáköti egy újabb innenső oldalon összekötött párnak az egyik végét, ezt 6-ossal, majd e pár másik végét 7-essel jelöli. Ezt folytatja, amíg az összes pár el nem fogy. Az utolsó párnak a 29-essel jelzett második kábelét már nem köti össze már semmivel sem. A végén a fel nem használt X jelű másik kábel túlsó végére írja a 30-as számot.

A szerelő újra átkel a folyón, majd az innenső parton megméri, melyik kábelek túlsó végei vannak összekötve. Amelyik X jelű kábel nem volt semmihez hozzákötve, azt 30-assal jelöli. Amelyik X jelű kábel túlsó vége össze van kötve valamivel, az lesz az 1-es. Amihez az 1-es a túloldalon kötve van, az a 2-es. A 2-esnek az innenső oldalon levő (azonosan betűzött) párja lesz a 3-as, amivel a 3-as a túloldalon össze van kötve, az lesz a 4-es. A 4-esnek az innenső oldalon levő (azonosan betűzött) párja lesz az 5-ös, amivel az 5-ös a túloldalon össze van kötve, az a 6-os. Ha így halad tovább a szerelő, mindegyik túlpárti számozott kábel végét megtalálhatja.

Egy átkelés nem lett volna elég, mert bármennyi kábelt köt is össze a szerelő az innenső parton, a túlparton még nem tudja azokat megkülönböztetni egymástól.



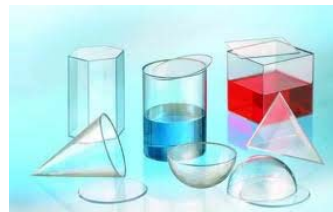
4. Egy édességüzemben egy dkg-os szaloncukrokat gyártanak. A cukrokat tíz gép teszi zacskókba, egy ilyen gépnek pontosan 50 cukrot kell tennie egy zacskóba, s mivel a zacskó tömege is pontosan 1 dkg, ezért minden ilyen cukorral teli zacskó tömege 51 dkg. Előfordulhat, hogy egy gépet hibásan állítottak be, ilyenkor 50 helyett 51 darab cukrot tesz minden zacskóba. Van továbbá az üzemben egy precíziós mérleg, mely dkg pontossággal mér akár nagyobb tömegeket is. Tudjuk, hogy egy gépet rosszul állítottak be, a többi jól működik. Hogyan választhatjuk ki egy méréssel a hibás gépet? (Rendelkezésre áll mindegyik gép által készített rengeteg zacskó cukor.)



Megoldás: Az első gép által gyártott zacskók közül egyet, a második gép zacskóiból kettőt, a harmadikéból hármát teszünk a mérlegre, és így tovább, az utolsó gép által gyártott zacskókból tízet teszünk fel a mérlegre, összesen $1+2+3+\dots+10=55$ zacskót. Ezeknek összes tömege $55 \cdot 51=2805$ dkg lenne, ha nem lenne hibás gép. Ahány dkg eltérést ad a mért érték ettől, annyi zacskóban van eggyel több cukor, annyiadik gép a hibás.

5. Adjunk meg a térben hét testet úgy, hogy mindegyik pontosan három másikat érintsen!

Megoldás: Számoljuk össze az érintési pontok számát! Mind a hét test esetében van három-három érintési pont, ezért így huszonegy érintési pont lett összeszámolva. De minden érintési pontot kétszer

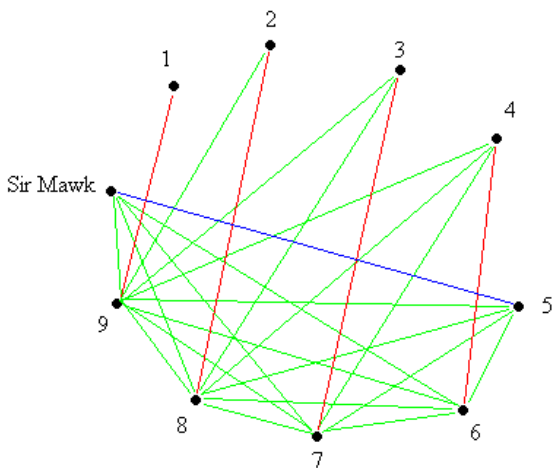


számoltunk, mivel két testhez tartozik. Így az érintési pontok száma $21/2 = 10,5$ lenne, de ez lehetetlen! A feladatnak tehát nincs megoldása. (Vessük össze az 1. feladatlap első két feladatával!)

6. Sir és Lady Mawk új városba költöznek, s lakásavatót szeretnének tartani. Vannak ismerőseik a városban, de nem akarják, hogy csupa ismerős legyen az összejövetelen, ezért a telefonkönyvből böknék ki 4 házaspárt, akiket elhívnak. A lakásavatón tehát a házigazdákkal együtt tízen vannak, közülük nem tudni, ki, kit ismert már régebből, csak egy biztos, hogy a házastársát mindenki ismeri... Sir Mawk is tudja ezt, éppen ezért körbejár éjjélkor és mindenkitől (saját feleségétől is) megkérdezi, hogy hány embert ismer a társaságból. Meglepődik, mert a jelenlévők csupa különböző számokat mondanak neki válaszként. Hány embert ismer Lady Mawk? (Az ismeretségek kölcsönösek!)

Megoldás: Mivel nullát senki nem mondhatott, ezért az elhangzott válaszok az 1, 2, 3, ... 9 számok voltak. Akinek 9 ismerőse van, az mindenkit ismert, aki 1-et mondott az csak a 9-et ismerő személyt ismeri, tehát

ők házastársak. Hagyjuk ki őket a társaságból (képzeltük azt, hogy ők hazamennek)! A maradék 8 ember mindegyikénél eggyel csökkent az ismeretségek száma, mert elment az a személy, aki mindegyiküket ismerte. Így a 8 fős maradék társaságban a Sir Mawk-on kívüli személyek ismeretségeinek száma: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Aki közülük 7 személyt ismer, az mindenkit ismer, ismeri az 1 ismeretségűt is, de az csak a házastársát ismeri, tehát ők házastársak. Őket „képzeletben hazaküldve” ugyanilyen hatfős társaságot kapunk, és így tovább, egészen addig, amíg csak ketten maradnak: Sir Mawk és egy olyan személy, aki egyik eltávozott személynek sem házastársa. Ő csak Lady Mawk lehet, az eddigiek szerint ő ismerte a négy eltávozott házaspárnak egy-egy tagját. Ismeri továbbá Sir Mawk-ot is, tehát 5 személyt ismert.

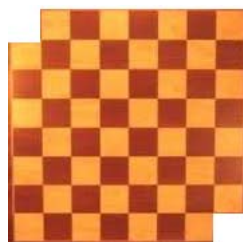


7. Egy sakktábla 64 mezője lefedhető 32 olyan „dominóval”, amelyek közül mindegyik pontosan két mezőt takar el. De hogyan fedhető be a sakktábla 31 dominóval úgy, hogy a két átlósan szemben fekvő sarokmező maradjon szabadon?

Megoldás:



Nem létezik ilyen lefedés, mivel az átlósan szemben fekvő mezők azonos színűek. Egy dominó mindig egy sötét és egy világos mezőt fed le. A 31 dominó lerakása után egy világos és egy sötét mezőnek kellene kimaradnia.



8. Egy tökéletesen kör alakú tóban úszol. Épp a tó közepén vagy, amikor megjelenik a parton egy éhes oroszlán. Az oroszlán szerencsére nem tud úszni, de ha a parton elkap, megesz. A szárazföldön ugyanolyan gyorsan tudtok futni, tehát ha kiérsz a partra, és az oroszlán épp nincs ott, akkor megmenekülsz. Viszont az oroszlán 4-szer gyorsabban fut a szárazföldön, mint ahogy Te a vízben úszol! Hogy tudsz megmenekülni?

Megoldás: Legyen R sugarú a tó. Elkezdesz kifelé úszni, amíg az $R/4$ sugarú kört majdnem eléred. Ezen a körön belül körbeúszva még gyorsabb vagy az oroszlánnál, mert pont $R/4$ sugarú körnél lesz négyszer akkora a part kerülete. Így el tudod érni, hogy az oroszlán pont a legmesszebb legyen, amikor „majdnem” eléred $R/4$ kört (akár $0,01R$ -nyire megközelítheted ezt a kört a $0,24R$ sugarú körön.) Ekkor elindulsz a legközelebbi part irányába. Ez $3/4R$ és egy „pici” (azaz példánkban $0,76R$). Az oroszlánnak van $R \cdot \pi$ (félkörnyi) útja. Ezek aránya: $\frac{\pi}{0,76} \approx 4,13$, tehát több mint 4-szer akkora utat kell megtennie, mint neked, így kiérsz, mielőtt ő odaérne.

9. Három kereskedő érkezett egy szállodába, s kényelmes szállást kértek a tulajdonostól, aki egy háromszobás lakosztályt ajánlott fel nekik 30 dollárért. A kereskedők felmentek, hogy megnézzék. Megfelelőnek találtak mindent, s így fejenként 10-10 dollárt összeadtak, és átnyújtották az



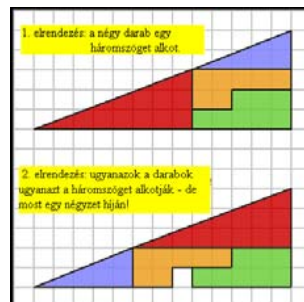
őket felkísérő háziszolgának. Amikor a háziszolga átadta a tulajdonosnak a 30 dollárt, az akkor jött rá, hogy tévedett, hiszen a háromszobás lakosztály ára csak 25 dollár. Így a háziszolgálával visszaküldött öt darab egydollároszt. A háziszolga a lépcsőn felfelé menet arra gondolt, hogy nehéz volna az öt darab egydollároszt három ember között szétosztani, s ezért kettőt zsebre vágott, a három kereskedőnek pedig 1-1 dollárt adott vissza. Így tehát végül mindegyik kereskedő adott tíz dollárt, de egyet visszakapott, így mindegyikük 9 dollárt fizetett. Ez $3 \times 9 = 27$ dollár; két dollár a háziszolga zsebében maradt, s ez eddig összesen $27 + 2 = 29$ dollár, pedig eredetileg hárman 30 dollárt adtak össze. Hová tűnt a harmincadik dollár?

Megoldás: A kiadott 30 dollárból 25 volt a szoba ára, kettő pedig a háziszolga zsebében pihen – míg el nem költi... Ez pedig együtt 27 kifizetett dollár, amely a kereskedők összkiadása. A maradék 3 (azaz 1-1-1) dollár a kereskedők zsebében lapul, így megvan a 30, nincs semmi hiba! Mi a rossz akkor a fenti okoskodásban? Az, hogy a hotelszolga által ellopott két dollár már benne van a 27-ben, hiszen ez is a kereskedők kiadása volt, s újra beszámolja a feladat. A kereskedőknél levő 1-1-1 dollárról viszont a feladat okoskodása szót se ejt, pedig ezzel együtt van meg az eredeti 30 dollár.

10. Hogy lehet ez?

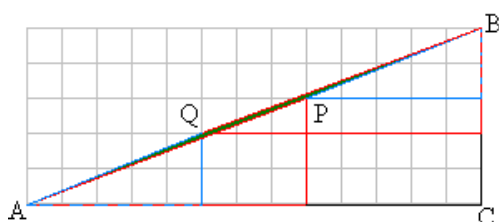
A mellékelt ábrán kétféle elrendezésben raktuk össze ugyanazon síkidomokat. Ugyanazoknak a daraboknak egyszer nagyobb, egyszer kisebb a területösszege!

Mi a nyitja a látszólagos ellentmondásnak?



Megoldás: Helyezzük egymásra a két ábrát! A nagy háromszög AB átfogójának meredeksége $\frac{5}{13} \approx 0,3846$, a piros háromszög átfogójának meredeksége $\frac{3}{8} = 0,375$, a kéké pedig $\frac{2}{5} = 0,4$. Ezek alapján tehát a három háromszög átfogója nem fedi egymást!

Helyezzük egymásra a két ábrát, így a nagy háromszög AB átfogója „alá” kerül az első



ábra P pontja, míg „fölé” kerül a második ábra Q pontja. Így nyilvánvaló, hogy a két ábrán nem háromszögeket raktunk ki a darabokból, hanem először egy konkáv APBC, másodszor pedig egy konvex AQBC négyszöget. A két ábra egymásra helyezésével a hosszúkás AQBP paralelogramma keletkezik, amelynek

területe éppen egy területegység. Ez alakul át tehát a „semmiből keletkező” kis négyszetté!

Feladatok:

M101: Egy asztalon kilenc külsőre teljesen egyforma biliárdgolyónk van. Azonban az egyik biliárdgolyó egy kicsit nehezebb, mint a többi nyolc.

Van egy kétkarú mérlegünk, melynek mindkét serpenyőjébe tehetünk pénzdarabokat. Két mérésből meg kell állapítani, hogy melyik a nehezebb biliárdgolyó. Hogyan csináljuk?

M102: Van tizenkét pénzdarabunk, melyek közül valamelyik hamis, azaz tömegében eltér a többitől, de nem tudjuk, hogy könnyebb vagy nehezebb azoknál. Van egy kétkarú mérlegünk, melynek mindkét serpenyőjébe tehetünk pénzdarabokat. Állapítsuk meg 3 méréssel, melyik a hamis pénzdarab!

M103: Van egy 36 emeletes épület és van 2 db ugyanolyan fajta tojásunk. Ha valamelyik emeletről kidobjuk valamelyik tojást, és túl magasról dobtuk, akkor összetörik, de ha nem elég magasról, akkor teljesen ép marad. Kísérletezhetünk: különböző emeletekről ejthetjük a tojásokat, hogy megvizsgáljuk, olyan magasról összetörik-e. Hogyan állapítjuk meg legkevesebb próbálkozásból, hogy pontosan hányadik emeletig marad ez a fajta tojás sértetlen, ha ledobjuk?

M104: Négy embernek egy rozoga hídon kell átmennie sötétben egy zseblámpa segítségével. Egyszerre csak ketten tudnak átmenni és lámpa nélkül nem, tehát csak a „ketten átmennék egy visszajön” módszer lehetséges. Az emberek maximális sebessége különböző, így rendre 1, 2, 5 és 10 perc alatt érnek át, ha egyedül vannak. (Két ember együtt a lassabbik sebességével halad.) Át tudnak menni mindnyájan 17 perc alatt?

M105: Húsz embert az alábbi kísérletre kérünk fel. Sorba állítjuk őket nagyság szerint, hátul a legmagasabb, elöl a legalacsonyabb. Mindenkinél a fejére teszünk egy sapkát, pirosat vagy kéket. A sorban állás olyan, hogy mindenki látja az előtte álló

összes személy sapkáját, de a sajátját és a mögötte állókét nem. Most a legmagasabbtól előre haladva mindenki megtippeli a saját sapkája színét. A résztvevők célja az, hogy minél többen találják el a helyes választ. A résztvevők tudják előre a feladatot, és megfelelő stratégiát beszélhetnek meg. Mi legyen ez a stratégia, hogy a lehető legmagasabb legyen a találati arány?

M106: Egy tutajosnak át kell szállítani a másik partra a káposztát, a kecskét és a farkast. Ügyelni kell arra, hogy a csónakban csak egyiküknek van hely, és ha a farkas egyedül marad a kecskével, akkor megeszi, s ugyanez történik, ha a kecske egyedül marad a káposztával – itt a kecske eszi meg a káposztát. Hogyan oldja meg a tutajos a feladatot?

M107: Egy vadász 10 km-t délre, 10 km-t nyugatra, 10 km-t északra ment, és ugyanoda jutott, mint ahonnan elindult. Hány oroszlánt lőhet még aznap?

M108: Három kannibál és három szerzetes áll a folyó egyik partján. Találnak egy üres kétszemélyes csónakot. Mindnyájuknak épségben át kell menni a folyón. Ha valamelyik parton többségbe kerülnek a kannibálok, akkor megeszik a szerzeteseket. Hogyan cselekedjenek?

M109: Egy 1 méter hosszú rúdra véletlenszerűen egyszerre 20 db hangyát ejtünk rá, melyek a rúdra érve rögtön elkezdnek mászni valamelyik irányban. Mindegyikük sebessége mindkét irányban 1 cm/sec. Ha két hangya összetalálkozik, akkor mindketten megfordulnak, s ellenkező irányba kezdenek mászni ugyanakkora sebességgel. Ha egy hangya eléri a rúd valamelyik végét, akkor lepottyan. Legfeljebb hány hangya lehet a rúdon a hangyák indulása után 100 másodperccel?

M110: Négy személy úszik a vízben, mindegyik mindegyiktől 5 méter távolságban. Az első személy egy hölgy, bikinit visel. A második személy is hölgy, rajta egyberészes fürdőruha van. A harmadik személy egy férfi, rajta fürdőnadrág van. Mit visel a negyedik személy?

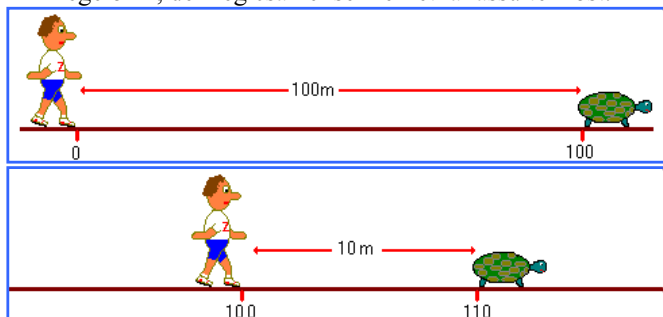
Végtelen történet

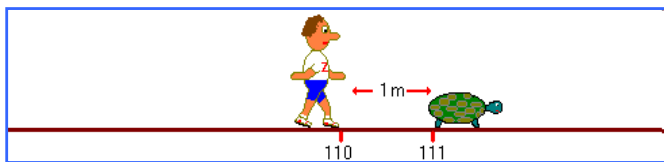
Hol van a végtelen? A fejünkben. Talán épp emiatt van, hogy főképp a matematika foglalkozik vele. A matematikán belül számos meghökkentő dolgot „produkál”, paradoxonok és meghökkentő eredmények termékeny táptalaja a végtelen. A matematikusok a XIX. század végén kezdtek behatóan foglalkozni vele. Georg Cantort, aki a végtelen meglepő tulajdonságait először mutatta meg, forradalmi gondolatai miatt jó ideig eretnekként kezelték korának matematikusai. Barangoljunk egy kicsit a végtelen világában!

Eleai apóriák nyomában

Eleai Zénón, Zeno (Elea, i. e. 490 – i. e. 430) görög filozófus több végtelennel kapcsolatos paradoxont (azaz látszólagos vagy valódi logikai ellentmondást) fedezett fel. Ezek egyike azt állítja, hogy egy eldobott kő soha nem ér célba, a másik pedig, hogy Akhilleusz soha nem éri utol a teknősbékát:

1. Zénón nyolclábnyira áll egy fától, kezében egy követ tart. A követ a fa felé hajítja. Ahhoz, hogy a kő eltalálja a fát, először meg kell tennie a köztük lévő távolság, azaz a nyolc láb felét, ehhez pedig valamennyi időre van szüksége. Ezután még mindig hátra van négy láb, ennek megtételéhez pedig először ennek a felét, vagyis további két lábat kell repülnie, és ehhez ismét adott idő kell. Ezután további egy, majd fél, majd negyed lábat kell megtennie, és így tovább a végtelenségig. Zénón következtetése: a kő sohasem éri el a fát.
2. Akhilleusz, a gyorslábú görög hős versenyt fut egy teknőssel. Mivel igen gyors, száz láb előnyt ad a hüllőnek. Ahogy elindul a verseny, Akhilleusz pár ugrással ott terem, ahol a teknős „futni” kezdett. Ez alatt az idő alatt azonban a teknős is halad egy keveset, talán pár lábnyit. Akhilleusz egy újabb lépéssel ott terem, ám ezalatt a teknős ismét halad egy kicsit, és még mindig vezet. Akármilyen gyorsan ér is oda Akhilleusz, ahol a teknős egy pillanattal korábban volt, amaz mindig egy kicsit előbbre mászik ezalatt. Zénón érvelése azt látszik igazolni, hogy a gyors Akhilleusz sohasem fogja megelőzni, de még csak el sem érheti a lassú teknőst.





A matematika megtalálta a látszólagos paradoxonok feloldását (bár a paradoxon által felvetett filozófiai problémákra nem ad választ). A paradoxon ugyanis azt sugallja, hogy ha valami végtelen sokszor történik, akkor soha nincs vége, azaz hogy ha végtelen sok távolságot vagy időt kell összegeznünk, akkor ez megoldhatatlan, mert soha nem érhetünk a végére.

A matematikát tanulók már az általános iskolában találkoznak a probléma matematikai feloldásával, csak lehet, hogy nem ismerik fel. Amikor az $\frac{1}{3}$ törtet tizedes törtbe átszámolják, s megállapítják, hogy ez egy végtelen szakaszos tizedes tört, akkor tulajdonképpen a $0,3333... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + 0,00003 + ...$ végtelen összegről beszélnek. A matematika tehát „átlép” a paradoxonon, s hogy a kő célba érjen, s hogy sebes lábú Akhilleusz utolérje a poroszkáló hüllőt, elfogadja, hogy végtelen sok véges mennyiség összege lehet véges – persze csak megfelelő esetekben. Ha végtelen sokszor adunk össze 1-et, az a matematikában sem ad véges eredményt... Ha elfogadjuk, hogy végtelen sok valós szám összege lehet egy valós szám, akkor az alpműveletek szabályai alapján matematikailag korrekt módon levezethetők a végtelen összegek műveleti szabályai, továbbá az is, hogy egy végtelen összegnek legfeljebb egyféle szám lehet az eredménye.

A végtelen sok tagból álló összeget a matematikában (végtelen) sornak nevezik, s így jelölik:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Milyen esetekben lehet véges egy sor összege? Nem egyszerű általánosan válaszolni. Íme, a legegyszerűbb feltétel: minden olyan **mértani** sorozat esetén véges a sor összege, ahol a q hányados (kvóciens) abszolútértéke 1-nél kisebb.

Egy okoskodást mutatok a $|q| < 1$ feltételt teljesítő végtelen mértani sorok összegének meghatározására. (Itt fel fogom használni a végtelen összegek néhány fentebb említett műveleti szabályát, illetve azt, hogy létezik az összegük.) Jelölje S az összes (végtelen sok) elem összegét!

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + ... = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 + ...$$

Szorozzuk meg ezt az egyenlőséget mindkét oldalon q -val:

$$qS = qa_1 + qa_2 + qa_3 + qa_4 + qa_5 + qa_6 + ... = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 + a_1q^6 + ...$$

Megfigyelhető, hogy az első végtelen összeg jobb oldalában szerepel a második végtelen összeg jobb oldala. Helyettesítsünk be ennek megfelelően az első egyenlet jobb oldalába, majd fejezzük ki S -et a kapott egyenlőségéből!

$$S = a_1 + qS$$

$$S(1 - q) = a_1$$

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Az utolsó sor tehát a végtelen összeg kiszámításának képlete. Ellenőrizzük le a $0,33333...$ esetére! Itt az első elem $0,3$ és a kvóciens $0,1$:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}$$

A képlet tehát alkalmazható végtelen szakaszos tizedestörtek kiszámítására.

Cantor „paradicsoma”

Georg Cantor német matematikus 1874-ben a *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik* című folyóiratában publikált egy cikket, amely halmazok számosságával, s ennek kapcsán magával a végtelennel foglalkozik. A forradalmi cikk előtt a matematikusok nemigen gondoltak arra, hogy végtelen halmazok elemeit lehetséges volna értelmesen megszámlálni, illetve a „végtelen sok” elemű halmazoknak különböző „elemszámuk” lehet. Cantor módszert talált végtelen halmazok „összemérésére”, megadta, hogy két végtelen halmazt mikor tekinthetünk különböző és mikor azonos „méretűnek”, számosságúnak, s igazolta, hogy van legalább kétféle végtelen számosság.

E részben áttekintjük Cantor néhány lényeges gondolatát, ám megismerésükhöz néhány alapvető fogalom tisztázása szükséges. Mindössze annyit kellene világosan látni, hogy mit jelentenek a természetes számok, mit is csinálunk *pontosan*, amikor megszámlalunk valahány dolgot. A matematikában a megszámlálható dolgokat *halmazokba* tesszük, így kezeljük, s a megszámlolás végeredményét a halmaz *számosságának* nevezzük. (A mindennapi élet számolási feladatainál az eredmény mindig egy természetes számmal is kifejezhető.)

Hogy ugyanannyi huszár van-e a kaszárnyaudvaron, mint ahány ló, azt könnyen eldönthetjük, ha kiadjuk a parancsot: „Lóra!”, majd megnézzük, maradt-e gyalogos huszár vagy huszár nélküli ló.

Két halmaz elemeinek száma, azaz számossága egyenlő, ha létezik köztük kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, azaz „párba állítás” (szakkifejezéssel: bijekció).

Például: $A = \{\text{hétfő; kedd; szerda; csütörtök; péntek}\}$

$B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

E két halmaznak „ugyanannyi” eleme van. Ennek matematikai jelölése: $|A| = |B|$

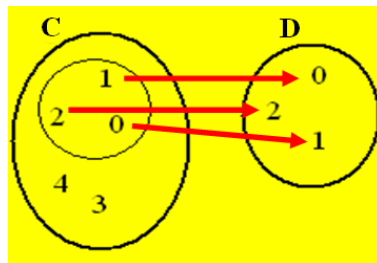
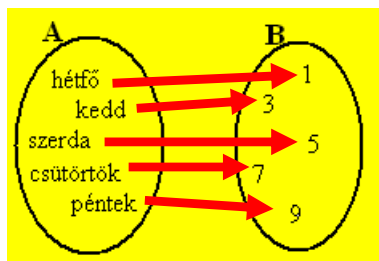
Ha létezik bijekció egy ismeretlen számosságú „H” halmaz és egy olyan halmaz között, amelyről már tudjuk, hogy öt eleme van, akkor azt mondjuk, hogy H számossága is öt. Jelölés: $|H| = 5$.

Van-e olyan halmaz, amelynek számossága 5 és mindig kéznél van, hogy párba állítsuk vele a még ismeretlen számosságú halmazok elemeit? Igen! Íme: $K = \{\text{hüvelykujj; mutatóujj; nagyujj; gyűrűsujj; kisujj}\}$: ez egy természetes módon adódó halmaz a számosság megállapításához, s amikor ujjainkon megszámlalunk valamit, valóban e halmazt használjuk a „párba állításhoz”.

A számosság fontos tulajdonságai: Ha két halmazra $|A| = |B|$, akkor $|B| = |A|$. Ha három halmaz esetén: $|A| = |B|$ és $|B| = |C|$, akkor $|A| = |C|$. Mindig igaz továbbá $|A| = |A|$ is.

Végesnek nevezünk egy halmazt, ha egy elemet hozzávéve számossága megváltozik.

Véges halmaznak nevezzük azokat a halmazokat, amelyeknek számossága leírható valamely természetes számmal.



Két nem egyenlő számosságú halmaz közül az a nagyobb számosságú, amelynek van a másikkal azonos számosságú valódi részhalmaza. Például az ábrán $|C| > |D|$, mert nincs közöttük bijekció, de C egyik valódi részhalmazának esetére van bijekció.

Cantor ötlete az volt, hogy végtelen halmazok között is lehet bijekció, s ekkor ez azonos számosságot jelent.

Megtoldanánk ezt a tétellel, hogy ha A és B végtelen halmaz esetén A és B egy részhalmaza közt, illetve A és B egy részhalmaza közt is van bijekció, akkor A és B számossága egyenlő.

Két végtelen halmaz közül A számossága nagyobb B számosságánál, ha nem létezik köztük bijekció, de A egy részhalmaza és B között már létezik.

Példa: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$ és $B = \{-1; -2; -3; -4; -5; -6; \dots\}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
f(x)	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	...

Bijekció: $f(x) = -x$ Emiatt $|A| = |B|$

Más példák, kérdések: Van-e bijekció N és a következő halmazok között?

- $A = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\}$
- $B = \{\text{páros természetes számok}\} = \{0; 2; 4; 6; \dots\}$
- $C = \{a \text{ 10 pozitív egész kitevőjű hatványai}\} = \{10; 100; 1000; 10000; \dots\}$

N:	x	0	1	2	3	4	5	...
A:	$f_1(x) = x+1$	1	2	3	4	5	6	...
B:	$f_2(x) = 2x$	0	2	4	6	8	10	...
C:	$f_3(x) = 10^{x+1}$	10	100	1000	10000	100000	1000000	...

Válasz: Igen, a táblázatban látható a három bijekció, amelyek alapján mindhárom halmaz ugyanolyan számosságú, mint N.

N számosságának jele: $\aleph_0$ (alef-null). Neve: *megszámlálhatóan végtelen számosság*.

Megállapítható, hogy az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú.

Az állítást az alábbi táblázat igazolja.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
f(x)	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	...

Az eddigieket összefoglalva: megszámlálhatóan végtelen számosság szemléletesen azt jelenti, hogy egy halmaz elemeit be tudjuk sorszámozni a természetes számokkal.

Két meglepő állítás:

1. A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú.
2. A valós számok halmaza *nem* megszámlálhatóan végtelen számosságú. Számosságának jele: $\aleph_1$ (alef-egy), a neve pedig: *kontinuum-számosság*.
E két bizonyítás nehezebb az eddigieknél, ezért külön dokumentumban, a honlapon olvashatók.

A kontinuum-számosság nagyobb, mint a megszámlálhatóan végtelen számosság, mivel a valós számok halmaza részhalmazként tartalmazza a természetes számok halmazát, tehát számossága sem kisebb, sem egyenlő nem lehet a megszámlálható számossággal.

Megemlítjük, hogy bármely intervallum, sőt a sík és a tér is kontinuum-számoságú halmaz.

Sok fejtörést adott a matematikusoknak, hogy létezik-e olyan halmaz, amely $\aleph_0$ -nál nagyobb, de $\aleph_1$ -nél kisebb számszámságú. Ezt a sokáig megoldatlan problémát kontinuum-hipotézisnek nevezik. Ma már tudjuk, hogy a kontinuum-hipotézis nem dönthető el a korábbi ismeretek felhasználásával, nem okoz ellentmondást, ha igaznak tekintjük, de az sem, ha hamisnak vesszük.

Cantor elmélete számos bizonyítást leegyszerűsített, új lendületet adott régi problémák igazolásához.

Csak egy példa erre: Felvetődik a kérdés, hogy minden irracionális szám felírható-e racionális számokból kiindulva, a négy alapművelet és gyökvonások véges sokszori alkalmazásával. Igazolható, hogy az ilyen alakban előállítható számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, míg az irracionális számok halmaza kontinuum számszámságú. Tehát kell lennie olyan irracionális számnak (mégpedig kontinuum-végtelen soknak), mely nem írható fel a megadott alakban – megválaszoltuk a kérdést!



Cantor életművét Hilbert az 1900-as nemzetközi matematikus kongresszuson a következő mondattal méltatta:

„Senki sem űzhet ki minket abból a paradicsomból, melyet Cantor teremtet nekünk.”

Kapcsolódó feladatok:

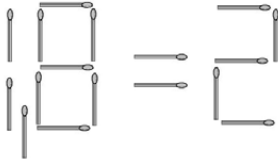
M111a: Ellenőrizzük le a képlet segítségével az $\frac{1}{7}$ tizedestört alakjának helyességét!

M111b: Írjuk fel a képlet segítségével a $0,231$ végtelen szakaszos tizedestörtöt két egész hányadosaként!

M112: Igazoljuk a képlet segítségével, hogy egy irracionális szám nem lehet végtelen szakaszos tizedestört!

M113: Az 592-nek többszöröse a 9990000. Igazoljuk a képlet segítségével, hogy minden egész számnak van olyan többszöröse, amely 9-es számjegyekkel kezdődik, 0 számjegyekre végződik, s ezeken kívül nem tartalmaz más számjegyet!

M114: Helyezzünk át egy gyufaszálat, hogy igaz egyenlőséget kapjunk!



M115: Adjunk meg egy bijekciót a $]0;3[$ intervallum és a valós számok halmaza között!

M116: Igazoljuk, hogy egy négyzet pontjainak számszámsága kontinuum-számságú!

M117: Létezik-e olyan valós számok halmazán értelmezett függvény, mely minden intervallumban minden valós értéket felvesz?

M118: Adjunk meg olyan korlátos halmazt (egy megfelelő kör belsejében „elférő” halmazt), amely egybevágó valamely valódi részhalmazával!

M119: Végezzünk kis kutatást a Cantor-elmélettel kapcsolatban: mi a Grand-Hotel-paradoxon? Cantor elméletének mely része és hogyan ad választ a paradoxonra?



M120: A 4. munkalap arról szól, hogyan alkothatunk síkbeli képet centrális projekció segítségével térbeli pontthalmazokról. Válaszoljuk meg ennek segítségével, hogy lehet, hogy a fényképeken „a végtelen megjelenik” (pl.: egyenes országút két szélének találkozási pontja)? Mi a feltétele annak, hogy megjelenjen egy fényképen? (A mellékelt ábrán pirossal van bekarikázva a „lefotózott végtelen”).

(Külön nem jeleztem, de a szövegben néhány adat és megállapítás a wikipédia megfelelő oldalairól származik.)

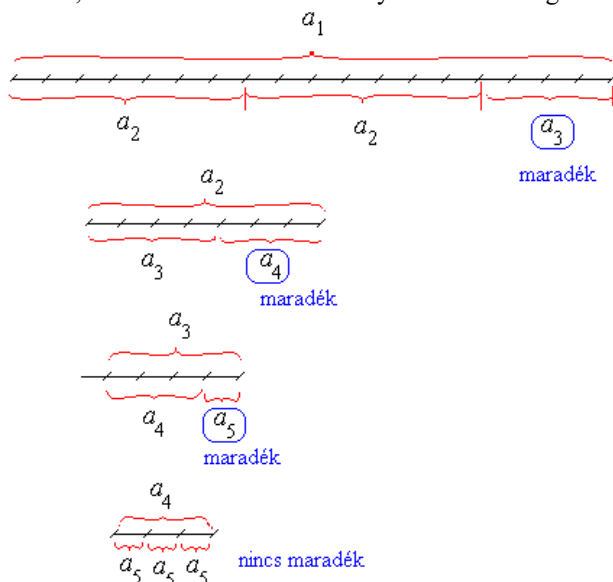
A gyökök világa

Ez a munkalap olyan témakörökkel, olyan feladatokkal, matematikai érdekességekkel foglalkozik, amelyek mindegyike gyökökkel, gyökvonással kapcsolatos.

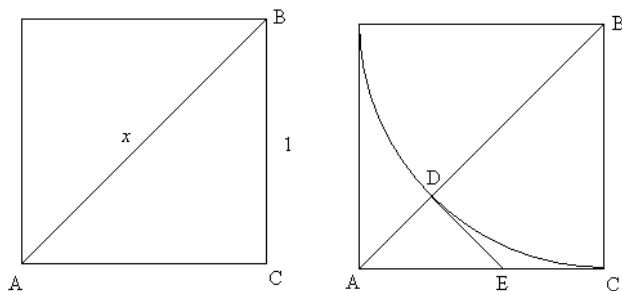
Lánc törtek

a) Az ókori görög matematika egy problémája volt két adott szakasz közös mértékének meghatározása. Ez a közös mérték egy olyan szakasz, amely mindkét szakaszra pontosan egész számszor mérhető fel. A közös mérték meghatározása céljából két adott a_1 és egy nála kisebb a_2 szakasszal a következő műveletsorozatot végezték el:

Felmérték az a_2 szakaszt az a_1 szakaszra, ahányszor csak ráfér. A maradék szakaszt (nevezzük a_3 -nak), rámérjük az előzőre (a_2 -re), ahányszor csak ráfér. Utána a maradék szakaszt (nevezzük a_4 -nek), rámérjük az előzőre (a_3 -ra), ahányszor csak ráfér stb. ezt az eljárást addig ismételgetjük, míg egyszer a rövidebbik szakasz éppen valahányszor ráfér az előzőre, s nincs maradék szakasz. Ilyen esetben a legutolsó felmért szakasz a közös mérték.



Az ábrán az a_5 szakasz lett a közös mérték. De néha sokáig tart ez a „ráméregetés”. Próbáljuk meg egy egységnyi oldalú négyzet átlóját összemérni a négyzet oldalával!



Az AB átlót x jelöli. Mérjük (körözzük) rá B-től kezdve a $BC=1$ távolságot! A maradék az AD szakasz lesz. Mivel BAC szög 45° -os, így AED háromszög egyenlő szárú, azaz $AD=DE$.

E pontból a berajzolt körívhez húzott két érintőszakasz egyenlő, azaz $DE=EC$. A következő összemérésnél AC -t ($=BC$ -t) és DA -t ($=EC$ -t) kell összemérni. $DA(=EC)$ kétszer fér rá AC -re, de első felmérés után AE és $EC(=AD)$ további vizsgálata újra egy négyzet oldalának és átlójának összehasonlítása lesz, ami ugyanaz a probléma, mint az elején! Tehát újra meg újra elvégezhetjük ugyanazokat a lépéseket, s mindig ugyanolyan összehasonlítást kell végezni, csak egy kisebb ábrán. Ezek szerint a négyzet oldalának és átlójának nincs közös mértéke! Az ilyen szakaszokat összemérhetetlen szakaszoknak nevezzük. (A hagyomány szerint amikor az ókorban a görög püthagoreusok felfedezték, hogy léteznek nem összemérhető szakaszok, úgy érezték, hogy ez beárnyékolja a matematika szépségét, s próbálták titokban tartani felfedezésüket.)

Nem nehéz belátni, hogy két szakasz pontosan akkor összemérhető, ha az arányuk racionális szám. Miután Pitagorasz tételéből következik, hogy a fenti x szakasz hossza $\sqrt{2}$, ezért azt igazoltuk, hogy a $\sqrt{2}$ nem racionális szám.

A fenti ábrán a szakaszok felmérése a következő egyenlőségeket adja: $\frac{AE}{EC} = \frac{x}{1}$, azaz

$$x = \frac{AE}{EC} = \frac{AE}{AD} = \frac{1 - (x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 1. \text{ Adjunk mindkét oldalhoz 1-et: } x+1 = \frac{1}{x-1}$$

Vegyük mindkét (nem 0) oldal reciprokát: $\frac{1}{x+1} = x-1$, majd adjunk mindkét oldalhoz 2-t:

$$2 + \frac{1}{x+1} = x+1 \quad \text{Jelöljük az } x+1\text{-et } a\text{-val:}$$

$$a = 2 + \frac{1}{a} \quad (*)$$

Vegyük észre, hogy a (*) jelzésű egyenletbe behelyettesíthetjük önmagát az a helyére. Így olyan egyenletet kapunk, amely ismét igaz lesz a -ra: $a = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{a}}$. Ezt ismételve

kapható, hogy a megoldása végtelen sok hasonló egyenletnek, mely ilyen alakú:

$$a = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

Fentebbiek miatt $a = 1 + \sqrt{2}$.

b) Tekintsük a következő egyenletet:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \quad (**)$$

Ha x -szel beszorozzuk, akkor a következő másodfokú egyenletet kapjuk: $x^2 - x - 1 = 0$

A két kapott gyök: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. (Az első közülük az aranymetszés egyik száma – erről volt már szó a 3. munkalapon.) Válasszuk ki a pozitív gyököt, s nevezzük w -nek! Most szeretnénk csak erről beszélni.

Vegyük észre, hogy a (**) jelzésű egyenletbe behelyettesíthetjük önmagát az x helyére. Így olyan egyenletet kapunk, amely ismét igaz lesz w -re: $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$. Ezt ismételve

kapható, hogy w megoldása végtelen sok hasonló egyenletnek, mely ilyen alakú:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

Tekintsük a következő emeletes törtek értékét:

$$a_1 = 1 ; \quad a_2 = 1 + \frac{1}{1} ; \quad a_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} ; \quad a_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} ; \dots$$

Számológéppel vagy akár az Excel segítségével azt kapjuk, hogy a kapott sorozat egyre jobban megközelíti az $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ értékét!

c) Vessük össze a) és b) pontnál kapott eredményt! Egy-egy $a + \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) alakú számot írtunk fel $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}$ alakban.

Az ilyen alakú felírást lánc törtnek nevezzük, és $[a_1; a_2; a_3; \dots]$ jelöléssel jelöljük. Így pl.: $1 + \sqrt{2} = [2; 2; 2; 2; \dots]$ és

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1; 1; 1; 1; \dots]$$

Azt vehettük észre, hogy a két szám lánc tört alakja periodikus. Ismert számelméleti tétel, hogy a **racióális számok** mind **véges lánc tört**ek.

$$\text{Például: } \frac{43}{19} = [2; 3; 1; 4] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$$

Egy másik tétel szerint a **periodikus lánc tört**ek pedig azonosak a másodfokú algebrai számokkal, azaz azokkal, amelyek **egész együtthatójú másodfokú egyenletek gyökei** lehetnek.



Például az $\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{61}}{6}$ szám gyöke a $2x^2 - 3x - 3 = 0$ egyenletnek, s

$$\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{61}}{6} = [1; 2; 7; 2; 2; 7; 2; 2; 7; ; 2; \dots] = [[1][2; 7; 2]]$$

d) Nemcsak a racionális és másodfokú algebrai számok, hanem bármely x pozitív szám lánc tört alakját megkaphatjuk, ha a szám egész részét felírjuk egy papírra, majd a tört részének a reciprokát vesszük, majd ennek az egész részét ismét felírjuk, s a tört részének reciprokát vesszük stb. Ha ezt az eljárást ismételtetjük a papírra sorban felírt számok adják az x szám lánc tört alakjának elemeit.

Ezen eljárás alapján készíthetünk olyan Excel táblarészt, mely kiszámolja egy adott szám lánc tört alakját, csak az a gond, hogy az Excel számábrázolási pontossága miatt a legtávolabbi jegyek pontatlanok lesznek. Racionális számokkal kipróbálva azt kapjuk, hogy az Excel egyik lánc törtjegy után 0-t kellene hogy kapjunk, de az Excel tárolási pontatlansága miatt a következő látható:

Szám	Lánc tört-jegyek
7/19	0
2,714286	2
1,4	1
2,5	2
2	1
1	1
1,41E+14	1,40737E+14
#####	#ZÉRÓOSZTÓ!
#####	#7E00000000000000

M121: Az iménti eljárás alapján készítsünk olyan Excel táblarészt, amely tíz jegyig kiszámolja egy szám lánc tört alakját! Egy egésztől való 10^{-7} mértékű eltérést tekintünk 0-nak! (Ha egy adat nem értelmes, a helyén álljon 0.)

M122: Az iménti eljárás alapján készítsünk olyan Excel táblarészt, amely kiszámolja egy legfeljebb 20 jegyű lánc tört értékét! (Ha egy adat nem értelmes, a helyén álljon 0.)

M123: A szakaszok összemérésének eljárása alapján készítsünk olyan Excel táblarészt, amely kiszámolja egy számlálóval és nevezővel megadott racionális szám lánc tört alakját! (Ha egy adat nem értelmes, a helyén álljon 0.)

M124: Egy másodfokú algebrai szám periodikus szám lánc tört alakja: $[4; 1; 1; 10; 2; 10; 2; 10; 2; 10; 2; \dots] = [[4; 1; 1]; [10; 2]]$. Mi a szám?

M125: Egy háromjegyű egész szám négyzetgyökének egész részét nem ismerjük, de a tizedesvessző utáni jegyei ezek: ...,49358869 („Excel pontosság”). Mely egész szám négyzetgyökéről lehet szó?

Trükkös hatványok

Figyeljük meg a következő négyzetre emelést:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 = 7 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + 3 = 10 + 2\sqrt{21}$$

Aki csak a végeredményt látja, nem gondol rá, hogy egy $a + \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) alakú kifejezés négyzete. Pedig az! Ezzel a módszerrel lehet több nehéznek tűnő feladatot egyszerűen megoldani, például a következő is:



Számítsuk ki x pontos értékét: $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

Megoldás: $x = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} + 2)^2} = (1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} + 2) = 3$

Hasonlóképpen pl.: $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^3 = 2\sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + 5\sqrt{5} = 17\sqrt{2} + 11\sqrt{5}$

Ilyen alakban aztán nehéz felismerni a teljes köböt...

Végül egy igen nehéznek tűnő feladat: határozzuk meg az alábbi x szám tizedesvessző utáni századik számjegyét!

$$x = (6 + \sqrt{35})^{100}$$

A megoldás kulcsa, hogy nem ezt a kifejezést vizsgáljuk, hanem a (bonyolultabbnak tűnő)

$$z = x + y = (6 + \sqrt{35})^{100} + (6 - \sqrt{35})^{100} \text{ kifejezést.}$$

A binomiális tétel alapján:

$$x = (6 + \sqrt{35})^{100} = \binom{100}{0} \cdot 6^{100} + \binom{100}{1} \cdot 6^{99} \cdot (\sqrt{35}) + \binom{100}{2} \cdot 6^{98} \cdot (\sqrt{35})^2 + \binom{100}{3} \cdot 6^{97} \cdot (\sqrt{35})^3 + \dots$$

$$\dots + \binom{100}{99} \cdot 6 \cdot (\sqrt{35})^{99} + \binom{100}{100} \cdot (\sqrt{35})^{100}$$

$$y = (6 + (-\sqrt{35}))^{100} = \binom{100}{0} \cdot 6^{100} + \binom{100}{1} \cdot 6^{99} \cdot (-\sqrt{35}) + \binom{100}{2} \cdot 6^{98} \cdot (-\sqrt{35})^2 + \binom{100}{3} \cdot 6^{97} \cdot (-\sqrt{35})^3 +$$

$$+ \dots + \binom{100}{99} \cdot 6 \cdot (-\sqrt{35})^{99} + \binom{100}{100} \cdot (-\sqrt{35})^{100} = \binom{100}{0} \cdot 6^{100} - \binom{100}{1} \cdot 6^{99} \cdot \sqrt{35} + \binom{100}{2} \cdot 6^{98} \cdot (\sqrt{35})^2 -$$

$$- \binom{100}{3} \cdot 6^{97} \cdot (\sqrt{35})^3 + \dots - \binom{100}{99} \cdot 6 \cdot (\sqrt{35})^{99} + \binom{100}{100} \cdot (\sqrt{35})^{100}$$

Megfigyelhető, hogy a két kifejezés páratlan sorszámú tagjai azonosak. A páros sorszámú tagok egymás ellentettjei, így az $x+y$ összegben kiesnek (algebrai összegük nulla). A páratlan sorszámú tagok három tényezőből állnak: egy binomiális együttható, ami egész szám, a 6-nak egy hatványa, ami szintén egész, majd a $\sqrt{35}$ -nek egy **páros kitevőjű** hatványa, ez épp a 35-nek pozitív egész kitevős hatványa, tehát ez is egész. Így az $x+y$ összeg csupa egész számok összege, tehát $z = x+y$ egész szám.

Írjuk fel a $(6 - \sqrt{35})$ szám közelítő értékét! Látható, hogy $0 < (6 - \sqrt{35}) \approx 0,08392 < 0,1$.

Emiatt $0 < y = (6 - \sqrt{35})^{100} < 0,1^{100} = 0,000\dots001$, ahol az utolsó szám a tizedesvessző után 99 darab nullát tartalmaz. Ebből x -re a következőket írhatjuk fel: $z - 0,1^{100} < x = z - y < z$.

Az imént elmondottak miatt az egyenlőtlenség bal oldalán egy olyan szám áll, amely a tizedesvessző után 100 darab kilences számjegyet tartalmaz. A jobb oldalon az ezt követő egész látható, vagyis x tizedestört alakja a tizedesvessző után legalább 100 darab 9-est kell, hogy tartalmazzon. Tehát az x szám tizedesvessző utáni századik számjegye egy 9-es.

M126: Számítsuk ki x pontos értékét: $x = \sqrt{29 + 6\sqrt{5}} - 6\sqrt{15} - 10\sqrt{3} + \sqrt{20 - 10\sqrt{3}}$

M127: Számítsuk ki y pontos értékét:

$$y = \sqrt[3]{124 - 53\sqrt{5}} + \sqrt[3]{632 - 197\sqrt{5}} + \sqrt[3]{763 + 334\sqrt{5}}$$

M128: Igazoljuk, hogy a Fibonacci-sorozat (3. munkalap) következő zárt alakjára teljesül, hogy minden eleme az előző kettő összege!

$$F_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}$$

M129: Igazoljuk, hogy a Fibonacci-sorozat imént leírt zárt alakjára teljesül, hogy minden eleme egész!

M130: Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2x+7} = \frac{x^2-7}{2}$$

Transzformációs szerkesztések

Mostanában kevés szó esik a geometriai szerkesztésekről, ritkán találkozunk szerkesztési feladatokkal. Az új típusú középiskolai érettségikben eddig még egyáltalán nem szerepelt szerkesztési feladat. Mondhatni, méltatlanul, mivel e feladatok összefüggések ismeretét, gyakran szellemes ötleteket feltételeznek, teljesebbé teszik a geometriai tudást.

E munkalap főképp szerkesztési feladatokkal foglalkozik, melyeket valamely – vagy akár több – geometriai transzformáció alkalmazásával lehet megoldani. A szerkesztési feladatok koordináta-geometriai feladatokként is megjelenhetnek, ám a lényegük ugyanaz...

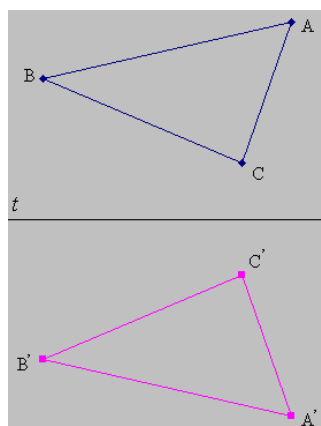


Transzformációk és tulajdonságok

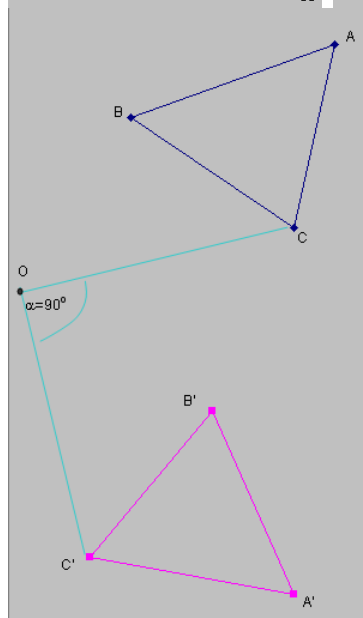
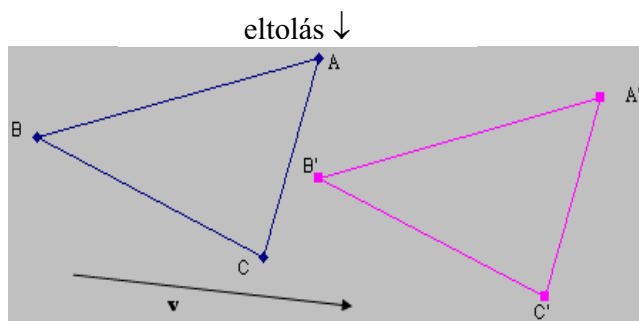
Először olyan fogalmakat és alapvető állításokat ismertetünk, amelyek az utána következő többi rész megértését segítik.

Geometriai transzformáció: Olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is pontthalmaz. Úgy adunk meg egy geometriai transzformációt, hogy az értelmezési tartománya minden pontjához megmondjuk, hogy mit rendel a transzformáció. A transzformációk szemléltetésére nincs olyan jó módszer, mint a valós függvények esetén a koordináta-rendszerben megrajzolt grafikon. Egy transzformációt úgy szemléltetünk, hogy minden pont képe az eredetivel azonos betűjelű, de egy ' (vessző) áll a betűjel mögött. Például P pont képét P'-vel jelöljük. A most következő transzformációk mind síkbeliek, azaz értelmezési tartományuk a sík pontjainak halmaza.

1. Tengelyes tükrözés: Legyen t egy egyenes a síkon (neve: tengely). Rendeljük hozzá t minden pontjához önmagát, a sík többi P pontjához pedig azt a P' pontot, amelyre igaz, hogy a PP' szakasz felezőmerőlegese t .
2. Eltolás: Legyen $\vec{v}$ egy síkbeli vektor. A sík minden P pontjához rendeljük hozzá azt a P' pontot, melyre teljesül, hogy $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.
3. Pont körüli forgatás: Legyen O egy adott síkbeli pont és α egy adott forgásszög. Rendeljük hozzá O-hoz önmagát, a sík többi P pontjához pedig azt a P' pontot, melyre teljesül, hogy $OP = OP'$ és $\angle POP' = \alpha$.
4. Középpontos tükrözés: Ha egy pont körüli forgatás szöge $180^\circ + k \cdot 360^\circ$ (ha $k \in \mathbb{Z}$), akkor a transzformációt középpontos tükrözésnek nevezzük.

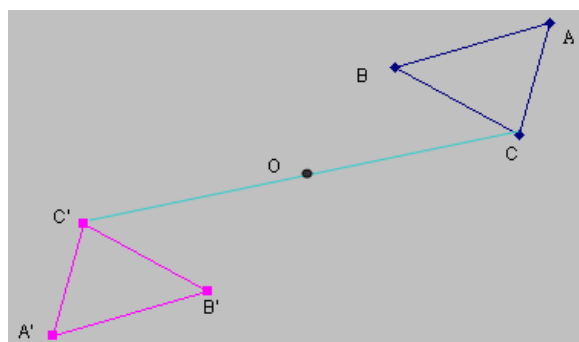


← tengelyes tükrözés



← forgatás 90°-kal

középpontos tükrözés ↓



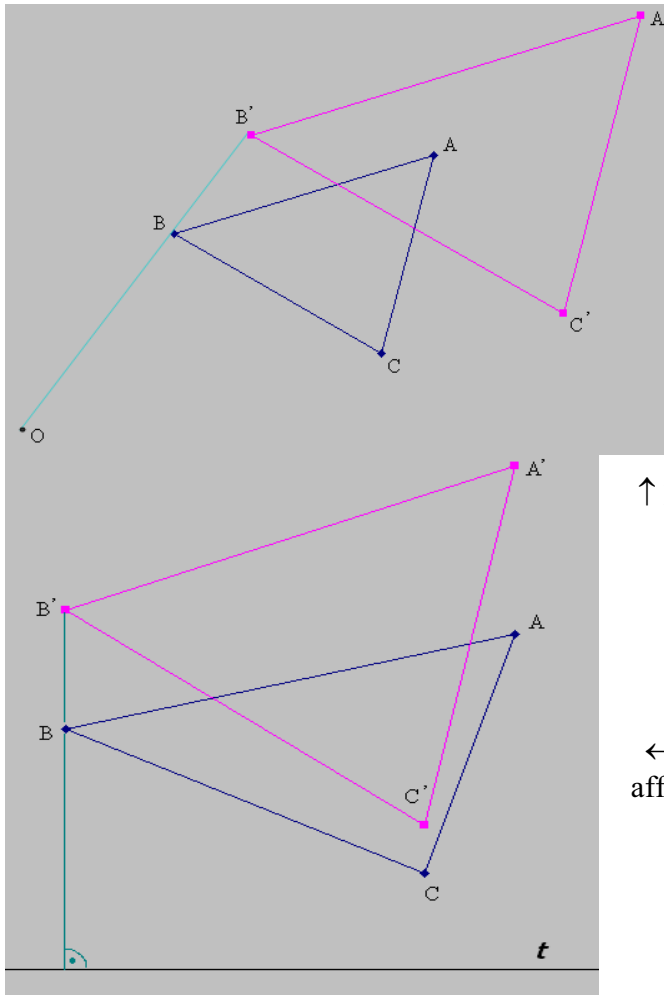
5. Középpontos hasonlóság: Legyen O egy adott síkbeli pont és λ egy nem 0 valós szám. Rendeljük hozzá O -hoz önmagát, a sík többi P pontjához pedig azt a P' pontot, melyre teljesül, hogy:

- P, O, P' pontok egy egyenesre esnek
- $\frac{OP'}{OP} = |\lambda|$
- Ha $\lambda > 0$, akkor O nincs rajta a PP' szakaszon, $\lambda < 0$ esetén O rajta van a PP' szakaszon.

6. Merőleges affinitás: Legyen adott egy t síkbeli egyenes és egy λ nem 0 valós szám. Rendeljük hozzá t pontjaihoz önmagukat, a sík többi P pontjához pedig azt a P' pontot, melyre teljesül, hogy:

- PP' szakasz merőleges t -re.
- $\frac{P't}{Pt} = |\lambda|$

- Ha $\lambda > 0$, akkor PP' szakasznak nincs t -vel közös pontja, $\lambda < 0$ esetén PP' szakasznak van t -vel közös pontja

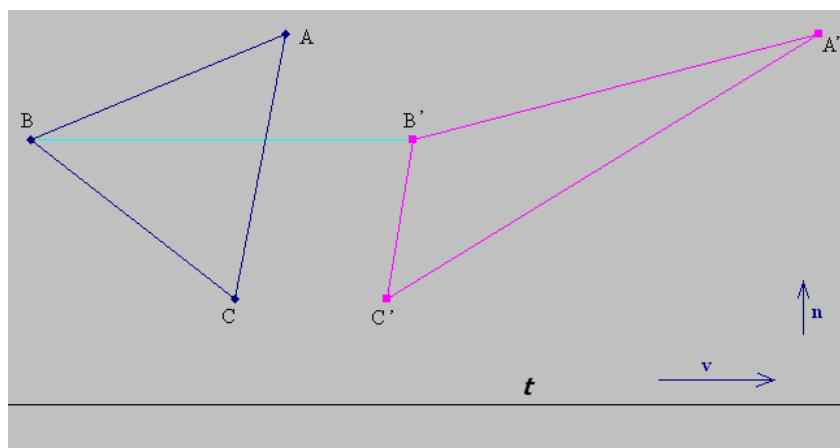


↑ középpontos
hasonlóság
 $\lambda = 1,5$

← Merőleges
affinitás, $\lambda = 1,5$

7. Nyírás (párhuzamos affinitás): Legyen adott egy síkbeli **irányított** t egyenes, annak egy irány- és egy normálvektora, és egy $\lambda > 0$ valós szám. Rendeljük hozzá t pontjaihoz önmagukat, a sík többi P pontjához pedig azt a P' pontot, melyre teljesül:

- PP' szakasz párhuzamos t -vel.
- $\frac{\overrightarrow{P'P}}{\overrightarrow{Pt}} = \lambda$
- Ha P pont t -nek a normálvektor irányába eső félsíkjában van, akkor $\overrightarrow{PP'}$ egyirányú az irányvektorral, ha P pont t -nek a normálvektor irányával ellentétes félsíkjában van, akkor PP' ellentétes irányú az irányvektorral.



← nyírás
 $\lambda=1,5$

A transzformációk tulajdonságai

Tengelyes tükrözés: egyenestartó, szögtartó, aránytartó, távolságtartó, körüljárást fordító. Fixpontok a tengely pontjai, fixegyenesek a tengelyre merőleges egyenesek és a tengely. Egy nem fix egyenes és képe a tengelyen metszi egymást.

Eltolás: egyenestartó, szögtartó, aránytartó, távolságtartó, iránytartó, körüljárástartó. Fixpont nincs, fixegyenesek a v -vel párhuzamos egyenesek.

A nem fix egyenesek párhuzamosak a képükkel.

Pont körüli forgatás: egyenestartó, szögtartó, aránytartó, távolságtartó, körüljárástartó. Fixpont az O pont, és ha nem középpontos tükrözés, akkor fixegyenese nincs. Minden egyenes α szöget zár be a képével és O-ban metszik egymást.

Középpontos tükrözés: egyenestartó, szögtartó, aránytartó, távolságtartó, körüljárástartó. Fixpont az O pont, fixegyenese az O-n áthaladó egyenesek. A nem fix egyenesek párhuzamosak a képükkel. Egy vektor és képe ellentettjei egymásnak.

Középpontos hasonlóság: egyenestartó, szögtartó, aránytartó, körüljárástartó. Fixpont az O pont, ha $\lambda \neq 1$, akkor fixegyenese az O-n áthaladó egyenesek. $\lambda = 1$ esetén helybenhagyás (identitás), $\lambda = -1$ esetén egy középpontos tükrözés. Minden egyenes párhuzamos a képével. A vektorokat a λ -szorosukba viszi. Minden szakasz képeének hossza $|\lambda|$ -szerese a szakasz hosszának.

Merőleges affinitás: egyenestartó, $\lambda > 1$ esetén körüljárástartó, $\lambda < 1$ esetén körüljárást fordító. Ha $\lambda \neq 1$, akkor nem szögtartó és nem aránytartó. $\lambda = 1$ esetén helybenhagyás (identitás), $\lambda = -1$ esetén pedig tengelyes tükrözés.

Fixpontok a tengely pontjai, fixegyenesek a tengelyre merőleges egyenesek és a tengely. Egy nem fix és tengellyel nem párhuzamos egyenes és képe a tengelyen metszi egymást. Egymással párhuzamos szakaszok és képeik aránya egyenlő. Minden kör képe ellipszis, melynek egyik tengelye párhuzamos az affinitási tengellyel, hossza az eredeti kör átmérője a másik tengely pedig annak $|\lambda|$ -szerese.

Nyírás: egyenestartó, körüljárástartó. Nem szögtartó és nem aránytartó. Fixpontok a tengely pontjai, fixegyenesek a tengellyel párhuzamos egyenesek és a tengely. Egy nem fix egyenes és képe a tengelyen metszi egymást. Egymással párhuzamos szakaszok és képeik aránya egyenlő. Minden kör képe ellipszis.

M131: Készíts olyan Excel táblázatot, amely a fentebbi ábrákat diagramként elkészíti!

A t tengely mindenütt az x tengely, az O pont az origó és $\alpha=90^\circ$. Viszont az eredeti háromszög, a λ és a v változtatható! Mintaként itt a készítendő táblázat fényképe:

Eredeti háromszög		Tengelyes tükrözés		Eltolás		Elforgatás		Középpontos tükrözés		Középpontos hasonlóság		Merőleges affinitás		Merőleges affinitás	
		t= x tengely		v(5,2)		alfa= 90		O=origó		O=origó		t= x tengely		t= x tengely	
				5 -1		O=origó				lambda= 1,5		lambda= 1,5		lambda= 1,5	
x	y	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'
7	2	7	-2	12	1	2	-7	-7	-2	10,5	3	7	3	10	2
3	5	3	-5	8	4	5	-3	-3	-5	4,5	7,5	3	7,5	10,5	5
8	7	8	-7	13	6	7	-8	-8	-7	12	10,5	8	10,5	18,5	7
7	2	7	-2	12	1	2	-7	-7	-2	10,5	3	7	3	10	2

M132: Igazold, hogy a merőleges affinitás és a nyírás egyenestartó! Ehhez elég igazolni, hogy bármely három egy egyenesen levő (kollineáris) pont képe egy egyenesen van.

A most ismertetett transzformációkat fogjuk szerkesztési feladatok megoldására felhasználni.

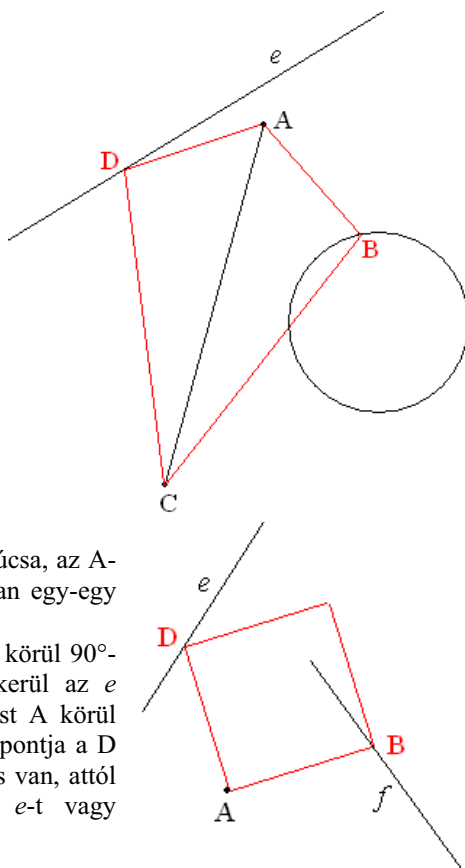
Szerkesztési feladatok:

1. feladat Adott a síkon egy AC szakasz, egy k kör és egy e egyenes. Szerkesszünk ABCD deltoidot, amelynek AC a szimmetriaátlója, $B \in k$ és $D \in e$!

Megoldás: Ha D pontot tükrözzük az AC egyenesére, akkor a B pontba kerül, azaz rákerül a körre. Tükrözzük az egész egyenest az AC egyenesére, s a kapott e' képeggyenes körre eső pontja(i) a B pont lehetséges helye. 0, 1 vagy 2 megoldás van, attól függően, hogy az egyenes képének hány közös pontja van a körrel.

2. feladat Adott a síkon egy A pont, egy e és egy f egyenes. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek A az egyik csúcsa, az A-val szomszédos két csúcsa pedig rajta van egy-egy adott egyenesen, azaz $D \in e$ és $B \in f$.

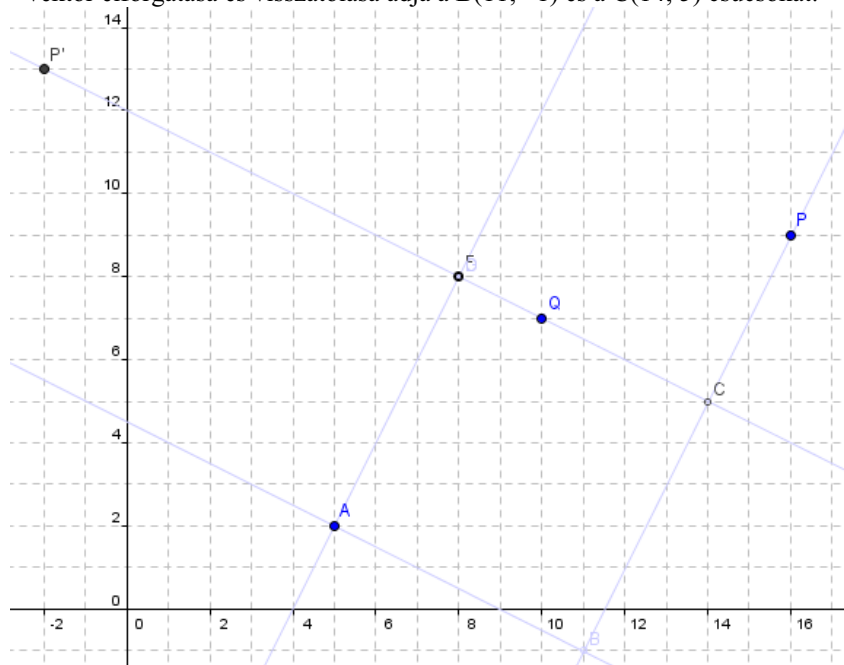
Megoldás: Ha B pontot elforgatjuk A pont körül 90° -kal, akkor a D pontba kerül, azaz rákerül az e egyenesre. Forgassuk az egész f egyenest A körül 90° -kal, a kapott f' képeggyenes e -re eső pontja a D pont lehetséges helye. 0 vagy 1 megoldás van, attól függően, metszi-e az f' egyenes az e -t vagy párhuzamos vele.



(Hogyan forgatunk el egy egyenest egy pont körül? Elforgatjuk két pontját, s mivel az elforgatás egyenestartó, ezért a képpontokon átmenő egyenes lesz az egyenes képe.)

3. feladat Adott a koordinátasíkon három pont: $A(5; 2)$, $P(16; 9)$ és $Q(10; 7)$. Az A pont egy négyzet csúcsa, P pont a CB oldalegyenes egy pontja, Q pedig a CD oldalegyenes egy pontja. Számítsuk ki a négyzet csúcsainak koordinátáit!

Megoldás: Az alapötlet, hogy az A pont körül 90° -kal elforgatva CB oldalegyenes képe a CD oldalegyenes lesz. Tehát P pontot az A pont körül 90° -kal elforgatva $P'Q$ egyenes azonos CD oldalegyenessel. Innen már könnyű a számolás. Részletezve a számolást: $AP(11; 7)$, elforgatva: $AP'(-7; 11)$, eltolva A -ba: $P'(-2; 13)$. $P'Q(12; -6) = \mathbf{v}_e$, azaz $\mathbf{n}_e(6; 12)$, egyszerűbb vektorral: $\mathbf{n}_e(1; 2)$. Így e egyenlete: $x+2y=24$ (Ez a CD oldalegyenes egyenlete). Bocsássunk merőlegest A -ból e -re: $f: 2x-y=8$. $e \cap f = D(8; 8)$. AD vektor elforgatása és visszatolása adja a $B(11; -1)$ és a $C(14; 5)$ csúcsokat.

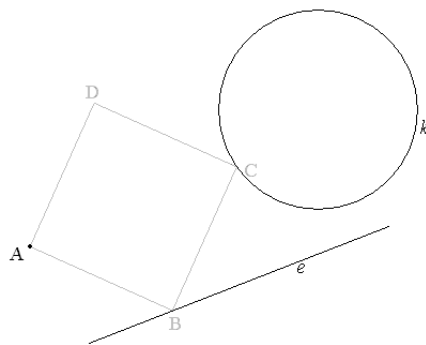
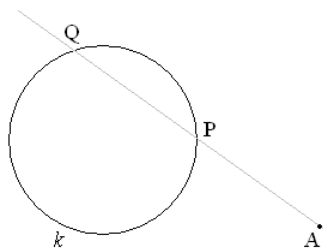


4. feladat Adott a síkon egy A pont, és egy k kör. Szerkesszünk olyan A -n áthaladó szelőt a körhöz, amelynek a körrel való metszéspontjai P és Q , és $AP=PQ$ teljesül!

Megoldás:

Ha A középpontú, $\lambda=2$ arányú középpont-

pontos hasonlóságot alkalmazunk, akkor ez a transzformáció P -t éppen Q -ba viszi. Tehát ha a körre végezzük el a transzformációt, akkor k' és k metszéspontja épp a Q pont lesz.

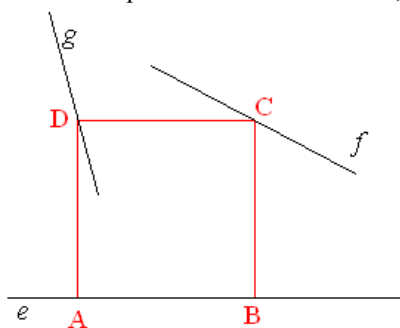
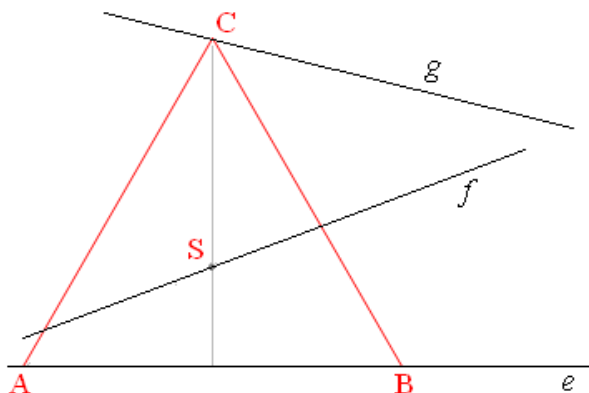


5. feladat Adott a síkon egy A pont, egy e egyenes és egy k kör. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek A az egyik csúcsa, az A -val szomszédos B csúcsa rajta van az adott e egyenesen, az A -val szemközti C csúcs pedig rajta van a k körön!

Megoldás: Ha alkalmazunk egy A pont körüli 45° -os elforgatást, majd utána egy A középpontú, $\lambda = \sqrt{2}$ arányú középpontos hasonlóságot, akkor az B -t éppen C -be viszi. Tehát ha az e egyenesre végezzük el a transzformációt, akkor e' és k metszéspontja épp a C pont lesz. (Segítség a $\lambda = \sqrt{2}$ arányú középpontos hasonlóság szerkesztéséhez: bármely x szakasz $\sqrt{2}$ -szöröse úgy szerkeszthető, hogy egy x oldalú négyzetet szerkesztünk, s annak átlóját tekintjük.)

6. feladat Adott a síkon egy e , egy f és egy g egyenes. Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, amelynek AB oldalegyenese e , a háromszög S súlypontja rajta van az f egyenesen, az e -vel szemközti C csúcs pedig rajta van a g egyenesen!

Megoldás: Ha e tengelyű, $\lambda=3$ arányú merőleges affinitást alkalmazunk, akkor ez a transzformáció S -et éppen C -be viszi (a súlypont a súlyvonal harmadolópontja.). Tehát ha az f egyenesre végezzük el a transzformációt, akkor f' és g metszéspontja épp a C pont lesz. C -ből merőlegest bocsátunk e -re, majd erre mindkét oldalon a C pontnál 30° -ot felmérünk, e két félegyenes kimetszi az A és a B csúcsokat.



7. feladat Adott a síkon egy e , egy f és egy g egyenes. Szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek e az AB oldalegyenese, a vele szemközti két csúcsa pedig rajta van az f és g egyenesen ($C \in f$ és $D \in g$)!

Megoldás: Ha e tengelyű, $\lambda=1$ arányú nyírást alkalmazunk, akkor ez a transzformáció C -t éppen D -be viszi. Tehát ha az f egyenesre végezzük el a transzformációt, akkor f' és g metszéspontja épp a D pont lesz. Ezután ha merőlegest bocsátunk D -ből e -re, ez kimetszi B -t, így megvan egy oldal, ebből már egyszerűen

kapható az A és D csúcs.

További feladatok:

M133: Adott a síkon három párhuzamos egyenes. Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, amelynek csúcsai az adott három egyenesen vannak (mindegyik egyenesen egy csúcs)!

M134: Adott a síkon két koncentrikus kör. Szerkesszünk olyan e egyenest, amely mindkét kört metszi, s ha az egyenesen ez a négy metszéspont rendre P, Q, R, S , akkor ezekre $PQ=RS=2QR$ teljesül!

M135: Adott $P(5; 8)$, $Q(7; -8)$, $R(17; 3)$, és $S(-3; -6)$ rendre egy négyzet négy (AB, BC, CD, DA) oldalegyenesén levő egy-egy pont. Határozzuk meg a négyzet csúcsait!

M136: Adott a síkon egy A és egy B pont, továbbá két kör $(k_1$ és $k_2)$, ahol A és B egy paralelogramma két szomszédos csúcsa, a C csúcs rajta van a k_1 , D csúcs pedig a k_2 körön. Szerkeszd meg a paralelogrammát!

M137: Adott a síkon egy A és egy C pont, továbbá két kör $(k_1$ és $k_2)$, ahol A és C egy paralelogramma két szemközti csúcsa, a B csúcs rajta van a k_1 , D csúcs pedig a k_2 körön. Szerkeszd meg a paralelogrammát!

M138: Adott a síkon egy e , egy f és egy g egyenes. Tudjuk, hogy egy ABC szabályos háromszög A és B csúcsa illeszkedik az e egyenesre, a BC oldal felezőpontja illeszkedik az f egyenesre, míg az AC oldal felezőpontja illeszkedik a g egyenesre. Szerkeszd meg a háromszöget!

M139: Adott a síkon egy $ABCD$ rombusz, melynek két átlója egy ellipszis két tengelye. Adott továbbá egy e egyenes, amely metszi a rombuszt. Szerkeszd meg az e egyenes és az ellipszis metszéspontjait!

M130: Adott egy „ a ” és egy „ s ” szakasz, továbbá egy α szög. Szerkesszünk olyan háromszöget, melynek egyik oldala „ a ” hosszúságú, a vele szemközti szög α , „ s ” pedig az „ a ” szakasz egyik végpontjából induló súlyvonal hosszát adja!

Öt kis matematikai kutatás

Itt öt olyan feladatot találsz, melyek önálló munkára adnak lehetőséget. Minden feladat körülhatárol egy matematikai területet, s e területen belül a kreativitásodon múlik, hogy milyen eredményeket kapsz.

Hogy milyen messzire jutsz el e feladatokkal, sokban azon múlik, tudsz-e önállóan kérdéseket feltenni, mert az általad feltett kérdéseket kell megválaszolni! Néhány kérdés-mintát adok az egyes témakörökhöz, de ugyanolyan értékesek azok a válaszok is, amelyek nem a megadott minta-kérdésekre válaszolnak, hanem más problémákkal foglalkoznak az adott témakörön belül.

Nézd át ilyen szemmel az eddigi munkalapokat, megmutatják, hogyan érdemes kérdezni egy matematikai területen belül!

Feltehetsz „értelmes” kérdéseket egy témában, akkor is, ha nem tudod őket teljesen megválaszolni!

E témák több munkát feltételeznek, mint a többi munkalap egy-egy feladatmegoldása.

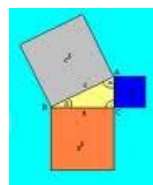
K1: Pitagorasz számhármaskok geometriai kapcsolata

Vizsgálódjunk az egész oldalhosszúságú derékszögű háromszögekben!

Mekkorák lehetnek a hegyesszögeik?

Tetszőleges közelséggel megközelíthetjük például a 90° -ot?

Vagy a 45° -ot? Lehet-e egész más adatuk (pl.: az átfogóhoz tartozó magasság) is?



K2: Bontás egyenlő területű háromszögekre

Ha egy ABC háromszög belsejében levő P pontot minden csúccsal összekötünk, három kisebb háromszögre bontjuk az eredeti háromszöget. (ABP, BCP, CAP háromszögek.)

Ugyanezt konvex négyszögekkel vagy még több oldalú konvex sokszögekkel is megtehetjük.

Vizsgáld meg, hogyan kell úgy felvenni a P pontot, hogy a keletkezett kis háromszögek között bizonyosaknak (megfelelő kettőnek, megfelelő háromnak, esetleg mindnek...) egyenlő legyen a területük!

Vizsgálj meg speciális négyszögeket a megfelelő P pont létezése szempontjából!

K3: Egész koordinátájú pontok a kockás füzet körkein

A kisméretű kockás füzetben levő négyzetrács egy oldala szélétben 27 teljes négyzetet, hosszában 40 teljes négyzetet tartalmaz. Ha koordináta-rendszert veszünk fel egy ilyen füzetben, akkor egy koordináta-egységnek általában egy ilyen négyzetoldalt veszünk.

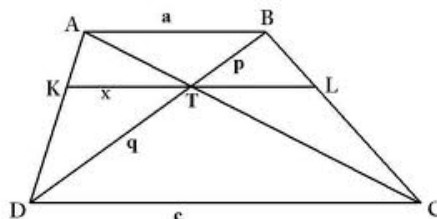
Mekkora annak a körnek a sugara, amely a lehető legtöbb rácspontot tartalmazza a kerületén? Hány rácspont lehet egyáltalán egy ilyen füzet egy lapjára rajzolt kör kerületén? Tudunk-e valamilyen módszerrel a kerületükön minél több rácspontot tartalmazó köröket megadni?

Megjegyzés: E témához kapcsolódik Freud Róbert – Gyarmati Edit: Számelmélet című könyvének 7.5. fejezete. (Nemzeti Tankönyvkiadó Rt. Budapest, 2000. 304. oldal)

K4: „Harmonikus” sorozatok

Közismert a számtani sorozatoknak az a tulajdonsága, hogy a másodiktól kezdve minden elem az előtte és az utána következő elem átlaga, azaz számtani közepe.

A mértani sorozatokra egy kis megszorítást kell tenni, hogy hasonló állítást mondjunk ki,



csak a pozitív elemekből álló mértani sorozatokra igaz hasonló állítás: a másodiktól kezdve minden elem az előtte és az utána következő elem mértani közepe.

A megszorítás azért kellett, mert a mértani közép fogalma csak pozitív számok esetére van értelmezve. Felvetődhet a kérdés: nem lehetne ugyanezt másféle középértékkel is helyettesíteni? Így újabb fajta sorozatokat kaphatunk.

Íme a harmonikus közép fogalma:

Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ **pozitív** számok, akkor harmonikus közepüknek nevezzük a

$$H(a_1; a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} \text{ mennyiséget.}$$

Fentiek mintájára azt mondhatjuk, hogy egy sorozatot „harmonikus” sorozatnak nevezünk, ha **minden eleme pozitív** és a másodiktól kezdve minden elem az előtte és az utána következő elem harmonikus közepe.

Végezz vizsgálatokat a harmonikus sorozatok körében! Próbálj minél többféle kérdést megfogalmazni és megválaszolni! (Segítő tippek: rekurzív és általános képlet az n . elemre, monotonitás, egész, racionális és irracionális elemek a sorozatban, geometriai szemléltetés a fenti trapéz ábrája alapján stb.)

K5: Euklidész: Elemek

A könyvnyomtatás feltalálása óta kevés olyan könyv akad, mely oly sok kiadásban látott volna napvilágot, mint Euklidész Elemi. Az időszámításunk előtt 300 körül keletkezett műben korának matematikai ismereteit gyűjti össze az ókori szerző. Sok helyen nehézkes nyelvezetű vagy túlságosan aprólékosnak tűnik a tárgyalásmódja. Meglepő azonban, hogy a mai középiskolai matematika mennyi tételt, definíciót, mennyi bizonyítást átvett tőle.

Keressünk kapcsolatokat – a teljesség igénye nélkül – Euklidész matematikája és a mai magyar középiskolai tananyag közt!

(Az összehasonlításhoz akár egy használatban levő matematika tankönyv is alapul szolgálhat.)

