

8 110719

4.

Mai fizika

3., javított kiadás

**Statisztikus mechanika. Termodinamika.
Hullámtan. Szimmetriák a fizika törvényeiben**

R. P. Feynman—R. B. Leighton—M. Sands

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985

Ez a könyv az 1964-ben megjelent

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS

(I. kötet 1 – 14. fejezet) (szerzők: Richard P. Feynman, Róbert B. Leighton és Matthew L. Sands) c. mű magyar fordítása, mely az Addison – Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachussetts, USA jogtulajdonos engedélyével került kiadásra és az egész világon való eladásra.

Tartalomjegyzék

Fordították:

DR. BOZÓKI GYÖRGY

a fizikai tudományok kandidátusa

DR. B. GOMBOSI ÉVA

a fizikai tudományok kandidátusa

DR. NAGY ELEMÉR

a fizikai tudományok doktora

Lektorálta:

DR. GYÖRGYI GÉZA

a fizikai tudományok doktora

Az 5. kiadást szakmailag ellenőrizte:

DR. GÁLFI LÁSZLÓ

a fizikai tudományok kandidátusa

© Hungarian translation

Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969.



B 110759

JATE Egyetemi Könyvtár



J000054109

ETO: 53 „19” (082)

530.1

531.1/6

ISBN: 963 10 6445 X

963 10 6446 8

Felelős szerkesztő: Juhász Agnes okl. fizikus

39. Kinetikus gázelmélet	7	43. A diffúzió	54
39.1 Az anyag tulajdonságai	7	43.1 A molekulák közötti ütközések	54
39.2 A gázok nyomása	8	43.2 Az átlagos szabad úthossz	56
39.3 A sugárzási tér nyomása	12	43.3 A driftsebesség	57
39.4 A hőmérséklet és a kinetikus energia	12	43.4 Ionos vezetés	59
39.5 Az ideális gázok törvénye	16	43.5 Molekuláris diffúzió	60
		43.6 Hővezetés	63
40. A statisztikus mechanika alapelvei	19	44. A termodinamika főtételei	64
40.1 Exponenciális eloszlás a légkörben	19	44.1 Hőgépek. Az első főtétel	64
40.2 A Boltzmann-törvény	21	44.2 A második főtétel	66
40.3 Folyadékok párolgása	22	44.3 Reverzibilis gépek	68
40.4 A molekulák sebességeloszlása	23	44.4 Az ideális gép hatásfoka	71
40.5 A gázok fajhője	26	44.5 A termodinamikai hőmérséklet	73
40.6 A klasszikus fizika válsága	28	44.6 Az entrópia	74
41. A Brown-mozgás	31	45. A termodinamika alkalmazása	78
41.1 Az energia ekvipartíciója	31	45.1 A belső energia	78
41.2 A sugárzás termikus egyensúlya	34	45.2 Alkalmazások	81
41.3 Ekvipartíció és a kvantumoszillátor	37	45.3 A Clausius – Clapeyron-egyenlet	83
41.4 Bolyongás	40		
42. A kinetikus elmélet alkalmazásai	43	46. A kilincskerék	87
42.1 Párolgás	43	46.1 A kilincskerék működése	87
42.2 Termikus elektronemisszió	46	46.2 A kilincskerék mint gép	88
42.3 Termikus ionizáció	47	46.3 Reverzibilitás a mechanikában	91
42.4 Kémiai reakciók kinetikája	49	46.4 Irreverzibilitás	92
42.5 Einstein-féle sugárzási törvények	50	46.5 Rend és entrópia	93

47. A hang és a hullámegyenlet	96	50.2 Fourier-sorok	125
		50.3 Hangszín és összhang	127
47.1 Hullámok	96	50.4 Fourier-együtthatók	128
47.2 A hang terjedése	98	50.5 Az energiátétel	131
47.3 A hullámegyenlet	99	50.6 Nemlineáris reakciók	132
47.4 A hullámegyenlet megoldásai	101		
47.5 A hangsebesség	102		
		51. Hullámok	135
48. A lebegés	104	51.1 Fejhullámok	135
		51.2 Lökéshullámok	136
48.1 Két hullám összege	104	51.3 Hullámok szilárd testekben	139
48.2 Lebegés és moduláció	106	51.4 Felületi hullámok	142
48.3 Oldalsávok	107		
48.4 Lokalizált hullámcsomagok	109	52. A fizikai törvények szimmetriái	146
48.5 Részecskék valószínűség-amplitúdói	111	52.1 Szimmetriaműveletek	146
48.6 Háromdimenziós hullámok	112	52.2 Szimmetria térben és időben	146
48.7 Sajátrezgések	113	52.3 Szimmetria és a megmaradási törvények	149
49. Sajátrezgések	114	52.4 Tükrözési szimmetria	149
49.1 Hullámok visszaverődése	114	52.5 Poláris és axiálvektorok	152
49.2 Hullámok véges térrészben. Saját-frekvenciák	116	52.6 Melyik is a jobb kéz?	153
49.3 Kétdimenziós sajátrezgések	118	52.7 A paritás nem marad meg!	154
49.4 Csatolt ingák	121	52.8 Antianyag	156
49.5 Lineáris rendszerek	122	52.9 Sértett szimmetriák	158
		Példatár	159
50. Harmonikus rezgések	124		
50.1 Zenei hangok	124	Megoldások	167

39 Kinetikus gázelmélet

39.1 Az anyag tulajdonságai

Ebben a fejezetben új témakört kezdünk tárgyalni, s hosszabb ideig ezzel foglalkozunk majd. Az anyag tulajdonságait vizsgáljuk a fizika szempontjai szerint. Felismerve, hogy az anyag egymással elektromos kölcsönhatásban áll, s a mechanika törvényeit követő atomokból vagy elemi részecskékből épül fel, igyekszünk megérteni, hogy az atomok különböző konglomerátumai miért éppen úgy viselkednek, ahogyan megfigyelhetjük.

Talán szükségtelen hangsúlyozni, hogy ez milyen *rendkívül* nehéz feladat, s hogy az eddigiekhez képest egészen más módon kell a problémákat megoldanunk. A mechanika és az optika tanulmányozása során néhány törvény, mint pl. a Newton-törvények vagy a gyorsuló töltés által keltett térre vonatkozó összefüggés pontos megfogalmazásával kezdtük tárgyalásainkat. Ezek ismeretében a jelenségek egész sorát meg tudtuk magyarázni, s így a törvények mechanikai és optikai ismereteink szilárd alapját képezhették.

Az anyag tulajdonságait azonban ezzel a módszerrel nem tanulmányozhatjuk. Ez a tárgykör ugyanis sokkal bonyolultabb annál, semhogy közvetlenül az eddigi alaptörvényekből indulhatnánk ki. Ezek a törvények túl messze esnek azoktól a tulajdonságoktól, amelyeket elemezni akarunk. Ha a Newton-törvényeket alkalmazzuk, csak igen sok lépés után juthatunk el az anyag tulajdonságaihoz, s minden egyes lépés önmagában is meglehetősen bonyolult. A következőkre vonatkozóan előre meg kell mondanunk, hogy noha analizisünk nagy része többé-kevésbé pontos lesz, azért lépésről lépésre egyre többet veszítünk

majd a pontosságából. Az anyag tulajdonságait még nem tudjuk teljes mélységében megérteni.

Ennek egyik oka az, hogy az alaposabb vizsgálódáshoz a valószínűségszámítás elméletének ismeretére lenne szükség. Mi azonban — hogy gondolatmenetünk többek számára érthető legyen — nem tételezzük fel a matematikai apparátus ismeretét, s így túl mélyre nem hatolhatunk. Nem óhajtjuk ugyanis minden egyes atom mozgását ténylegesen nyom követni, hanem inkább azt akarjuk tudni, hogy az atomok a különböző irányokban átlagosan mennyit mozognak, továbbá az egyes effektusok valószínűségét akarjuk ismerni.

A második és sokkal döntőbb ok tisztán fizikai: az atomok tényleges viselkedését nem a klasszikus mechanika, hanem a kvantummechanika írja le, s ennek ismerete nélkül témánkat nem is tudjuk teljesen megérteni. Ellentétben a biliárdgolyók vagy az autók esetével, az anyag tulajdonságait vizsgálva úgy találjuk, hogy a klasszikus, ill. a kvantummechanika törvényei között igen fontos és számottevő a különbség. Ezért sok olyan magyarázat, ami a klasszikus fizikából következne, ez esetben alapvetően helytelen. Mivel kvantummechanikával csak tanulmányaink végén foglalkozunk, lesznek jelenségek, melyeket részben újra kell majd tanulnunk. Mindig jelezzük azonban, ha gondolatmenetünk zsákutcába vezet, s így azonnal tudjuk majd, hol van a klasszikus mechanika „érvényességi határa”. Azért foglalkoztunk a 3. kötetben a kvantummechanika alapjaival, hogy legalább elképzelésünk legyen arról, milyen területeken

nem állja meg a helyét a klasszikus mechanika.

Egyáltalán miért most foglalkozunk ezzel a témával? Miért nem a végén, amikor már ismerjük a valószínűségszámítást, és a kvantummechanikát, hiszen akkor az egészet alaposabban tárgyalhatnánk. A válasz: nehéz tárgykört jobb lassan (fokozatosan) tanulni. Első teendőnk némi elképzelést szerezni arról, hogy a különböző körülmények között mi megy végbe, s később, amikor már jobban megismertük az alaptörvényeket, mindezt pontosabban fogalmazzuk meg.

Bárkinék, aki az anyag tulajdonságait egy valóságos probléma kapcsán akarja megismerni, az alapegyenletek felírásával kell kezdenie a munkát, majd igyekeznie kell matematikailag megoldani őket. Mi azonban tényleges sikert csak akkor érhetünk el, ha fizikai nézőpontból indulunk ki. Először valamilyen elképzelésünknek kell lenni arról, hogy mit is akarunk elérni, majd mérlegelve, hogy az adott bonyolult helyzetben mi tekinthető lényegesnek és mit lehet elhanyagolni, találjuk meg a megfelelő közelítéseket.

Ezek a problémák annyira összetettek, hogy még elemi értelmezésük is értékes, akkor is, ha kezdetben pontatlan és hiányos. Fizikai tanulmányaink során így ugyanazt a feladatot újból és újból áttekintjük, minden alkalommal pontosabb közelítéssel.

Még valami indokolja, hogy a témakört már most kezdjük tárgyalni. Néhány fogalommal már találkozottunk (pl. a kémiában), néhányról pedig már a középiskolában hallottunk. Érdekes lesz fizikai alapjukat megismerni.

Példaként a következőt említjük meg. Mindannyian tudjuk, hogy azonos térfogatú gázokban azonos nyomáson és hőmérsékleten a molekulák száma azonos. A többszörös súlyviszonyok törvényét, mely szerint két gáz kémiai reakciója esetén a reakcióba lépő térfogatok mindig úgy aránylanak egymáshoz, mint két egész szám, Avogadro értette meg először annak alapján, hogy azonos térfogatok azonos számú atomot tartalmaznak. De miért tartalmaznak azonos számú atomot?

Levezethető-e ez a Newton-törvényekből? Ebben a fejezetben ezzel a speciális problémakörrel foglalkozunk. A következő fejezetekben a nyomással, a térfogattal és a hőmérséklettel kapcsolatos jelenségeket vizsgáljuk meg.

Többek között azt találjuk majd, hogy a problémakör nematomos nézőpontból is megközelíthető, s hogy az anyagok tulajdonságai közt belső összefüggés van. Ha például összenyomunk egy testet, akkor felmelegszik, ha felmelegítjük, akkor kitágul. E két tény közötti összefüggést a jelenségek mögött levő mechanizmustól függetlenül is le lehet írni. Az e problémakörrel foglalkozó tudományt *termodinamikának* nevezik. A termodinamikát természetesen a jelenségek mögött levő tényleges mechanizmus megismerésével lehet *megérteni*. Mi éppen ezért az atomos nézőpontból indulunk ki, s ennek segítségével magyarázzuk meg az anyag különböző tulajdonságait s a termodinamika törvényeit.

Kezdjük tehát a gázok tulajdonságaival, a mechanika newtoni törvényei alapján.

39.2 A gázok nyomása

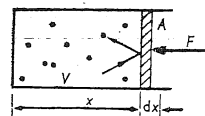
Először is tudjuk, hogy a gázok nyomást fejtenek ki. Gondoljuk át részletesen, hogy ezt mi okozza.

Ha fülünk sokkal érzékenyebb lenne, akkor érzékelné, amint a levegő részecskéi nekiütöknek. A fejlődés során az emberi fül nem vált ennyire érzékennyé, de ez nem is lenne előnyös, hiszen akkor állandó zúgást hallanánk.

A dobhártya összeköttetésben van a levegővel, a levegő viszont számtalan, állandóan és rendezetlenül mozgó molekulából áll, amelyek nekiütöknek a dobhártyának. Az állandó „bombázás” eredménye a dobhártya kis elmozdulása lenne, mivel azonban az atomok a dobhártya másik oldalát is ugyanolyan mértékben állandóan bombázzák, az eredő erő zérus. Ha egyik oldalról eltávolítanánk a levegőt, vagy megváltoztatnánk viszonylagos mennyiségét a két oldalon, akkor a bombázás mennyisége egyik oldalon nagyobb lenne,

mint a másikon, és a dobhártya valamilyen mértékben elmozdulna. Néha, amikor túl gyorsan emelkedünk fel lifttel vagy repülőgéppel, érezzük is ezt a kényelmetlen hatást, különösen ha még meg is vagyunk fázva (ilyenkor ugyanis a gyulladás miatt elzáródik a dobhártyán belüli teret és a külső levegőt a torkon keresztül összekötő cső, úgyhogy a két nyomás nem tud elég gyorsan kiegyenlítődni).

A helyzet kvantitatív analizéséhez képzeljük el, hogy egyik oldalán mozgatható dugattyúval lezárt dobozban adott térfogatú gáz van (39.1 ábra). Szeretnénk tudni: mekkora erő hat a dugattyúra egyszerűen annak következtében, hogy a dobozban atomok vannak.



39.1 ábra. Gázatomok sűrűdásmentes dugattyúval lezárt dobozban

A V térfogatú dobozban az atomok különböző sebességgel mozogva beleütöknek a dugattyúba. Tegyük fel, hogy a dugattyú külső oldalán semmi sincs, azaz vákuum van! Mi történik ekkor? Ha a dugattyú magára lenne hagyva, és semmi sem tartaná, akkor valahányszor nekiütődik egy atom, mindannyiszor kis impulzusra tenne szert, és fokozatosan kilöködné a dobozból. Hogy ez ne következzen be, F erővel kell a dugattyút visszatartanunk. A kérdés: mekkora ez az F erő?

Az erőt az egységnyi felületre vonatkoztatjuk: ha A a dugattyú felülete, akkor a rá ható erő ezzel a felülettel lesz arányos. Defináljuk a nyomást mint a dugattyúra ható erő és a dugattyú felületének hányadosát:

$$p = \frac{F}{A}. \quad (39.1)$$

Az elmondottak jobb megértéséhez levezetjük a dW elemi munka kifejezését (később még más célból is szükségünk lesz rá). A gázban a dugattyú $-dx$ elmozdulásakor végzett dW munka az erő és az elmozdulás szorzata, ami a

(39.1) egyenlet értelmében a nyomás, a felület és az elmozdulás szorzatával egyenlő:

$$dW = F(-dx) = -pA dx = -p dV. \quad (39.2)$$

(Az A felület és a dx távolság szorzata a térfogatváltozást adja meg.) A negatív előjel azt fejezi ki, hogy az összenyomás miatt *csökkent* a térfogat. Ezt meggondolva beláthatjuk, hogy a gázok összenyomásához munkát kell *végezni*.

Mekkora erőt kell kifejtenuk ahhoz, hogy a molekulák dugattyúnak ütközését ellensúlyozzuk? A dugattyú minden egyes ütközés-kor bizonyos impulzust kap. Másodpercenként meghatározott impulzust áramlik a dugattyúra, amely ettől mozgásba jön. A dugattyú nyugalomban tartásához másodpercenként ugyanakkora impulzust kell neki átadnunk. Ily módon az erő azzal az impulzussal egyenlő, amelyet nekünk kell másodpercenként a dugattyúval közölnünk. Ha engedjük a dugattyút mozogni, akkor a „bombázások” hatására bizonyos sebességre tesz szert; minden ütközés után kicsit nagyobb lesz a sebessége, vagyis gyorsulni fog. Gyorsulása arányos a ráható erővel. Látjuk tehát, hogy az erő (amelyet a nyomás és a felület szorzataként definiáltunk) egyenlő az ütköző molekulák által a dugattyúnak másodpercenként átadott impulzussal.

A másodpercenkénti impulzust könnyű kiszámítani. A számolást két részben végezzük el. Előbb kiszámítjuk a dugattyúval ütköző egy atom által átadott impulzust, majd azt, hogy az atomok másodpercenként hányszor ütköznek a falba. Az erő e két tényező szorzata.

Először feltételezzük, hogy a dugattyú az atomokra nézve tökéletesen „visszatükröző”. (Ha nem ez a helyzet, akkor az egész elmélet rossz, a dugattyú melegezni kezd, és minden megváltozik. Egyensúly esetén azonban ténylegesen azt kapjuk, hogy az ütközések teljesen rugalmasak. A bejövő és távozó részecskék átlagos energiája nem változik.) Feltételezzük tehát, hogy a gáz egyensúlyi állapotban van, s nincs energiavesztés. Ilyen körülmények között a dugattyúra adott sebességgel érkező



részecske ugyanazon sebességgel távozik és közbene tömege nem változik.

Ha v az atom sebessége, és ennek x irányú komponense v_x , akkor mv_x a „bejövő” impulzus x komponense. Mivel a részecske „visszaverődik”, ezzel egyenlő a „kimenő” komponens is, a dugattyúnak a részecske által egy ütközés során átadott teljes impulzus $2mv_x$.

Ezután térjünk át a másodpercenként vagy tetszőleges időtartam alatt dugattyúnak ütköző atomok számának meghatározására. Az utóbbi esetben a választott dt időtartamra jutó ütközések számát dt -vel elosztjuk. Hány atom ütközik? Ha V térfogatban N atom van, az egységnyi térfogatban levő atomok száma: $n = N/V$. Megjegyezzük, hogy valamely t időtartamon belül, a dugattyú felé adott sebességgel haladó részecskék közül csak azok érik el a dugattyút, amelyek elég közel vannak hozzá.

Ily módon csak azon részecskék ütköznek a dugattyúba, amelyek a kezdeti időpontban már a dugattyútól $v_x t$ távolságon belül tartózkodtak. A t idő alatti ütközések száma tehát a $v_x t$ távolságon belül levő atomok számával egyenlő. Mivel a dugattyú felülete A , ezért a dugattyúba ütköző atomok által elfoglalt térfogat $v_x t A$. A dugattyúba ütköző részecskék száma pedig ezen térfogat s az egységnyi térfogatban levő atomok számának szorzata: $nv_x t A$. Mivel mi nem a t idő alatti, hanem a másodpercenkénti ütközések számát keressük, a t idővel osztunk, úgyhogy a keresett eredmény $nv_x A$. (Ezt a t időt nagyon rövidre választhatjuk, sőt ha elegánsabb megoldást szeretnénk, akkor dt -t írunk és deriválunk, de ezzel semmi sem változik meg.)

Igy tehát azt találjuk, hogy az erő:

$$F = nv_x A \cdot 2mv_x. \quad (39.3)$$

Vegyük észre, hogy állandó részecskesűrűség esetén az erő arányos a felülettel! A nyomás innen egyszerűen adódik:

$$p = 2nmv_x^2. \quad (39.4)$$

Most már kijavíthatunk egyes pontatlanságokat. Először is: nem minden molekula sebessége azonos, és nem is mozognak azonos

irányba. Vagyis a v_x^2 -ek különbözők! Mind-egyik molekula a maga részével hozzájárul a hatáshoz, ezért természetesen *átlagolnunk* kell az összes molekulára. Amire szükségünk van, az a $\langle v_x^2 \rangle$. Ezzel:

$$p = nm\langle v_x^2 \rangle. \quad (39.5)$$

Elfeledkeztünk a 2-es szorzóról? Nem! Csak figyelembe vettük, hogy az atomoknak csak a fele halad a dugattyú felé, a másik fele az ellenkező irányba megy! Amikor $\langle v_x^2 \rangle$ -ot képezzük, akkor a *negatív* v_x -ekre éppúgy átlagoltunk, mint a pozitív v_x -ekre. Emiatt v_x^2 éppen kétszerese annak, amire szükségünk van. A v_x^2 -nek pozitív v_x -ekre vett átlaga egyenlő az összes v_x -ekre vett átlag felével.

Mivel az atomok minden irányban mozoghatnak, nyilvánvaló, hogy az „ x irány” nem kitétetett, az atomok éppúgy mozoghatnak felfelé, előre-hátra, be- és kifelé. Ezért $\langle v_x^2 \rangle$ (az atomok mozgási sebességének egyik irányban vett négyzetes középértéke) egyenlő a bármely irányban vett sebesség négyzetes középértékével:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (39.6)$$

Most már egyszerűen csak matematikai ügyesség kérdése, hogy észrevegyük, mindegyik tag egyenlő összegük – vagyis a sebesség négyzete – egyharmadával:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \left\langle \frac{v^2}{3} \right\rangle. \quad (39.7)$$

Ennek megvan az az előnye, hogy nem kell foglalkozni valamilyen speciális irány kiválasztásával. Így a nyomásra vonatkozó összefüggést újra leírhatjuk:

$$p = \left(\frac{2}{3} \right) n \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle. \quad (39.8)$$

Az utolsó tényezőt azért írtuk az $\langle mv^2/2 \rangle$ alakban, mert ez a molekulák tömegközépponti mozgásának *kinetikus energiája*. A továbbiakban azt találjuk, hogy

$$pV = N \left(\frac{2}{3} \right) \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle, \quad (39.9)$$

amiből a sebesség ismeretével gyorsan kiszámíthatjuk a nyomás nagyságát.

Nagyon egyszerű példaként vizsgáljunk gázokat, pl. héliumot, az elég magas hőmérsékletű higant vagy káliumgőzt, ill. argont. Ezek egyatomos gázok, amelyeket úgy tekinthetünk, mintha az atomon belül nem lenne mozgás (összetett molekula esetén már fel kellene tételni valamilyen rezgést vagy egyéb mozgást). Hogy ez mennyiben engedhető meg, az igen bonyolult kérdés, amelyre még visszatérünk, és akkor majd belátjuk, hogy vizsgálatainkban a feltételezés megengedett.

Ha tehát elhanyagoljuk az atomok belső mozgását, akkor a tömegközépponti mozgás kinetikus energiája maga az összes energia. Egyatomos gázok esetén a kinetikus energia ténylegesen a teljes energiával egyenlő. Általában U -val jelöljük a teljes energiát, vagyis a gázban levő molekulák vagy bármilyen más objektum összenergiáját. Ezt *belső* energiának is nevezik.

Egyatomos gáz esetén feltételezzük, hogy az U teljes energia az atomok számával és átlagos kinetikus energiájának szorzatával egyenlő, mivel elhanyagolunk minden atomokon belüli gerjesztést és belső mozgást. Ilyen körülmények között azt kapjuk, hogy

$$pV = \frac{2}{3} U. \quad (39.10)$$

Álljunk meg itt egy pillanatra, és adjunk választ a következő kérdésre: Mekkora nyomás szükséges egy tartályban levő gáz adott térfogatra való (lassú) komprimálásához? Azt mondhatnánk, hogy ezt könnyen kiszámíthatjuk, hiszen a nyomás egyenlő az energia $2/3$ -a osztva a térfogattal. Igen ám, de a gáz összenyomása közben munkát végzünk, s ezáltal növeljük az U energiát. Ha adott energiájú és térfogatú állapotból indulunk ki, akkor ismerjük a nyomást is ebben az állapotban. Mihelyt elkezdjük az összenyomást, az U energia nőni, a V térfogat pedig csökkenni kezd.

Egy differenciálegyenletet kell tehát megoldanunk, de mielőtt ezt megtennénk, felhívjuk a figyelmet arra, hogy a gáz összenyomása-

kor végzett összes munka az atomok energiájának növelésére fordítódik. Megkérdezhetjük: „Szükséges ezt kiemelni? Mi másra is fordíthatna?” Nos, kiderül, hogy másra is fordítható. A falakon keresztül „kifolyhat” az energia: a falakat bombázó igen gyors atomok felmelegítik a falakat, s így energia távozik a környezetbe. Feltételezzük azonban, hogy a mi esetünkben ez nem következik be.

Végezzünk kis általánosítást (bár még így is egy meglehetősen speciális esetet tekintünk) és $pV = (2/3)U$ helyett írjuk a következőt:

$$pV = (\kappa - 1) U. \quad (39.11)$$

Kényelmi okokból írtunk $(\kappa - 1)$ -et, mert néhány olyan esettel is foglalkozunk majd, ahol U előtt nem $2/3$, hanem attól különböző szám áll. Az általánosság kedvéért ezt az U előtt álló számot mi is – mint már közel 100 éve mások is – $(\kappa - 1)$ -gyel jelöljük. A héliumhoz hasonló, egyatomos gázok esetén $\kappa = 5/3$, mert $(5/3) - 1 = 2/3$.

Már láttuk, hogy gázok összenyomásakor a végzett munka: $-p dV$. Az olyan kompressziót, amelynek során sem energiaközlés, sem energiavesztés nem lép fel, *adiabatikus* kompresszióknak nevezzük. Ez a szó a görög *a(nem)+ dia(keresztül)+ bainen(menni)* szavakból származik. (Az adiabatuszót a fizikában különböző értelemben használják s néha nehéz felismerni, hogy mi a közös az egyes esetekben.) Adiabatusz kompresszió esetén a teljes munka a belső energia megváltoztatására fordítódik: $p dV = -dU$. Mivel azonban $U = pV(\kappa - 1)$, írhatjuk, hogy

$$dU = \frac{(p dV + V dp)}{(\kappa - 1)}. \quad (39.12)$$

Vagyis $p dV = -(p dV + V dp)/(\kappa - 1)$, ill. $\kappa p dV = -V dp$. Innen a változók szétválasztásával:

$$\frac{\kappa dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (39.13)$$

Ha κ állandó – ami egyatomos gázok esetében igaz is –, az egyenlet integrálható: $\kappa \ln V + \ln p = \ln C$, ahol $\ln C$ az integrálási állandó. Mindkét oldal exponenciálisát véve

kapjuk a

$$pV^\kappa = C \text{ konst.} \quad (39.14)$$

törvényt. Szavakkal: adiabatikus kompresszió során, amikor a hőmérséklet növekszik (mert nincs energiavesztés), a nyomás és a térfogat $5/3$ -ik hatványának szorzata egyatomos gázok esetén állandó! Ezt az eredményt elméleti úton vezetjük le, de kísérletileg is igazolható, hogy az egyatomos gázok ténylegesen így viselkednek.

39.3 A sugárzási tér nyomása

Vegyünk a kinetikus gázelméletből még egy példát, ami nem is annyira a kémiával, mint inkább az asztronómiával kapcsolatos.

Tegyük fel, hogy igen sok foton van egy nagy hőmérsékletű dobozban. Ilyen doboz csak valamilyen forró csillag gázhalmaza lehet. (A Nap ehhez nem elég forró, ott még mindig nagyon sok atom van.) Gondolatkísérletünkben azonban feltételezhetjük, hogy a „dobozban” kizárólag fotonok vannak. Egy-egy fotonnak p impulzusa van.

A kinetikus gázelmélet tárgyalása során „nehéz helyzetben” vagyunk, mert a p betű a nyomást és impulzust is jelenti. Megkülönböztetésül a nyomás: p , az impulzus pedig p . (Ha félreértést nem okozhat, és ahol az impulzusnak csak az abszolút értékével számolunk, ott használtuk a p jelet is.)

Elvégezve az előbbi analízist, azt kapjuk, hogy a p vektor x komponense felelős a fotonok falbütöközésekor fellépő „lökésért”, s ennek kétszerese az ütközéskor átadott impulzus. Így tehát $2p_x$ -et írunk $2mv_x$ helyett, de az ütközések számának meghatározásához most is v_x -et használjuk. Az előző pontban bemutatott számítást megismételve, a nyomásra vonatkozó (39.4) egyenlet:

$$p = 2np_x v_x. \quad (39.15)$$

Az átlagolásnál $p_x v_x$ átlagának n -szerese lép fel (emlékezzünk a 2-es faktorról mondotakra), és végül a másik két irányt is figye-

lembe véve:

$$pV = N \left\langle \frac{p \cdot v}{3} \right\rangle. \quad (39.16)$$

Ez megfelel a (39.9) összefüggésnek, mivel az impulzus mv , de ez a képlet általánosabb. A nyomás és a térfogat szorzata az összes atom számának és $(1/3)p \cdot v$ átlagának a szorzatával egyenlő.

Mivel egyenlő a $p \cdot v$ szorzat fotonok esetén? Az impulzus és a sebesség azonos irányúak, a sebesség nagysága pedig a fénysebességgel egyenlő; vagyis a $p \cdot v$ szorzat a foton-impulzusának és a fénysebességnek a szorzata. Ez a szorzat azonban a foton energiáját adja: $W = p \cdot c$, vagyis a kérdéses tagok az egyes fotonok energiájával egyenlők; az átlagos energiát kell tehát megszoroznunk a fotonok számával. Ily módon a gáz belső energiájának $1/3$ -át kapjuk:

$$pV = \frac{U}{3} \text{ (fotongáz esetén)}. \quad (39.17)$$

Fotonokra tehát — mivel az U előtti szorzó értéke $1/3$ — a (39.11) képletben $(\kappa - 1)$ -re $1/3$, ill. κ -ra $4/3$ adódik, s így megkapjuk a dobozba zárt sugárzás törvényét:

$$pV^{4/3} = C. \quad (39.18)$$

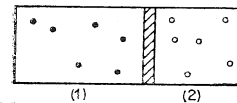
Most már ismerjük a sugárnyomás törvényét! Ezt az összefüggést használják a csillagok sugárzási nyomásának analízisekor, ezzel számolják ki a sugárnyomást és annak változását a csillag kompressziója esetén. Egyszerűen csodálatos, mi mindent tudunk már!

39.4 A hőmérséklet és a kinetikus energia

Mindaddig nem foglalkoztunk a hőmérséklettel, szándékosan elkerültük ezt a fogalmat. Ismeretes, hogy a gázok összenyomása folyamán a molekulák energiája növekszik, azt szoktuk mondani, hogy a gáz felmelegszik. Szeretnénk tudni, hogy mi köze van ennek a hőmérséklethez. Tudjuk már, hogy mit jelent az adiabatikus kompresszió, de hogyan lehet

állandó hőmérséklet mellett elvégezni egy kísérletet? Ha két gázzal teli dobozt egymás mellé helyezünk, és elég hosszú ideig így hagyjuk őket, akkor hőmérsékletük azonosává válik, még ha kezdetben a dobozoknak olyan tulajdonságuk is volt, amit különböző hőmérsékletűnek nevezünk. Két test azonos hőmérséklete nem más, mint elég hosszú ideig tartó kapcsolatuk végállapota.

Mi történik, ha két különböző gázt tartalmazó dobozt mozgó dugattyúval kettéválasztunk a 39.2 ábrán látható módon. (Egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a két gáz egyatomos, mondjuk hélium és neon.) Az l részben térfogategységként n_1 atom van, melyeknek tömege m_1 , sebessége v_1 , a 2 részben ezen mennyiségek értéke n_2 , m_2 és v_2 . Milyen feltételek mellett áll be az egyensúly?



39.2. ábra. Két különböző egyatomos gáz atomjai dugattyúval elválasztott dobozban

Nyilvánvaló, hogy a bal oldalról jövő „bombázások” hatására a dugattyú jobbra mozdul el, és összenyomja a másik gázt, míg a megfelelő nyomás ki nem alakul. Ugyanez megy végbe fordított irányban is. A dugattyú tehát jobbra-balra mozog, majd fokozatosan nyugalomba kerül azon a helyen, ahol a nyomás mindkét oldalról azonos. A két nyomás egyenlősége azt jelenti, hogy az egységnyi térfogatra eső belső energia (azaz az átlagos kinetikus energia és az n részecskeszám szorzata) mindkét oldalon azonos. Amit bizonyítani akarunk az az, hogy a szorzat egyes tényezői külön-külön is egyenlők. Mindaddig csak azt tudtuk, hogy az n részecskeszámok és a kinetikus energiák szorzata egyenlő:

$$n_1 \left\langle \frac{m_1 v_1^2}{2} \right\rangle = n_2 \left\langle \frac{m_2 v_2^2}{2} \right\rangle$$

Ez (39.8)-ból következik a nyomások egyenlősége folytán. Tisztában kell lenni azonban

azzal, hogy az egyensúly kialakulásának ideje alatt, amíg a gázok hőmérséklete kiegyenlítődik, nemcsak ez az egyetlen feltétel teljesül, hanem még valami más is végbemegy.

A jobb érthetőség kedvéért tételizzük fel, hogy a bal oldali nyomást nagy sűrűség, de kis sebesség okozza. Nagy n és kis v érték esetén megkaphatjuk ugyanazt a nyomást, mint ami kis n és nagy v esetén alakul ki. Az atomok ugyanis mozoghatnak lassan, és ugyanakkor sűrűn egymás mellett helyezkednek el, vagy kevesebb atom van, de azok nagyobb erővel ütköznek a dugattyúhoz. Vajon örökké megmaradhat-e ez az egyensúlyi állapot? Először úgy tűnik, hogy igen. Ha azonban alaposabban meggondoljuk, akkor rájövünk, hogy egy fontos dologról elfeledkeztünk. Nevezetesen arról, hogy a két gáz közti dugattyúra ható nyomás nem egyenletes. A dugattyú éppúgy ugrál, mint a dobhártya, amiről a 39.2 szakaszban beszéltünk, hisz egyetlen új ütközés sem hasonlít az előzőhöz. Nincs állandó és egyenletes nyomás, hanem „dörömbölés”.

A nyomás állandóan változik, s így a dugattyú rezeg. Tételizzük fel, hogy a jobb oldalról az atomok ütközése többé-kevésbé egyenletes, a bal oldalal viszont kevés atom van, az ütközések ritkábbak, de igen energikusak. Ezek az impulzusok a dugattyút a jobb oldalon levő lassú atomok felé lökik, és nagyobb sebességre gyorsítják őket. (Hiszen minden egyes atom, amelyik a dugattyúval ütközik, energiát kap vagy veszít attól függően, hogy a dugattyú az ütközés pillanatában milyen irányba mozog.) Az ütközések eredményeképpen tehát a dugattyú rezeg és ez hat a másik gázra, energiát ad át a többi atomnak, s felgyorsítja őket. Ez egészen addig folytatódik, amíg ki nem egyensúlyozódik a dugattyú ugrándozása. A rendszer akkor éri el az egyensúlyt, amikor a dugattyú olyan átlagos sebességgel mozog, amely mellett az energiafelvétel sebessége körülbelül megegyezik az energiaátadás sebességével. A mi feladatunk a dugattyú sebességében fellépő átlagos szabálytalanság kiszámítása. Ennek ismeretében közelebb jutunk eredeti problémánk megoldásához, mivel a gázatomok sebessége olyanná válik, amelynél

— a dugattyú közvetítésével — az egyik gáz az időegység alatt annyi energiát kap a másiktól, amennyit ő átad a másiknak.

A dugattyú mozgását részletesen kiszámítani nagyon bonyolult lenne. Elvileg megérteni a jelenséget egyszerű, analizálni kissé nehezebb. Mielőtt azonban elemeznénk, foglalkozunk egy másik problémával: egy tartályban két különböző gáz van; a gázmolekulák m_1 , ill. m_2 tömegűek, és v_1 , ill. v_2 sebességűek. Ez esetben sokkal szorosabb a kapcsolat a molekulák között. Az a kezdeti állapot, amelyben az összes 2 molekula nyugalomban van, nem tartható fenn sokáig, mivel az 1 molekulák meglökik őket, s így sebességre tesznek szert. Hasonlóan nem tarthat soká az az állapot sem, amelyben az összes 2 molekula gyorsabb, mint az 1 molekulák, mert akkor az 1 molekulák vesznek át energiát. Ha tehát a két gáz ugyanabban a tartályban van, akkor meg kell határoznunk a két gáz molekuláinak relatív sebességét.

Ez a feladat is bonyolult, de azért már meg tudjuk oldani. (Ez megint olyan eset, amikor a levezetéstől függetlenül a végeredményt könnyű megjegyezni, de a levezetéshez nagy művészet kell.) Tegyük fel, hogy két különböző tömegű molekula ütközik, s az ütközést a rendszer tömegközéppontjából (TKP) nézzük. Az impulzus- és energiamegmaradás törvényéből levezetett ütközési törvényből tudjuk, hogy a molekulák ütközésük után csak úgy mozoghatnak, hogy mindegyik megtartja eredeti sebességét, és csak mozgási irányát változtatja meg. Egy ilyen jellegzetes ütközést láthatunk a 39.3 ábrán. Csak olyan ütközéseket figyelünk meg, amelyek tömegközéppontja nyugalomban van. Tétélezzük fel továbbá, hogy kezdetben minden molekula vízszintes irányban mozog (természetesen az első ütközés után néhány molekula már ettől eltérő irányban is haladhat). Más szavakkal: még akkor is, ha kezdetben valamennyi molekula csak vízszintesen mozog, találunk később legalább néhány molekulát, amely függőleges irányban halad. A későbbi ütközéseknél tehát a molekulák a vízszintestől eltérő irányból érkeznek és különböző irányba szóródnak. Vé-

gül is milyen lesz az eloszlás? *Válasz: bármely részecskepár a tér bármely irányába egyforma valószínűséggel mozog.* Ezután már semmilyen további ütközés sem tudja megváltoztatni az eloszlást.

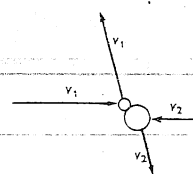
Hogyan értjük azt az állítást, hogy tetszőleges irányba való haladás egyenlő valószínűségű? Természetesen nem lehet beszélni valamilyen adott irányba való haladás valószínűségéről, hiszen egy adott irány ehhez túlságosan meghatározott, túlságosan szűk; választani kell egységnyinek „valamit”. Elgondolá-sunk az, hogy az ütközési pont (mint középpont) köré képzelünk gömb valamely felületdarabján éppen annyi molekula halad keresztül, mint e gömbnek bármely másik, az előzővel egyenlő területű felületdarabján. Vagyis: az ütközések eredményeképpen a molekulák irány szerinti eloszlása olyan lesz, hogy a molekulák a gömb bármely azonos nagyságú felületemén azonos valószínűséggel haladnak át.

Mellesleg, ha az eredeti irányt és a vele valamilyen θ szöget bezáró irányt tekintjük, akkor az egység sugarú gömb elemi felülete 2π -nek és $\sin \theta$ $d\theta$ -nak, vagyis $\cos \theta$ deriváltjának szorzata. Ez azt jelenti, hogy két tetszőleges irány közti θ szög koszinusza egyforma valószínűséggel vehet fel -1 és $+1$ között bármilyen értéket.

Térjünk most vissza az eredeti problémára, ahol nem a TKP rendszerbeli ütközésről van szó, hanem két, egymás felé v_1 és v_2 sebességekkel haladó atomról. Mi történik ilyenkor? A tömegközéppont az adott esetben a tömegek szerint súlyozott „átlagos” sebességgel mozog:

$$v_{TKP} = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2).$$

A kérdéses ütközés a TKP rendszerben a 39.3 ábrán láthatóhoz hasonló, de a részecskék egymáshoz viszonyított sebessége éppen $w = v_1 - v_2$. A lényeg a következő: maga a tömegközéppont mozog, a tömegközépponti rendszerben a molekulák w relatív sebességgel közelednek egymáshoz, összeütköznek, és valamilyen új irányban haladnak tovább. Mivel közben mindez végbemegy, a tömegközéppont mozgása nem változik.



39.3 ábra. Egymástól különböző molekulák ütközése a TKP rendszerből nézve

Milyen eloszlásra vezet mindez? Előző meg-gondolásainkból arra a következtetésre jutunk, hogy egyensúly esetén a *w* relatív sebességnek a tömegközéppont mozgásának irányához viszonyított bármely iránya egyformán valószínű.* Ez azt jelenti, hogy végül semmilyen korreláció sem lesz a relatív sebesség iránya és a tömegközéppont haladási iránya között. (Még ha kezdetben lenne is valamilyen kapcsolat, az ütközések fokozatosan lerontanák.) Ezért a w és v_{TKP} által bezárt szög koszinuszának átlaga zérus; vagyis:

$$\langle w \cdot v_{TKP} \rangle = 0. \quad (39.19)$$

A $w \cdot v_{TKP}$ szorzatot v_1 és v_2 segítségével kifejezve:

$$\begin{aligned} w \cdot v_{TKP} &= \frac{(v_1 - v_2) \cdot (m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{(m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2) + (m_2 - m_1) (v_1 \cdot v_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (39.20)$$

Tekintsük először a $v_1 \cdot v_2$ szorzatot; mivel egyenlő $v_1 \cdot v_2$ átlaga? Más szavakkal: mivel egyenlő az egyik molekula azon sebességkomponensének átlaga, amely a másik molekula mozgási irányába esik? Nyilvánvaló, hogy valamely molekula bármely irányban egyforma valószínűséggel haladhat. A v_2 sebesség átlaga minden irányban zérus. Következésképp v_2 átlaga a v_1 irányban is zérus, és

* Ez a Maxwell-féle érvelés kissé bizonytalan. Bár a levezetés helyes, az eredmény nem következik az eddigi szimmetria-megfontolásokból, mert pl. gázban mozgó vonatkoztatási rendszerre át-térve, eltorzult sebességeloszlást kapnánk. Az eredményre mindaddig nem tudtak egyszerű magyarázatot adni.

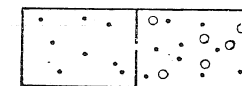
így a $v_1 \cdot v_2$ szorzat átlaga is zérus! Ebből következik, hogy $m_1 v_1^2$ átlagának egyenlőnek kell lenni $m_2 v_2^2$ átlagával vagy ami ugyanaz: a két molekula átlagos kinetikus energiájának egyenlőnek kell lennie:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (39.21)$$

Kétféle atomból álló gázra kimutatható, hogy az egyik atomfajta kinetikus energiájának átlaga ugyanakkora, mint a másiké. Tétélezzük fel, hogy ezt már bebizonyítottuk. A nehéző atomok lassabban mozognak, mint a könnyűek, s ez kísérletileg is könnyen kimutatható.

Most egy lépéssel továbbmegyünk, és azt mutatjuk ki, hogy két különböző gáz átlagos kinetikus energiája az egyensúly beállta után akkor is egyenlő lesz, ha a két gáz egymástól el van különítve. A bizonyításnak több módja van, az egyik a következő:

Legyen a rögzített választófalón olyan kisiny nyílás (lásd 39.4 ábrát), amelyen csak az



39.4 ábra. Két gáz, félig átteresztő hátyával elválasztott dobozban

egyik gáz szivároghat át, és a másik nem, mivel ennek molekulái túl nagyok. Tudjuk, hogy az egyensúly beállta után abban a részben, amelyben mindkét gáz molekulái megtalálhatók, átlagos kinetikus energiájuk azonos lesz. Mivel a molekulák között olyanok is vannak, amelyek a nyíláson keresztül energiavesztés nélkül léptek át, az átlagos kinetikus energia azonos a tiszta gázban és a keverékben. Az érvelés nem egészen kielégítő, hiszen lehet, hogy nincsenek olyan nyílások, amelyeken csak az egyik fajta molekula haladhat át, a másik azonban nem.

Térjünk most vissza a dugattyús problémához. Be lehet bizonyítani, hogy a dugattyú kinetikus energiájának is $(1/2)m_2 v_2^2$ -nek kell lennie. Ténylegesen a dugattyú kinetikus energiája csak vízszintes irányú mozgásával kapcsolata-

tos. Elhanyagolva a lehetséges fel-le irányuló mozgást, a dugattyú kinetikus energiája $(1/2)m_2v_{2x}^2$. Ugyanígy a másik oldal egyensúlya alapján igazolható, hogy a dugattyú kinetikus energiája $(1/2)m_1v_{1x}^2$. Habár a dugattyú nem a gáz közepén, hanem egyik oldalán van, azért még mindig bizonyítható — ha kissé nehezebben is, mint eddig —, hogy a dugattyú és a gázmolekulák átlagos mozgási energiája az ütközések következtében egymással egyenlő.

Ha ez a bizonyítás sem elégít ki bennünket, akkor még egy esetet választhatunk, amelyben az egyensúly beállítását egy mindkét oldalról meglökhető berendezés biztosítja. Tételizzük fel, hogy a dugattyú mindkét végén egy-egy golyóban végződő, rövid rúd van keresztlődugva. A rúd súrlódásmentesen csúszik a dugattyúban. Mindegyik golyót bármely oldalról érheti lökés, de csak egyfajta molekula részéről. A berendezés össztömege m , a gázmolekulák tömege pedig — mint eddig is — m_1 és m_2 . Korábbi bizonyítás szerint az m tömegű berendezés kinetikus energiája az egyik oldalán levő molekulákkal való ütközések következtében átlagosan $(1/2)m_1v_1^2$. Hasonlóan a másik oldalán az átlagos kinetikus energia $(1/2)m_2v_2^2$. Egyensúly esetén tehát a rúd mindkét oldalán levő golyó kinetikus energiájának azonosnak kell lennie. Ez azt jelenti, hogy a gázok keverékére bebizonyított tételt közvetlenül általánosíthatjuk, két különböző, egymástól különböző választott, de azonos hőmérsékletű gáz esetére is.

Így tehát: ha két gáz azonos hőmérsékletű, akkor a részecskék tömegközépponti rendszerre vonatkoztatott átlagos kinetikus energiája egyenlő.

A molekulák átlagos kinetikus energiája nem a gázra, hanem csak a „hőmérsékletre” jellemző tulajdonság, ezért felhasználhatjuk a hőmérséklet definiálására. A molekulák átlagos kinetikus energiája a hőmérséklet valamilyen függvénye. Ki mondja azonban meg nekünk, hogy milyen skála szerint számoljuk a hőmérsékletet? *Definiálhatunk* egy tetszőleges hőmérsékleti skálát úgy, hogy az átlagenergia egyenes arányban legyen a hőmérséklettel. Erre a legjobb lenne magát az átlagenergiát

„hőmérsékletnek” nevezni. Ez lenne a lehető legegyszerűbb függvény. A hőmérsékleti skálát azonban már másképp választották meg, s így ahelyett, hogy a molekulák átlagenergiáját neveznék közvetlenül hőmérsékletnek, egy állandó átszámítási szorzót használunk a molekula átlagenergiája és a termodinamikai, másnéven abszolút hőmérséklet (mértékegysége a kelvin) között. Az arányossági tényező értéke $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K.* Ha tehát T a gáz abszolút hőmérséklete, akkor definíciónk szerint a molekula átlagos kinetikus energiája $(3/2)kT$. (A $3/2$ szorzót csak a kényelem kedvéért használjuk, mivel így a későbbi összefüggésekben megszüadulhatunk majd a szorzókonstansoktól.)

Észre kell vennünk, hogy a mozgás bármely irányú komponensének megfelelő kinetikus energia csak $(1/2)kT$. A mozgás három független iránya miatt kapjuk a $(3/2)kT$ értéket.

39.5 Az ideális gázok törvénye

Most már a hőmérséklet definíciójának ismeretében visszatérhetünk a (39.9) egyenlethez, s ebből megkapjuk a gázok nyomásának hőmérséklet-függésére vonatkozó törvényt: a nyomás és a térfogat szorzata egyenlő az összes atom számának, a k univerzális állandónak és a hőmérsékletnek szorzatával:

$$pV = NkT. \quad (39.22)$$

Ebből következik, hogy azonos hőmérséklet, nyomás és térfogat esetén az atomok száma meghatározott: szintén univerzális állandó! Ily módon a Newton-törvényekből következik, hogy különböző gázok egyenlő térfogatai azonos nyomáson és hőmérsékleten egyenlő számú molekulát tartalmaznak. Csodálatos konklúzió!

A gyakorlatban éppen a molekulák nagy száma miatt egy igen nagy számot kell választanunk, s ezt valaminek el kell neveznünk. A vegyészek ezt a számot *molnak* nevezik.

A Celsius-féle skála nullapontja 273,16 K-nel azonos: $0^\circ\text{C} = 273,16$ K.

A mol csupán egy ügyesen választott szám. Hogy miért nem választották ezt a számot kerek számnak, pl. 10^{24} -nek, ez történelmi kérdés. Úgy adódott, hogy a kényelem kedvéért $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ molekulát választottak, s ezt nevezték el egy molnyi molekulának. A molekulákat ennek alapján nem darabszámmra adják meg, hanem a molok számával mérik.* Felírhatjuk a molok számát N_0 -lal kifejezve, majd ezt besorozzuk az egy molban levő atomok számával és kT -vel. Ha akarjuk, külön is jelölhetjük (szokás szerint R betűvel) az egy molban levő atomok számának és k -nak a szorzatát, vagyis k -nak egy molra vonatkozó értékét. Mivel k molnyi értéke 8,317 J, így $R = N_0k = 8,317$ J mol $^{-1}$ K $^{-1}$. Ez azt jelenti, hogy a gáztörvénybe akár a molok számának (amit N -nel jelölünk) és RT -nek szorzatát, akár az atomok számának és kT -nek szorzatát beírhatjuk:

$$pV = NRT. \quad (39.23)$$

A lényeg ugyanaz, csak a mértékegység különböző. Az egység minálunk 1, vegyészeknél pedig $6 \cdot 10^{23}$!

Még egy megjegyzés a gáztörvényről, mégpedig a többatomos gázokkal kapcsolatban. Eddig csak egyatomos gázok atomjainak tömegközépponti rendszerbeli mozgásával foglalkoztunk. Mi van akkor, ha erőhatásokat is figyelembe kell venni? Tekintsük először azt az esetet, amikor a dugattyút olyan vízszintesen elhelyezett rugó tartja, amelyre erő hat. Az atomok és a dugattyú mozgása közti pillanatnyi kölcsönhatás természetesen nem függ a dugattyúnak a kérdéses pillanatban elfoglalt helyzetétől; az egyensúlyi feltételek az előbbiekkal azonosak. Függetlenül attól, hogy hol van a dugattyú, mozgási sebességének olyanok kell lennie, hogy a molekuláknak éppen annyi energiát adjon át, amennyit tőlük kap. A rugó jelenléte semmilyen változást sem okoz! Így tehát az a tény, hogy az átlagos ki-

* A vegyészek egy molnyi molekula g-ban mért tömegét moláris tömegnek nevezik. A mól úgy definiálják, hogy egy molnyi 12-es szénizotóp (azaz hat protont és hat neutronot tartalmazó szénatom) tömege pontosan 12 g legyen.

netikus energia egy irányban $(1/2)kT$, független attól, hogy hatnak-e erők vagy nem.

Nézzük például az m_A és m_B tömegű atomokból álló, kétatomos molekulát. Azt már bebizonyítottuk, hogy az A és a B rész mozgása a tömegközépponti rendszerben olyan, hogy $\langle (1/2)m_A v_A^2 \rangle = \langle (1/2)m_B v_B^2 \rangle = (3/2)kT$. Bár az atomok kapcsolódnak egymással, a molekulán belüli forgás, pörgés, valamint más molekulákkal való, energiacserevel járó ütközések esetén csak az számít, hogy milyen sebességgel mozognak. Egyedül ez határozza meg az energiacsere sebességét az ütközések során. Egy-egy adott pillanatban az erőnek nincs lényeges szerepe, ezért az alapelv akkor is érvényes, ha a molekulák egyes részei között erőhatás van.

Bizonyítsuk be végül, hogy a gáztörvény nincs ellentmondásban a belső mozgás elhanyagolásával. Valójában eddig eltekintettünk a belső mozgástól, hiszen csak egyatomos gázokkal foglalkoztunk. Most azonban megmutatjuk, hogy egyetlen M tömegű testnek tekinthető bármilyen objektum tömegközéppontjának sebességére igaz, hogy:

$$\frac{1}{2} M v_{TKP}^2 = \frac{3}{2} kT. \quad (39.24)$$

Más szavakkal: ugyanaz az eredmény, ha a szeparált részeket, ill. összességében az egészet tekintjük! Lássuk ennek okát. Egy kétatomos molekula tömege: $M = m_A + m_B$, tömegközépponti sebessége pedig $\mathbf{v} = (m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B) / M$. Szükségünk van $\langle v_{TKP}^2 \rangle$ meghatározására. Ha v_{TKP} -t négyzetre emeljük, akkor

$$v_{TKP}^2 = \frac{m_A^2 v_A^2 + 2m_A m_B \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B + m_B^2 v_B^2}{M^2}.$$

Ezt megszorozzuk $(1/2)M$ -mel és a középpontértékét vesszük:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M v_{TKP}^2 &= \\ &= \frac{m_A \frac{3}{2} kT + 2m_A m_B \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle + m_B \frac{3}{2} kT}{M} = \\ &= \frac{3}{2} kT + \frac{2m_A m_B \langle \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B \rangle}{M}. \end{aligned}$$

(Felhasználtuk, hogy $(m_A + m_B)/M = 1$). De mivel egyenlő $\langle v_A \cdot v_B \rangle$? (Jó volna, ha zérus lenne!) Kiszámításához használjuk fel azt a feltevést, hogy a $w = v_A - v_B$ relatív sebességnek nincs kitüntetett iránya. vagyis bármely irányú komponensének átlaga zérus:

$$\langle w \cdot v_{TKP} \rangle = 0.$$

No és mivel egyenlő $w \cdot v_{TKP}$? Ez nem más, mint

$$\begin{aligned} w \cdot v_{TKP} &= \frac{(v_A \cdot v_B)(m_A v_A + m_B v_B)}{M} = \\ &= \frac{m_A v_A^2 + (m_B - m_A)(v_A \cdot v_B) - m_B v_B^2}{M}. \end{aligned}$$

Mivel $\langle m_A v_A^2 \rangle = \langle m_B v_B^2 \rangle$, így az átlagolásnál az első és az utolsó tag együttesen zérus. Ezért:

$$\langle w \cdot v_{TKP} \rangle = (m_B - m_A) \langle v_A \cdot v_B \rangle = 0.$$

Ha tehát $m_A \neq m_B$, akkor $\langle v_A \cdot v_B \rangle = 0$, s így az egyetlen M tömegű részecskének tekintett teljes molekula mozgásának átlagos kinetikus energiája $(3/2)kT$.

Egyébként ugyanebben a gondolatmenetben azt is bebizonyítottuk, hogy a kétatomos molekula *belső* mozgásának átlagos kinetikus energiája $(3/2)kT$, ha eltekintünk a tömegközéppont mozgásától! A molekula egyes részeinek teljes kinetikus energiája ugyanis $(1/2)m_A v_A^2 + (1/2)m_B v_B^2$, s ennek átlaga $(3/2)kT + (3/2)kT$,

vagyis $3kT$. A tömegközéppont mozgásának kinetikus energiája $(3/2)kT$, úgyhogy a két atom molekulán belüli forgó és rezgő mozgásának átlagos kinetikus energiája e kettő különbsége: $(3/2)kT$.

A tömegközéppont mozgásának átlagos energiájára vonatkozó tétel általános érvényű: bármilyen, egy egésznek tekintett objektumra vonatkozóan, függetlenül attól, hogy hatnak-e rá erők vagy sem, igaz az, hogy az egymástól független mozgások átlagos kinetikus energiája $(1/2)kT$. A „mozgás egymástól független irányait” a rendszer *szabadsági fokának* is nevezik. Az r atomból álló molekula szabadsági foka $3r$, mivel minden egyes atom helyzetének leírásához három koordináta szükséges. A molekula teljes kinetikus energiáját vagy a különálló atomok kinetikus energiájának összegeként, vagy a tömegközéppont kinetikus energiájának és e belső mozgások kinetikus energiájának összegeként lehet kifejezni. Ez utóbbi néha, közelítőleg a molekulák forgási és rezgési kinetikus energiájának összegeként is felírható. Tételünk r atomból álló molekulára alkalmazva azt mondja ki, hogy a molekula átlagos kinetikus energiája $3rkT/2$, amiből $(3/2)kT$ a teljes molekula tömegközépponti mozgásáé, a maradék $(3/2)(r-1)kT$ pedig a belső rezgés és forgás kinetikus energiája.

40 A statikus mechanika alapelvei

40.1 Exponenciális eloszlás a légkörben

Már foglalkoztunk az egymással állandóan ütköző, nagyszámú atomokból álló rendszer néhány tulajdonságával. Azt a tárgykört, mely az atomok között lejátszódó ütközések szempontjából vizsgálja az anyag tulajdonságait, kinetikus elméletnek nevezik. Azt állítjuk, hogy az anyag főbb tulajdonságai lényegében megmagyarázhatók egyes részeinek mozgása alapján.

A természet jelenségei közül jelenleg csak azokat vizsgáljuk, amelyek termikus egyensúlyban vannak. A termikus egyensúly feltételei mellett érvényes mechanikai törvények összességét *statisztikus mechanikának* nevezik, s ebben a fejezetben ennek leglényegesebb tételeivel ismerkedünk meg.

A statisztikus mechanika egyik tételét már ismerjük, mégpedig azt, hogy bármely mozgás esetén a kinetikus energia átlagos értéke T abszolút hőmérsékleten, minden egyes független mozgásra (azaz minden egyes szabadságfokra) $(1/2)kT$. Ez a tétel az atom sebességének négyzetes középértékéről ad információt. Most az a célunk, hogy az atomok helyzetéről valamivel többet tudjunk meg: tisztázni kell, hogy termikus egyensúly esetén hány atom van a tér egyes „pontjain” és kissé részletesebben szeretnénk foglalkozni a sebességeloszlással is. Noha ismerjük a sebesség négyzetes középértékét, mégsem tudunk olyan kérdésekre válaszolni: hány atom sebessége nagyobb háromszor vagy kisebb négyszer a sebesség négyzetes középértékének négyzetgyökénél. Vagy talán mindegyik atom sebessége ugyanakkora?

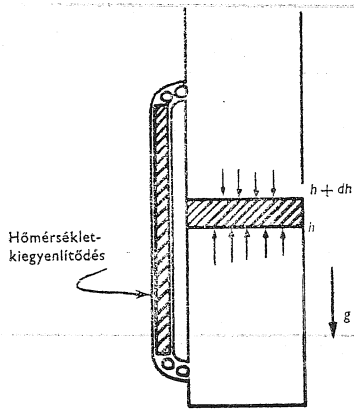
A következőkre próbálunk tehát választ adni: Milyen a molekulák térbeli eloszlása, ha erők hatnak rájuk? Milyen a sebességeloszlásuk?

Kiderül, hogy a két kérdés teljesen független, és hogy a sebességeloszlás mindig ugyanaz. Ez várható is, hiszen azt találtuk, hogy az átlagos kinetikus energia mindig ugyanakkora: szabadságfokonként $(1/2)kT$, függetlenül attól, hogy milyen erők hatnak a molekulákra. A molekulák sebességeloszlása független az erőktől, mert az ütközések gyakorisága sem függ tőlük.

Kezdjük egy példával: a molekulák eloszlásával egy olyan légkörben, amely a miénkhez hasonló, de szélről és minden egyéb zavaró hatástól mentes. Tétélezzük fel, hogy nagy magasságig terjedő gázoszlopról van szó, amely termikus egyensúlyban van, ellentétben a mi atmoszféránkkal, ahol a hőmérséklet a magassággal csökken.

Megjegyezzük, hogy ha a hőmérséklet a magasság függvényében változik, akkor ki tudjuk mutatni az egyensúly hiányát, egy rúd, s a rúd két végénél elhelyezett néhány kis golyó segítségével (40.1 ábra). A rúd alsó végénél levő golyók az ott levő molekuláktól $(1/2)kT$ energiát kapnak, s a rúd közvetítésével megmozgatják a felső golyókat, azok pedig a körülöttük levő molekulákat. Végül természetesen a hőmérséklet a gravitációs tér minden pontjában azonos lesz.

Feladatunk, hogy megkeressük azt a törvényt, amely szerint az atmoszféra felfelé haladva ritkul, ha a hőmérséklet minden magas-



40.1 ábra. A h magasságban mért nyomásnak nagyobbak kell lennie, mint a $h+dh$ magasságban mértnek

A nyomáskülönbséget a két szint közötti gáz súlya okozza

ságban azonos. Ha a V térfogatú gázban, p nyomás mellett a molekulák össz-száma N , akkor $pV = NkT$, vagy $p = nkT$, ahol $n = N/V$ az egységnyi térfogatban levő molekulák száma. Vagyis: ha ismerjük az egységnyi térfogatban levő molekulák számát, akkor kiszámíthatjuk a nyomást, és fordítva. A két mennyiség arányos egymással, mivel a hőmérséklet az adott esetben állandó. A nyomás azonban nem lehet állandó, lefelé haladva nőnie kell, hiszen „tartania” kell a felette levő gázoszlop súlyát. Ez a kulcs a nyomás magassággal való változásának meghatározásához. A h magasságban levő egységnyi felületre alulról ható függőleges irányú erő a p nyomással egyenlő. Ha nem lenne gravitáció, akkor az egységnyi felületre ható, lefelé irányuló erő $h+dh$ magasságban ugyanezzel az erővel lenne egyenlő. A gravitáció miatt azonban az alulról ható erőnek a felülről ható erőnél annyival nagyobbak kell lennie, amennyi megfelel a h és $h+dh$ magasságok közé eső gáz súlyának. Az egyes molekulákra ható gravitációs erő mg , ahol g a gravitációs gyorsulás. A szóban forgó, egységnyi alapú és dh magasságú rétegben levő összes molekula száma: $n dh$. Ebből a következő differenciál-

egyenlet adódik:

$$p_{h+dh} - p_h = dp = -mgn dh.$$

Mivel $p = nkT$ és T állandó, így $dp = kT dn$. Ennek felhasználásával a

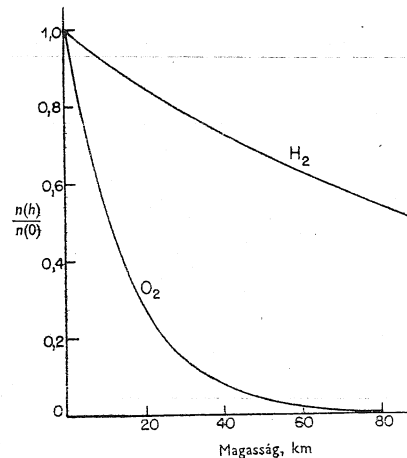
$$\frac{dn}{dh} = -\frac{mg}{kT} n$$

differenciálegyenletet kapjuk a magassággal változó n részecskesűrűsége vonatkozóan. Eszerint n deriváltja magával n -nel arányos. Az a függvény, amelynek a deriváltja magával a függvénnyel arányos, exponenciális. A fenti differenciálegyenlet megoldása tehát:

$$n = n_0 e^{-mgh/kT} \quad (40.1)$$

Az n_0 integrálási állandó, nyilvánvalóan a (bárhol megválasztható) $h = 0$ magasságban levő sűrűség. A sűrűség a magassággal exponenciálisan csökken.

Különböző tömegű molekulákra az exponenciális kitevője is különböző. A nehezebb molekulák sűrűsége gyorsabban csökken a magassággal, mint a könnyebb molekuláké. Mivel az oxigén nehezebb a nitrogénél, azt várhatnánk, hogy a légkörben egyre feljebb



40.2 ábra. A légkör oxigénre és hidrogénre vonatkoztatott sűrűsége a magasság függvényében, állandó nyomás mellett

haladva a nitrogén aránya (az oxigénhez képest) nő. Valójában a földi légkörben — legáltalában ésszerű magasságokig — nem ez a helyzet, mert sok olyan zavaró tényező van, amely a gázokat ismét összekeveri. A földi atmoszféra nem izoterm. Ennek ellenére van a légkörnek olyan magassága, ahonnan kezdve túlsúlyban vannak a könnyű anyagok (például a hidrogén), ugyanis a többi exponenciális már rég „kihalt” (40.2 ábra).

40.2 A Boltzmann-törvény

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a (40.1) egyenlet exponenciális kitevőjének számlálója az atom W_{pot} potenciális energiája. Ezt felhasználva, az előbbi speciális törvény még a következőképpen is megfogalmazható: a sűrűség bármely pontban arányos az

$$e^{-W_{\text{pot}}/kT}$$

mennyiséggel.

Lehet, hogy ez véletlen, vagyis, hogy csak a homogén gravitációs tér speciális esetére igaz? Nem! Az állítás sokkal általánosabb érvényű.

Tételezzük fel, hogy a gáz molekuláira a gravitációs erőtlől különböző valamilyen más erő is hat.

Előfordulhat, hogy a molekuláknak elektromos töltésük van, és az ilyen molekulákra valamilyen elektromos tér vagy másik töltés hat. Fellephet valamilyen vonzóerő az atomok között az atomok és a fal, ill. bármilyen más szilárd test között. Ez az erő az egymást vonzó testek kölcsönös helyzetétől függ, és az összes molekulára hat. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel ezenkívül, hogy valamennyi molekula egyforma, s hogy az erő minden egyes molekulára hat. Ekkor a gáz egy részére ható teljes erő a molekulák számának és az egy molekulára ható erőnek a szorzata. (A szükségtelen komplikációk elkerülése érdekében válasszuk koordinátarendszerünket úgy, hogy az x irány az F erő irányába essen.)

Ugyanígy, mint eddig, kijelölünk a gázban két egymástól dx távolságban levő párhuzamos síkot. Az egyes atomokra ható erőnek és

a gáz 1 cm^3 -ében levő atomok n számának szorzata (ami az előző nmg mennyiség általánosítása) megszorozva még dx -szel, egyensúlyban kell, hogy legyen a nyomásváltozással: $F_n dx = dp = kT dn$. Átrendezve:

$$F dx = kT d(\ln n). \quad (40.2)$$

$-F dx$ az a munka, ami a molekulák x -ből $x+dx$ -be viteléhez szükséges. Ha F valamilyen potenciálból származik, azaz ha a végzett munka kifejezhető valamilyen potenciális energia segítségével, akkor $-F dx$ a potenciális energia megváltozásaként is felírható. A potenciális energia deriváltjának negatív értéke: $F dx$, vagyis a végzett munka. Így $d(\ln n) = -d(W_{\text{pot}})/kT$, vagy integrálás után:

$$n = \text{konst.} \cdot e^{-W_{\text{pot}}/kT}. \quad (40.3)$$

Amit tehát egy speciális esetre megállapítottunk, az általában is igaz.

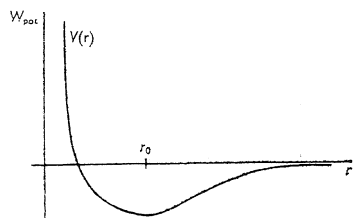
Mi van akkor, ha F nem származtatható potenciálból? Akkor (40.2)-nek egyáltalán nincs megoldása. Az atomok energiát kaphatnak vagy veszíthetnek olyan zárt pályán mozogva, amely mentén a végzett munka nem zérus, s egyensúly egyáltalán nem lehetséges. Nem állhat be termikus egyensúly, ha az atomokra ható külső erők nem állandók.

A (40.3) egyenlet, amit Boltzmann-törvény néven ismerünk, szintén a statisztikus mechanika alapelveinek egyike. Eszerint annak valószínűsége, hogy valamely térbeli elrendeződés esetén egy molekulát egy adott pontban találjunk, az elrendeződéstől függő potenciális energia negatív értéke és kT hányadosának függvényében exponenciálisan változik.

Ebből most már megkaphatjuk a molekulák eloszlását. Tegyük fel, hogy valamilyen folyadékban pozitív ion van, amely vonzza a körülötte levő negatív ionokat. Hány negatív ion van a pozitívtól adott, különböző távolságokban? Ha ismerjük a potenciális energiát mint a távolság függvényét, akkor a Boltzmann-törvény megadja az ionok számának arányát a különböző távolságokban. (A törvénynek még számos alkalmazását lehetne megemlíteni.)

40.3 Folyadékok párolgása

Tekintsük az egymást vonzó molekulák egy halmazát, és tételezzük fel, hogy bármely két molekula, mondjuk az i és j között ható erő csak a köztük levő r_{ij} távolságtól függ, s valamilyen $W_{\text{pot}}(r_{ij})$ potenciálfüggvényből származtatható. A 40.3 ábra az ilyen függvények egy lehetséges alakját mutatja. Ha $r > r_0$, a molekulák közti távolság csökkenésével az energia csökken, mivel a molekulák vonzzák egymást. Amikor viszont közelebb kerülnek egymáshoz, az energia hirtelen nőni kezd, mert a molekulák erősen taszítják egymást. Általánosságban ez jellemző a molekulák viselkedésére.



40.3 ábra. Két molekula potenciális energiája az egymástól való távolság függvényében

Tegyük fel, hogy egy doboz tele van ilyen molekulákkal, s tudni szeretnénk, hogy átlagosan hogyan helyezkednek ott el. A választ az $e^{-W_{\text{pot}}/kT}$ összefüggés adja meg. Ez esetben a teljes potenciális energia a párokra vett összeg, feltéve, hogy az összes erő párban hat (sokkal bonyolultabb esetekben „háromtestes” is működhetnek, de az elektromos erők például párban hatnak). Ezért, annak a valószínűsége, hogy a molekulapárok r_{ij} kombinációkat alkotnak, arányos az $\exp\left[-\sum_{i,j} W_{\text{pot}}(r_{ij})/kT\right]$ mennyiséggel.

Ha a hőmérséklet nagyon magas, olyannyira, hogy $kT \gg |W_{\text{pot}}(r_0)|$, a kitevő csaknem mindenütt viszonylag kicsi, s annak valószínűsége, hogy valamely helyen molekulát találjunk csaknem független a helytől. Te-

kintsük azt az esetet, ha csupán két molekulát tartalmaz a doboz. Ekkor $e^{-W_{\text{pot}}/kT}$ annak a valószínűsége, hogy egymástól r távolságban találjuk meg őket. Nyilvánvaló, hogy a valószínűség ott a legnagyobb, ahol a potenciál a legnagyobb negatív értéket veszi fel, és csaknem zérus ott, ahol a potenciál a végtelen felé tart, vagyis a nagyon kis távolságoknál. Ez azt jelenti, hogy a gázok atomjai nem lehetnek egymás hegyén-hátán, mert nagyon erősen taszítják egymást. Annak az egységnyi térfogatra vonatkoztatott valószínűsége, hogy a molekulát az r_0 pontban találjuk, sokkal nagyobb, mint annak, hogy a molekula bármely más pontban van. Hogy mennyivel nagyobb, az a hőmérséklettől függ. Ha a hőmérséklet nagyon nagy az $r = r_0$ és $r = \infty$ pontok közti energiakülönbséghez képest, akkor az exponenciális mindig közel egységnyi. Ez esetben az erőknek nincs jelentős szerepük, mivel az átlagos kinetikus energia (amelynek nagyságrendje kT) jelentősen meghaladja a potenciális energiát. A hőmérséklet csökkenésével fokozatosan nő annak valószínűsége, hogy a molekulákat a kitüntetett r_0 távolság környezetében találjuk. Ha pedig kT sokkal kisebb $|W_{\text{pot}}(r_0)|$ -nél, akkor a kitevő r_0 környezetben viszonylag nagy pozitív szám. Más szóval, adott térfogatban a legvalószínűbb az, hogy a molekulák a minimális energiának megfelelő távolságban lesznek egymástól. A hőmérséklet csökkenésével az atomok közelebb kerülnek egymáshoz, csomókká halmozódnak, és folyadékokká, szilárd testekké és molekulákká egyesülnek, melegítéskor viszont elpárolognak.

A párolgásnak, ill. az egyes folyamatoknak a pontos leírásához a következőkre lenne szükség: először is pontosan ismerni kellene a molekulák között ható erő $W_{\text{pot}}(r)$ potenciálfüggvényét. Ezt vagy a kvantummechanika segítségével, vagy kísérletileg határozhatjuk meg. Ha ismerjük is a molekulák közti erő törvényét, csak az $e^{-\sum W_{\text{pot}}(r_{ij})/kT}$ függvény tanulmányozása adhat választ arra, hogy mit csinálnak a molekulák milliói. Bár ez elég egyszerű függvény, s a gondolatmenet is viszonylag egyszerű, meglepő, hogy a feladat mégis

roppant bonyolult. A nehézség a változók igen nagy számából adódik.

Ez csak egy példa a valóban nagyon érdekes „soktest-problémá”-ra. A levezetendő egyetlen összefüggésnek az összes részletét tartalmaznia kell, például gázoknak szilárd halmazállapotba való átmenetét, vagy a szilárd testek lehetséges kristályszerkezetét. Sokan próbálták már ezt az összefüggést levezetni, de a sok változó miatt ez matematikailag nagyon nehéz.

Ez az, amit a részecskék térbeli eloszlásáról elmondhatunk. Ezzel lényegében befejeztük a statisztikus mechanikát, mert ha ismerjük az erőket, akkor elvben kiszámíthatjuk a térbeli eloszlást, a sebességeloszlás pedig egyszer s mindenkorra érvényes. Az alapvető feladat az, hogy a formális megoldásból konkrét felvilágosításokat kapjunk; ez a klasszikus statisztikus mechanika főfeladata.

40.4 A molekulák sebességeloszlása

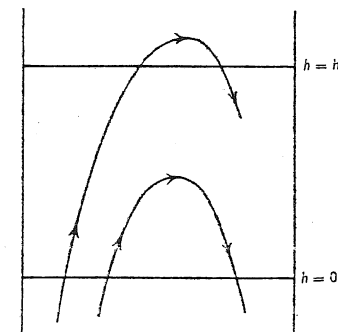
Folytatjuk a molekulák sebességeloszlásának tárgyalását, mert néha érdekes, sőt hasznos lehet, ha tudjuk, hogy különböző sebességekkel hány molekula mozog. Ehhez felhasználhatjuk a gázoknak a légkörben való eloszlására kapott eredményeinket. A gázt ideálisnak tekintjük, mint ahogy ezt már akkor feltételeztük, amikor a potenciális energiát az atomok kölcsönös vonzásának

$h = 0$ magasságon $v_z > u$
sebességgel áthaladó =
molekulák száma

elhanyagolásával írtuk fel. Első példánkban potenciális energiaként egyedül csak a gravitációt vettük tekintetbe. Természetesen ha az atomok között kölcsönös erőhatás is van, bonyolultabb a helyzet, de mi a továbbiakban is feltételezzük, hogy nincs erőhatás köztük, sőt most az ütközéseket sem vesszük figyelembe (később még erre visszatérünk). Látjuk, hogy h magasságban kevesebb molekula van, mint 0 magasságban. A molekulák száma a (40.1) összefüggés szerint a magassággal exponenciálisan csökken. Hogyan lehetséges,

hogy nagyobb magasságban kevesebb a molekula? Talán nem minden olyan molekula éri el a h magasságot, amelyek 0 magasságból felfelé haladt? Nem bizony! A 0 szinten felfelé haladó molekulák egy része túl lassan mozog és nem tud „felmászni” a h -hoz vezető potenciálhegyen. Így viszont ki tudjuk számítani a molekulák sebességeloszlását, hiszen a (40.1) összefüggésből tudjuk, hogy hány molekula mozog egy adott h magasság eléréséhez szükséges sebességnél lassabban. Éppen ezek a molekulák „felelősek” azért, hogy h magasságban kisebb a sűrűség, mint 0 magasságban.

Fogalmazzuk meg ezt az elgondolást kicsit pontosabban: számítsuk ki, hány — alulról felfelé haladó — molekula lépi át a $h = 0$ síkot. (Amikor 0 magasságról beszélünk, egyáltalán nem úgy gondoljuk, mintha ott valami padló lenne, pusztán csak a kiindulási pontot jelöljük, és jól tudjuk, hogy negatív h értékeknél is van gáz.) Ha u -val jelöljük azt a sebességet, ami a h magasság eléréséhez éppen szükséges (a kinetikus energia: $mu^2/2 = mgh$), akkor az időegység alatt az alsó síkon u -nál nagyobb függőleges irányú sebességkomponenssel áthaladó molekulák száma és a felső síkon *tetszőleges* függőleges irányú sebességkomponenssel áthaladó molekulák száma megegyezik (40.4 ábra). Azok a molekulák, amelyek függőleges irányú sebessége nem haladja meg u -t, nem érik el a felső síkot.



40.4 ábra. Csak azok a molekulák érik el a h magasságot, melyek $h = 0$ -nál elég nagy sebességgel haladtak felfelé

Vagyis:

$h = h$ magasságon $v_z > 0$ sebességgel áthaladó molekulák száma.

A h magasságon zérusnál nagyobb tetszőleges sebességgel áthaladó molekulák száma azonban kisebb, mint az alacsonyabb szinten zérusnál nagyobb tetszőleges sebességgel áthaladó molekulák száma, márcsak azért is, mert az alacsonyabb szinten több molekula van. Ez minden, amire szükségünk van. Tudjuk már, hogy a sebességeloszlás minden magasságban egyforma (korábban kikötöttük, hogy a hőmérséklet az egész légkörben állandó). Ebből nyilvánvaló, hogy a h magasságot pozitív sebességgel átszelő részek $n_{>0}(h)$ számának és a 0 magasságot pozitív sebességgel átszelő részek $n_{>0}(0)$ számának aránya éppen a két magasságban levő sűrűségek arányával egyenlő, vagyis $e^{-mgh/kT}$. Mivel azonban $n_{>0}(h) = n_{>u}(0)$, így:

$$\frac{n_{>u}(0)}{n_{>0}(0)} = e^{-mgh/kT} = e^{-mu^2/2kT},$$

felhasználva, hogy $(1/2)mu^2 = mgh$. Mindezt szavakkal megfogalmazva: a 0 magasság egy-egységi felületén 1 s alatt áthaladó összes molekula $e^{-mu^2/2kT}$ -szerese adja meg a $v_z > u$ sebességű molekulák számát.

Az elmondottak természetesen nemcsak a tetszőlegesen megválasztott 0 magasságra, hanem bármely más magasságra is igazak! (A h magasság nincs benne a végső megállapításban, csak a levezetésben.) Az eredmény: a sebességeloszlás általános tétele; a sebességeloszlás mindenütt egyforma. Eszerint, ha egy gázoszlop falába kis lyukat fúrunk — olyan kicsit, hogy ott csak kevés ütközés legyen, és a molekulák szabad üthossza a lyuk méreténél lényegesen nagyobb legyen (azaz az ütközések távolsága nagyobb a lyuk átmérőjénél) —, akkor a lyukon kirepülő részecskéknek különböző lesz ugyan a sebessége, de az u -nál nagyobb sebességgel kijövő részek hányada $e^{-mu^2/2kT}$ lesz.

Most visszatérünk az ütközések elhanyagolásának kérdésére. Vajon miért nincs jelentő-

sége annak, hogy számításba vesszük-e az ütközéseket vagy sem. Megismételhetjük az előbbi gondolatmenetet annyira kicsiny h -val, hogy 0-tól h -ig ne jöjjön létre ütközés. Az előbbieknél azonban h véges nagysága nem is volt lényeges; az elmondottak nyilvánvalóan csak az energiaviszonyok analízisének és az energiamegmaradás törvényén alapultak; az ütközéseknél a molekulák között energiacsere megy végbe. Valójában azonban nem törődünk vele, vajon ugyanazt a molekulát követjük-e, ha két molekula energiája csupán kicserélődött. Vagyis látjuk, hogyha gondosabban analizáljuk is a kérdést, ez az eredményt nem befolyásolja.

Érdekes, hogy az imént talált sebességeloszlás éppen:

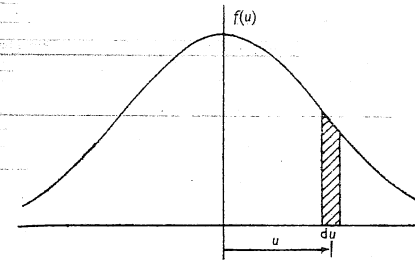
$$n_{>u} \approx e^{-W_{kin}/kT}, \quad (40.4)$$

ahol W_{kin} a kinetikus energia.

A sebességeloszlás leírásának ez a módja, amikor megadjuk egy adott felületen bizonyos minimális z komponenssel áthaladó molekulák számát, nem mindig célszerű. Sokkal gyakoribban akarjuk tudni például, hogy a gáz valamely térfogatában hány molekula sebességének z komponense esik két megadott érték közé, és ezt természetesen a (40.4) összefüggés nem adja meg közvetlenül. Eredményünket ezért használhatóbb alakban szeretnénk megadni, még akkor is, ha az előbbi a teljesen általános.

Nem beszélhetünk valamely molekula pontosan meghatározott sebességéről; egyetlen molekula sem mozog pontosan pl. 1,7962899173 m/s sebességgel. Úgy kell tehát a kérdést feltennünk, hogy hány molekula mozog egy adott intervallumba eső sebességgel. Gyakorlatilag azt kell megadnunk, hogy milyen gyakorisággal található 1,796 és 1,797 stb. m/s közötti sebességű molekula, vagyis hány molekula található bizonyos *sebesség-intervallumban*.

Legyen $f(u) du$ a molekulák azon hányada, amelyeknek u és $u+du$ közé eső sebességűk van, vagy ami ugyanez (ha du infinitezimális), amelyek sebessége du pontossággal éppen u . A 40.5 ábra az $f(u)$ függvény egy lehetséges



40.5 ábra. Sebességeloszlás-függvény

A vonalkázott terület $f(u) du$, a részecskék azon hányada, melyek sebessége az u körüli du intervallumba esik

alakját mutatja. Ezen du szélességű és $f(u)$ magasságú vonalkázott terület jelenti az $f(u) du$ hányadot, vagyis a vonalkázott területnek a görbe alatti egész területhez való aránya adja az u és $u+du$ közé eső sebességű molekulák relatív számát. Ha $f(u)$ -t úgy definiáljuk, hogy a vonalkázott terület közvetlenül a molekulák azon részét (relatív számát) adja meg, amelyek sebessége ebbe az intervallumba esik, akkor a görbe alatti összterület a molekulák 100%-ának felel meg, vagyis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = 1. \quad (40.5)$$

Most már csak meg kell találnunk ezt az eloszlást, összehasonlítva az előzőleg levezetett tétellel. Először azt kérdezzük, hogyan lehet kifejezni $f(u)$ segítségével egy adott felületen másodpercenként áthaladó és u -nál nagyobb sebességű molekulák számát. Azt gondolhatnánk, hogy a kérdéses részecskeszám egyszerűen az $f(u) du$ integrállal egyenlő. Ez azonban nem igaz, hiszen mi a felületen *másodpercenként* áthaladó részecskeszámra vagyunk kíváncsiak. A gyorsabb részek — úgy mond — többször haladnak át a felületen, mint a lassabbak, ezért az áthaladó részek számának kifejezéséhez az integrál értékét még szorozni kell a sebességgel (l. 39.2 szakasz, 10. old.). Adott t idő alatt a felületen az összes olyan részecske áthalad, amely a felülettől ut távolságon belül van. Azaz, a felületet elérő molekulák száma nem egyszerűen a megfelelő sebességű molekulák számával egyenlő, hanem

az egységnyi térfogatban levő molekulák számának és annak a távolságnak a szorzatával, amit a molekulák a felületig megtesznek. Ez a távolság u -val arányos. Az $f(u)$ u -szorosának du szerinti integrálját kell tehát kiszámítanunk u alsó és végtelen felső határral, s ennek kell egy arányossági szorzótól eltekintve megegyeznie $e^{-mu^2/2kT}$ -vel. Az arányossági szorzó értékét később kapjuk meg. Tehát:

$$\int_u^{+\infty} uf(u) du = \text{konst} \cdot e^{-mu^2/2kT}. \quad (40.6)$$

Ha most u szerint deriválunk, akkor a bal oldalon az integrál alatti kifejezést kapjuk; azaz az integrandust (negatív előjellel, mivel u az alsó határ), a jobb oldalon pedig az exponenciális (és egy állandó) u -szorosát. Egy-szerűsítve u -val:

$$f(u) du = Ce^{-mu^2/2kT} du. \quad (40.7)$$

A kifejezés megadja az u és $u+du$ közti sebességű molekulák relatív számát.

A C állandót a (40.5) egyenlet figyelembevételével kell meghatározni. Bizonyítható, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Ezt* felhasználva, könnyen kimutathatjuk, hogy $C = \sqrt{m/2\pi kT}$.

* Jelöljük a kérdéses integrált I -vel:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \end{aligned}$$

vagyis az xy síkra vonatkozó kettős integrál, amit polárkoordinátákkal is felírhatunk:

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot 2\pi r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi.$$

Mivel a sebesség és az impulzusok arányosak, mondhatjuk, hogy a differenciális impulzuseloszlás is arányos $e^{-W_{\text{kin}}/kT}$ -val. A tétel a relativitáselméletben is igaz, de csak akkor, ha az impulzus segítségével fogalmazzuk meg (nem igaz viszont a sebességgel kifejezett alakjában).

$$f(p) dp = C e^{-W_{\text{kin}}/kT} dp. \quad (40.8)$$

Azt találtuk tehát, hogy különböző energiaállapotok valószínűségét, akár kinetikus, akár potenciális energiáról van szó, $e^{-\text{energia}/kT}$ adja meg. Ezt a szép összefüggést nagyon könnyű megjegyezni.

Mindaddig csak a „függőleges” irányú sebességek eloszlását vizsgáltuk. Megkérdezhettük azonban: mi annak a valószínűsége, hogy egy molekula más irányban mozog? Természetesen az eloszlások összefüggenek egymással. A teljes eloszlást bármelyikből megkaphatjuk, mivel csak a sebesség nagyságának négyzetétől és nem z komponensétől függ. A sebességeloszlás iránytól független, s csak egy függvényt tartalmaz: a sebesség különböző értékeire vonatkozó valószínűséget. Eredmény: a valószínűség ismét arányos $e^{-W_{\text{kin}}/kT}$ -vel, csak most a kinetikus energia három részből áll: a kitevőben $mv_x^2/2$, $mv_y^2/2$ és $mv_z^2/2$ összege szerepel. Szorzatként felírva:

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \approx e^{-mv_x^2/2kT} e^{-mv_y^2/2kT} e^{-mv_z^2/2kT} dv_x dv_y dv_z. \quad (40.9)$$

Az összefüggés láthatóan helyes, mivel kielégíti mindkét követelményt: Először is csak v^2 függvénye; másodszer pedig, ha v_x és v_y -ra integrálunk, akkor az adott v_z értékre kapott valószínűségek éppen megegyeznek (40.7) tel. A (40.9) függvény mindkét követelménynek eleget tesz.

40.5 A gázok fajhője

A következőkben azzal foglalkozunk, hogy hogyan ellenőrizhető és mennyire igaz a klasszikus gázelmélet. Korábban láttuk, hogy ha N molekula belső energiája U , akkor néha,

néhány gázra vonatkozóan a $pV = NkT = (\nu - 1)U$ összefüggés helyes lehet. Ha egyatomos gázról van szó, akkor tudjuk, hogy a jobb oldal az atomok tömegközéppontjának mozgásához tartozó kinetikus energia $2/3$ -ával egyenlő. Ez esetben viszont a kinetikus energia egyenlő a belső energiával, s ezért $(\nu - 1) = 2/3$. Tegyük fel azonban, hogy bonyolultabb molekuláról van szó, olyanról, amely forogni és rezegni is tud, s tegyük fel (a klasszikus mechanikában ez így is van), hogy a belső mozgás energiája is kT -vel arányos. Ekkor adott hőmérsékleten a kT kinetikus energia mellett a molekulának belső rezgési és forgási energiája is van. A teljes U nemcsak a kinetikus energiát, hanem a forgási energiát is tartalmazza, s ezért ν -ra az előbbtől különböző értéket kapunk. Gyakorlatilag ν mérése a legjobb módszer a fajhő mérése. A fajhő nem más, mint az energiának a hőmérséklettel való megváltozása. (Ehhez a módszerhez később még visszatérünk. Addig is azonban feltételezhetjük, hogy ν -t kísérletileg kaptuk meg az adiabatikus kompresszióra vonatkozó pV^ν görbéből.)

Számítsuk ki ν értékét néhány esetben. Egyatomos gázok esetén az G teljes energia megegyezik a kinetikus energiával, s már tudjuk, hogy ν értékének $5/3$ -nak kell lennie. Kéttatomos gázok például az oxigén, hidrogénjodid, hidrogén. Feltételezzük, hogy a kéttatomos gázok atompárokából állanak, amelyek között a 40.3 ábrához hasonlóan változó erő hat. Azt is feltételezhetjük — és ez teljesen törvénytörvényes —, hogy a kéttatomos gázok esetén figyelembe veendő hőmérsékleteken a párt alkotó atomok igyekeznek egymástól a potenciálmínimumnak megfelelő r_0 távolságra elhelyezkedni.

Ha ez nem lenne igaz, ha a valószínűség nem függne igen erősen az egyensúlyi elrendeződéstől való eltéréstől, akkor azt találnánk, hogy az oxigén gázban az O_2 -molekulák mellett jelentős mennyiségű O-atom is van. Tudjuk, hogy tulajdonképp nagyon kevés O-atom van az oxigén gázban — s ez azt jelenti, hogy potenciális energiájának minimuma sokkal nagyobb kT -nél.

Mivel a molekulát alkotó atomok egymástól való távolsága r_0 körül van, a görbének csak a minimumhoz közeli részére van szükségünk, s ez parabolával közelíthető. A parabolapotenciál harmonikus oszcillátornak felel meg; valójában az oxigén molekula jó közelítéssel leírható rugóval összekapcsolt két atomként.

Mekkora a molekula teljes energiája T hőmérsékleten? Tudjuk, hogy mindkét atom kinetikus energiája egyenként $(3/2)kT$, úgyhogy a kettő összesen $(3/2)kT + (3/2)kT$.

Ezt még más módon is megfogalmazhatjuk: a fenti $(3/2) + (3/2)$ úgy is tekinthető, mint a tömegközéppont kinetikus energiája $3/2$, a forgás kinetikus energiája $2/2$ és a rezgés kinetikus energiája $1/2$. Tudjuk, hogy a rezgés kinetikus energiája $1/2$, mivel ez egydimenziós mozgás, s a kinetikus energia szabadsági fokként $(1/2)kT$. A forgás két tengely körül is végbemehet, ekkor két független mozgásról van szó. Feltételezzük azonban, hogy az atomok kiterjedés nélküli pontok, és nem foroghatnak az őket összekötő egyenes körül. (Ezt jó lesz emlékezetünkben tartani, mert ha zsákutcába jutunk, lehet, hogy ez a baj gyökere.)

Még egy kérdés vár válaszra: Mekkora a rezgés potenciális energiája? Harmonikus oszcillátor esetén az átlagos kinetikus és az átlagos potenciális energia egyenlő, s ezért a rezgés potenciális energiája is $(1/2)kT$.

Az összenergia végül is $U = (7/2)kT$, vagy $kT = (2/7)U$ atomonként. Ez azt jelenti, hogy ν $5/3$ helyett $9/7$ -del egyenlő, vagyis $\nu = 1,286$.

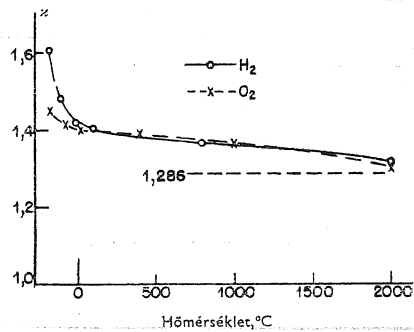
Hasonlítsuk össze ezeket a számokat a 40.1 táblázat megfelelő, mért értékeivel. Nézzük először a héliumot, amely egyatomos gáz, és ν -ja igen közel $5/3$ -dal egyenlő. Az eltérés valószínűleg a mérési hibából ered, noha ilyen alacsony hőmérsékleten felléphet az atomok között kölcsönhatási erő. A kriptonra és az argonra vonatkozóan is — mindkettő egyatomos gáz — a ν értékek megegyeznek a mérési pontosságon belül.

Térjünk most át a kéttatomos gázokra. A hidrogén $\nu = 1,404$ értéke nem egyezik meg

az elméleti 1,286-tal. Oxigénre $\nu = 1,399$, ami közel áll a hidrogénhez, és ismét nem egyezik meg az elméleti értékkel. A hidrogénjodid ν értéke 1,40. Úgy látszik, mintha a helyes érték 1,40 lenne, pedig ez nem igaz, mert ha tovább vizsgáljuk a sort, a brómnál 1,32, a jódnál pedig 1,30 értéket találunk. Mivel 1,30 meglehetősen közel esik 1,286-hoz, azt mondhatjuk, hogy a jódnál egész jó az egyezés az elmélettel, míg az oxigén kivétel. Elég nagy gondban vagyunk tehát. Amit ugyanis az imént állítottunk, az az egyik molekulára igaz, de a másikra nem.

Foglalkozunk most még bonyolultabb molekulákkal, melyek sok részecskéből állnak. Pl. a C_2H_6 összetételű etán nyolc különböző atomból áll, mindegyik más-más kombinációkban rezeg és forog, úgyhogy a belső energia összege kT -nek igen nagy számú többszöröse. Egyedül a kinetikus energia értéke legalább $12kT$, és $(\nu - 1)$ -nek nagyon közel kell lenni zérushoz, vagyis ν majdnem pontosan 1. Valóban, az etán esetében ν kisebb, mint az előző gázoké, de még mindig 1,22, ami nagyobb mint az egyedül a kinetikus energiából számolt $1\frac{1}{3}$ érték. Ez megint érthetetlen!

Ha meggondoljuk, hogy a kéttatomos molekulák nem tekinthetők abszolút merev alakzatoknak, látjuk, hogy a rejtély még nagyobb, mint ahogy az első pillanatra látszik. Még ha a két atom közötti kapcsolat olyan erős lenne is, hogy még mozogni sem nagyon tudnának, akkor is rezegnek. A belső rezgési energia mindig kT , mivel ez nem függ a kapcsolat erősségétől. Ha *abszolút* merev kapcsolat lenne a két atom között, amely a rezgést is megszüntetné és az ennek megfelelő egy szabadságfokot kiküszöbölné, akkor a kéttatomos gázokra $U = (5/2)kT$ és $\nu = 1,40$ lenne. Ez a megoldás megfelelőnek látszik a H_2 - és az O_2 -gázokra. De még ezzel sem oldottunk meg minden problémát, mert mind a hidrogénre, mind az oxigénre vonatkozóan a hőmérséklettel változik! A mért adatokból — amiket a 40.6 ábrán mutatunk be — látjuk, hogy a H_2 -re vonatkozó ν körülbelül 1,6-tól (-185°C -on) 1,3-ig (2000°C -on) változik. Bár



40.6 ábra. γ kísérleti értékei a hőmérséklet függvényében hidrogénre és oxigénre vonatkozóan

γ értéke a klasszikus elmélet szerint a hőmérséklettől függetlenül 1,286

$\gamma_{\text{hidrogén}}$ változása jelentősebb, mint $\gamma_{\text{oxigén}}$ -é, mégis ha a hőmérséklet csökken, $\gamma_{\text{oxigén}}$ akkor is kifejezetten nő.

40.6 A klasszikus fizika válsága

Mindezt összevéve meg kell állapítanunk, hogy nagyon nehéz dolgunk van. Megpróbálhatnánk ugyan az atomokat nem rugóval, hanem valami mással összekötve elképzelni, de minden másfajta kapcsolat csak növelné γ értékét. Ha más energiafajtákat is figyelembe veszünk, akkor γ még jobban megközelíti az egységet — ami ellentmond a tényeknek. Minden, amit a klasszikus elmélet keretein belül kigondolhatunk, csak ront a dolgokon. Tudjuk például, hogy minden atomban elektronok vannak, és az atomok spektrumából azt is, hogy az elektronok az atomon belül mozognak. Ebből következik, hogy minden elektron legalább $(1/2)kT$ kinetikus energiával rendelkezik, sőt valamennyi potenciális energiája is van. Ezek hozzájárulása a teljes energiához méginkább csökkenti γ értékét. Ez egyszerűen nevetséges! Itt nyilvánvalóan valami baj van!

A gázok dinamikus elméletére vonatkozó első jelentős cikket Maxwell írta 1859-ben. A már általunk is megismert elvek alapján

pontos magyarázatot adott számos összefüggésre, pl. a Boyle-törvényre, a diffúziós elméletre, a gázok viszkozitására, s még sok más kérdésre. A szerző a cikk összefoglalásában a következőket írta: „Végül, az összes nem gömb alakú részecske haladó és forgó mozgása közti szükségszerű összefüggés megállapításával (itt az $(1/2kT)$ tételről van szó) bebizonyítottuk, hogy ilyen részecskékből álló rendszer valószínűleg nem tudja kielégíteni a két fajhő közti ismert összefüggést.” Maxwell itt a γ -ra utal (amiről később látjuk majd, hogy a fajhő mérésének két módjához kapcsolódik), és megjegyzi, hogy senki sem képes helyes választ adni.

Tíz évvel később egyik előadásában mondta a következőket: „Most fel kell tárnom Önök előtt, hogy véleményem szerint mi a molekularis elmélet előtt álló legnehezebb probléma.” Ez az első utalás arra, hogy a klasszikus fizika törvényei nem mindig helytállóak. Első meglátása annak, hogy valami kezdettől fogva nem tiszta, mivel a kísérlet ellentmond egy szigorúan bizonyított tételnek.

1890 körül Jeans beszélt ismét erről a témáról. Gyakran halljuk, hogy a XIX. század végén a fizikusok meg voltak győződve arról, hogy minden jelentős fizikai törvényt ismernek, s egyetlen tennivalójuk a szükséges mennyiségek maximális pontosságú kiszámítása. Ezt valaki egyszer kijelenthette, a többiek pedig utánamondták. Ezen évek fizikai folyóiratainak gondos tanulmányozása azonban azt mutatja, hogy valami miatt minden fizikus nyugtalanodott. Jeans a fenti problémáról mint nagyon rejtélyes jelenségről beszélt, amelyből úgy látszik, mintha a hőmérséklet csökkenésével bizonyos fajta mozgások „befagynának”.

Ha fel lehet tenni, hogy létezik olyan gáz, amelyben megfelelő alacsony hőmérsékleten rezgőmozgás nincs, következésképpen γ értéke 1,40, akkor érthető, hogy magasabb hőmérsékleten, ahol a rezgő mozgás már fellép, γ csökken. Hasonlót lehet a forgásról is mondani. Ha a forgást ki tudnánk küszöbölni, vagyis ha megfelelő alacsony hőmérsékleten a forgás „befagy”, akkor érthetővé válna,

hogy a hidrogén esetében a hőmérséklet csökkenésével γ megközelíti az 1,66 értéket. Hogyan magyarázhatjuk meg ezeket a jelenségeket? A klasszikus mechanika alapján valamely mozgásforma „befagyása” természetesen nem értelmezhető. Erre csak a kvantummechanika felfedezése után lehetett helyes választ adni.

A következőkben bizonyítás nélkül közöljük a kvantummechanikának a statisztikus mechanikára vonatkozó egyes eredményeit. Emlékeztetünk arra, hogy a kvantummechanika szerint valamely potenciál által kötött rendszernek (például egy rezgő rendszer) diszkrét energianívói, vagyis különböző (meghatározott) energiaállapotai vannak. A kérdés: miként módosítja a kvantummechanika a statisztikus mechanikát? Érdekes, hogy bár a kvantummechanikában a legtöbb feladat bonyolultabb, mint a klasszikus fizikában, a statisztikus mechanika feladatait mégis sokkal könnyebb megoldani a kvantummechanika segítségével! A klasszikus mechanika $n = n_0 e^{-\text{energia}/kT}$ alakban kapott egyszerű eredménye a kvantummechanikában nagyon fontos tétellé válik. Ha egy molekula állapotainak sorozatához a $W_0, W_1, W_2, \dots, W_i$ energiák tartoznak, akkor (termikus egyensúly esetén) annak valószínűsége, hogy egy molekulát a W_i energiájú állapotban találjunk, $e^{-W_i/kT}$ -vel arányos. Másként megfogalmazva: a relatív esély — a W_1 energiájú állapot valószínűsége a W_0 energiájú állapot valószínűségéhez viszonyítva:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{e^{-W_1/kT}}{e^{-W_0/kT}} \quad (40.10)$$

Ez természetesen ugyanaz, mint

$$n_1 = n_0 e^{-(W_1 - W_0)/kT}, \quad (40.11)$$

hiszen $P_1 = n_1/N$ és $P_0 = n_0/N$. Eszerint a nagyobb energiájú állapot kevésbé valószínű, mint a kisebb energiájú állapot. A nagyobb és a kisebb energiájú állapotban levő atomok számának aránya e -nek valamilyen hatványával egyenlő (az energiakülönbség negatív értéke osztva kT -vel). Nagyon egyszerű tétel!

Figyeljünk fel arra, hogy a harmonikus oszcillátor egyes energiaszintjei különböző távolságra vannak egymástól. Jelölje a legalacsonyabb energianívót $W_0 = 0$ (W_0 valójában nem zérus, hanem attól kicsit különbözik, de ennek nincs jelentősége, ha az összes energiaértéket egy állandó értékkel eltoljuk). Ekkor az első energiaszint $W_1 = \hbar\omega$, a második $2\hbar\omega$, a harmadik pedig $3\hbar\omega$ stb.

Vizsgáljuk egy kétatomos molekula rezgéseit, amelyet harmonikus oszcillátornak tekintetünk. Mi a relatív esély arra, hogy a molekulát a W_0 állapot helyett a W_1 állapotban találjuk? Válasz: a W_1 állapotra vonatkozó esély a W_0 állapotra vonatkozó esélyhez viszonyítva $e^{-\hbar\omega/kT}$. Tételezzük fel, hogy kT sokkal kisebb, mint $\hbar\omega$, tehát alacsony hőmérsékletről van szó. Ekkor a W_1 állapot valószínűsége rendkívül kicsi. Gyakorlatilag minden molekula a W_0 állapotban van. Ha most kicsit megnöveljük a hőmérsékletet, akkor a $W_1 = \hbar\omega$ állapot valószínűsége továbbra is végtelenül kicsiny. Az oszcillátor energiája közel zérus marad mindaddig, amíg a hőmérséklet sokkal kisebb mint $\hbar\omega$. Az összes oszcillátor a legalsó energiaszintű állapotban van, s mozgásuk gyakorlatilag „befagyott”. A 40.1 táblázat segítségével megállapíthatjuk, hogy 100 °C-on $373/kT$ sokkal kisebb, mint az oxigén-, vagy a hidrogénmolekulák rezgési energiája, jódmolekulák esetén azonban nem ez a helyzet. A különbség oka az, hogy a hid-

40.1 táblázat

A γ fajhő különböző gázokra vonatkozó értékei

Gáz	T, °C	γ
He	-180	1,660
Kr	19	1,68
Ar	15	1,668
H ₂	100	1,404
O ₂	100	1,399
HJ	100	1,40
Br ₂	300	1,32
J ₂	185	1,300
NH ₃	15	1,310
C ₂ H ₆	15	1,22

rogénhez képest a jódatom nagyon nehéz. Bár a jód- és a hidrogénatomok közt ható erők összemérhetők, a nehéz jódmolekula rezgésének sajátfrekvenciája a hidrogénéhez viszonyítva nagyon kicsi. Szobahőmérsékleten kT értéke olyan, hogy $\hbar\omega$ a hidrogén esetén nagyobb, jód esetén pedig kisebb. Ezért csak a jód mutat klasszikus rezgési energiát. Ha igen alacsony T értékből kiindulva — ahol csaknem az összes molekula a megfelelő legalacsonyabb állapotban van — növeljük a gáz hőmérsékletét, akkor fokozatosan egyre nagyobb lesz a valószínűsége annak, hogy a molekulákat a második, aztán a harmadik stb. állapotban találjuk. Amikor már sok állapot valószínűsége jelentős, a gáz megközelítően úgy viselkedik, mint ahogy azt a klasszikus fizika írja le. Ilyenkor ugyanis a *kvantált* állapotokat csaknem lehetetlen megkülönböztetni a *folytonos* energiaeloszlástól, s a rendszer csaknem minden energiaértéket felvehet. Ily módon a hőmérséklet növekedésével ismét a

klasszikus fizika érvényességi tartományába jutunk, amint az a 40.6 ábrából látható.

Ugyanúgy meg lehet mutatni, hogy az atomok forgási állapotai is kvantálhatók, de ezek az állapotok annyira közel vannak egymáshoz, hogy normális körülmények között kT nagyobb, mint a szintek egymástól való távolsága. Ez esetben egyszerre sok szint gerjesztődik, s a rendszer forgási kinetikus energiáját a klasszikus elmélet szerint értelmezhetjük. Egyedül szobahőmérsékleten levő hidrogén esetén nem egészen ez a helyzet.

Ez volt az első alkalom, amikor kísérlettel mutatták ki, hogy valami „nincs rendben” a klasszikus fizikával. Az ellentmondás feloldását a kvantummechanika adta. A következő nehézség felismeréséig még 30 vagy 40 év telt el. Ez ismét a statisztikus mechanikával, mégpedig a fotongáz mechanikájával volt kapcsolatban. A problémát Planck oldotta meg a XX. század elején.

41.1 Az energia ekvipartíciója

1827-ben Robert Brown botanikus különleges mozgást fedezett fel, melyet később róla *Brown-mozgásnak* neveztek el. A mikroszkopikus életjelenségek tanulmányozása során észrevette, hogy mikroszkópja tárgyasztalára helyezett folyadékban kis virágporszemcsék ugrándoznak. Ahhoz eléggé tapasztalt volt, hogy megállapítsa: nem élő anyagokról van szó, hanem egyszerűen a vízben ide-oda mozgó kis szennyezőanyagokról. Ennek bizonyítására régi kvarcdarabkát vizsgált meg, melynek zárványaiiban víz volt. A sok-sok millió évvel ezelőtt a zárványokba került vízben ugyanolyan mozgást látott. Úgy tűnt neki, hogy a nagyon kicsi részecskék szüntelenül folytatják táncoló, szabálytalan mozgásukat.

Később bebizonyították, hogy a Brown-mozgás a *molekuláris mozgás* által okozott hatások egyike. Minőségileg olyan a kép, mintha valahonnan nagyon messziről figyelnenék egy nagy labda mozgását. A labda alatt a pályán mozgó embertömegben mindenki a neki tetsző irányba löki a labdát. Az egyes játékosok nem láthatók, mivel (elképzelésünk szerint) a pálya túl messze van tőlünk, a labdát azonban látjuk, és azt észleljük, hogy az meglehetősen szabálytalanul cikázik ide-oda. Az előző fejezetekben tárgyalt tételek alapján tudjuk, hogy valamely folyadékban vagy gázban szuszpendált kis részecske átlagos kinetikus energiája $(3/2)kT$, még akkor is, ha sokkal nehezebb, mint a gázmolekulák. Ha nagyon nehéz, akkor sebessége viszonylag kicsi, de jobban megvizsgálva kiderül, hogy nem is olyan nagyon kicsi. Persze nem valami könnyű egy ilyen részecske sebességét meg-

41 A Brown-mozgás

figyelni, mivel $1...2 \mu$ átmérőjű tárgy esetén a $(3/2)kT$ átlagos kinetikus energia kb. 1 mm/s sebességnek felel meg. A mozgást még mikroszkóppal is nehéz figyelemmel kísérni. A részecske ugyanis állandóan és rendszer-telenül változtatja mozgásirányát. Hogy ilyen módon mégis mekkora távolságra tud eljutni, azt e fejezet végén tárgyaljuk majd. A problémát elsőnek — századunk elején — Einstein oldotta meg.

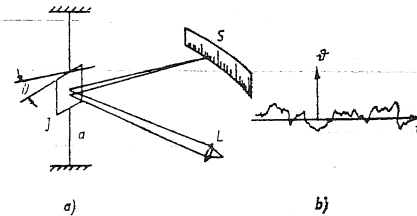
Ha egyébként azt mondjuk, hogy valamely részecskének a közepes kinetikus energiája $(3/2)kT$, akkor megköveteljük, hogy ez a kinetikus elméletből, azaz a Newton-törvényekből következzen. A kinetikus elméletből különböző, csodálatos dolgokat vezethetünk le, és az a legérdekesebb, hogy oly sokat sikerült kapnunk ilyen kevésből. Természetesen ezzel nem azt akarjuk mondani, hogy a Newton-törvények „keveset” jelentenek; valójában a feladat megoldásához minden szükségességet megadnak. Amit e kijelentésen értünk az az, hogy *nekünk* nem kellett sokat dolgoznunk a cél érdekében. Hogyan sikerül mégis oly sokat kapnunk? A válasz egyszerű: mindig egy nagyon fontos feltevésből indultunk ki, nevezetesen abból, hogy ha a rendszer egy adott hőmérsékleten termikus egyensúlyban van, akkor ugyanez a rendszer, ugyanezen a hőmérsékleten tetszőleges mással is termikus egyensúlyban lesz.

Pl. meg akarjuk nézni, hogyan mozog egy részecske, ha a vízzel ténylegesen kölcsönhatásba lép. E célból képzeljük el, hogy a vízben és a részecskén kívül még valamely gáz is jelen van. A gáz parányi „golyócskákból” áll,

amelyek (feltevésünk szerint) a vízzel nincsenek kölcsönhatásban, a részecskéket viszont, a velük való ütközéseik során erősen „lökdösik”. Feltételezzük, hogy a részecskéből egy „kar” nyúlik ki, és az összes golyócska csak ezt a kart löki meg. A golyócskákból álló, képzeletbeli gázzal mindössze annyit tudunk, hogy az adott hőmérsékleten ideális gáz. A víz bonyolult, az ideális gáz viszont egyszerű anyag. Így könnyebb a részecskék és a gáz kölcsönhatását vizsgálni. A részecskék átlagos mozgása tehát olyan, amilyen a gázatomokkal való ütközés során alakul ki. A részecskéknek és a golyócskákból álló gáznak egyensúlyban kell lennie. Belátható, hogy a vízmolekulák és a részecskék sebessége egyenlő. Ha ugyanis a részecskéket a víznél gyorsabban mozognak, akkor ennek következtében a golyócskák energiát vennének át, és a gáz melegebb lenne, mint a víz. Mi azonban egyenlő hőmérsékletekből indultunk ki, és ha egy (zárt) rendszer egyensúlya egyszer már beállt, akkor meg is marad; egyes részei önmaguktól nem válnak melegebbé, más részei pedig hidegebbé.

Ez az állítás igaz és a mechanika törvényei alapján be is bizonyítható. A bizonyítás nagyon bonyolult, és csak a mechanika magasabb fokú ismeretében érthető meg. (A bizonyítás egyébként sokkal könnyebb a kvantummechanika segítségével, mint a klasszikussal.) A tételt először Boltzmann bizonyította be. Mi most egyszerűen elfogadjuk igaznak. Így azt mondhatjuk, hogy részecskéknek $(3/2)kT$ energiájának kell lennie, ha a golyócskákkal ütközik. De ugyanezzel az energiával kell rendelkeznie akkor is, ha a golyócskákat eltávolítjuk és a részecske — ugyanakkora hőmérsékleten — a vízzel ütközik. A gondolatmenet talán furcsa, de teljesen helytálló.

A kolloidrészecskék mozgásán kívül — amelyeket vizsgálva a Brown-mozgást felfedezték — egész sor más jelenség is létezik, amiben meg lehet figyelni a Brown-mozgást. Ha a világon a lehető legérzékenyebb mérőberendezést pl. egy nagyon érzékeny ballisztikus galvanométerbe helyezendő vékony kvarcszálra függesztett tükör segítségével próbáljuk előállítani (41.1 ábra), nehézségekbe ütközünk.



41.1 ábra. Brown-mozgás megfigyelése galvanométerrel

a) az L forrásból érkező fény egy kis tükörről a skálára tükröződik; b) a skálaleolvasások rögzítése az idő függvényében

Ha ui. a tükört megfigyeljük, azt tapasztaljuk, hogy a tükör szüntelenül ide-oda mozog. Fénysugarat bocsátva rá, a kapott fényfolt nem tesz lehetővé pontos leolvasást, nem lesz pontos a mérőeszközünk, mivel a tükör szüntelenül mozog. Miért? Azért, mert a tükör forgásának átlagos kinetikus energiája $(1/2)kT$.

Mivel lesz egyenlő a tükör ingadozási szögének négyzetes átlaga? Tételezzük fel, hogy a tükör saját rezgésének periódusát már meghatároztuk (megkoccintva egyik oldalát és megfigyelve, meddig rezeg ide-oda) és J tehetlenségi nyomatékát is ismerjük. A forgás kinetikus energiájára vonatkozó összefüggést [l. (19.8) egyenlet] tudjuk; $W_{kin} = (1/2)J\omega^2$. A mozgás során fellépő potenciális energia viszont az elfordulás szögének négyzetével arányos, azaz $W_{pot} = (1/2)\alpha\theta^2$. Ha viszont ismerjük a rezgés t_0 periódusát és így ki tudjuk számítani a megfelelő $\omega_0 = 2\pi/t_0$ sajátfrekvenciát, akkor a potenciális energia $W_{pot} = (1/2)J\omega_0^2\theta^2$ alakba írható. Tudjuk, hogy az átlagos kinetikus energia $(1/2)kT$, mivel azonban harmonikus oszcillátort vizsgálunk, az átlagos potenciális energia szintén $(1/2)kT$. Következésképp

$$\frac{1}{2} J \omega_0^2 \langle \theta^2 \rangle = \frac{1}{2} kT,$$

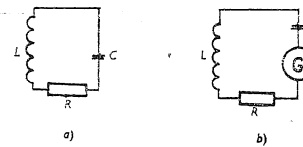
vagy

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{kT}{J\omega_0^2}. \quad (41.1)$$

Ily módon ki tudjuk számolni a tükör rezgéseit, és megkaphatjuk mérőeszközünk pon-

tosságának határait. Amennyiben a rezgéseket csökkenteni akarnánk, le kell hűtenünk a tükört. Ezzel kapcsolatban azonban egy érdekes kérdés merül fel: hol hűtsük le? Ez természetesen attól függ, honnan kapja a tükör a „lökéseket”. Ha a kvarcszálon keresztül, akkor a szál felső végét kell hűtenünk. Ha a tükör gázatmoszférában van és a lökéseket főleg a gázmolekulákkal való ütközések számlájára írjuk, akkor jobb a gázt hűteni. Gyakorlati szabálynak fogadhatjuk el a következőt; ha ismert valamely rezgés csillapításának módja, akkor mindig megtalálható az ingadozás forrása is. Erre a kérdésre egyébként még visszatérünk.

Ugyanez az ingadozás elektromos áramkörökre is jellemző. Tételezzük fel, hogy egy meghatározott frekvenciára nagyon érzékeny, pontos erősítőt építettünk. Az erősítő bemenetére egy rezonancia-áramkört (41.2 ábra) kapcsolunk, hasonlóan a jobb rádióvevőkhöz. Az ingadozásokat a lehető legpontosabban akarjuk tanulmányozni. E célból pl. az indukciós tekercs feszültségingadozásait az erősítő bemenetére adjuk. Természetesen bármely ilyenfajta áramkörben vannak bizonyos veszteségek. A szóban forgó áramkörünk ugyanis nem ideális, hanem csak nagyon jó rezonancia áramkör, amelynek igen kicsi az ellenállása (az ellenállást az ábrán feltüntetettük ugyan, de tudjuk, hogy értéke nagyon kicsi).



41.2 ábra. Nagy Q értékű rezonanciaáramkör

a) valódi áramkör T hőmérsékleten; b) mesterséges áramkör ideális (zaj nélküli) ellenállással és G „zajgenerátorral”

Most pedig szeretnénk kiszámolni, hogy mekkora lesz az indukciós tekercsen a feszültségingadozás? Válasz: Ismeretes, hogy a rezonanciaáramkörben levő tekercsben felhalmozott „kinetikus energia”: $(1/2)LI^2$ (lásd 25. fejezet). $(1/2)LI^2$ átlagértéke $(1/2)kT$, ebből az áram-

erősség, és abból a feszültség négyzetes átlagértéke meghatározható! Ha tehát tudni akarjuk az indukciós tekercs feszültségét, az $U_L = i\omega LI$ formulát kell használnunk, és így az indukciós tekercsen fellépő feszültség abszolút értékének négyzetes átlaga $\langle U_L^2 \rangle = L^2\omega_0^2\langle I^2 \rangle$. Behelyettesítve az $(1/2)L\langle I^2 \rangle = (1/2)kT$ értéket

$$\langle U_L^2 \rangle = L\omega_0^2 kT \quad (41.2)$$

összefüggést kapjuk. Ily módon megtervezhetjük áramkörünket, és megmondhatjuk mekkora lesz benne az ún. Johnson-zaj, azaz a hőmérsékleti ingadozással kapcsolatos zaj!

De akkor, honnan is származnak ezek az ingadozások? Ismét csak az ellenállástól — amiatt, hogy az elektronok ide-oda mozognak az ellenállásban. Mivel az elektronok az ellenállás anyagával termikus egyensúlyban vannak, ez az elektronsűrűség ingadozásához vezet. Az elektronok gyenge elektromos teret hoznak létre, amelyek a rezonancia-áramkört vezérlik.

Elektromérnökök másképpen fogalmazzák meg a problémát. Fizikailag az ellenállás lényegében zajforrás. A valódi áramkör azonban, amelyben a tényleges „zajkeltő” ellenállás van, egy fiktív áramkörrel is helyettesíthetjük, amely a „zaj reprezentálására” generátort tartalmaz. Az ellenállás így ideális lesz, semmiféle zaj sem származik tőle; az összes zaj az elképzelt generátorból ered. Ha ismerjük az ellenállás keltette zaj jellegzetességeit, és a zajt leíró összefüggést, akkor ki tudjuk számítani, hogyan reagál majd az áramkör a zajra. Ebből láthatjuk, hogy a zaj ingadozásait leíró összefüggésre van szükségünk. Az ellenállás egyformán kelt zajt minden frekvencián. A rezonanciakör természetesen ennek a zajnak csak a rezonanciafrekvencia közelébe eső részét „hallja”.

A generátor teljesítményét a következőképpen írhatjuk le. Ha az ellenállás közvetlenül a zajgenerátorral lenne összekapcsolva, akkor az ellenálláson felemészített közepes teljesítmény $\langle U^2 \rangle / R$ lenne, ahol U a generátor feszültsége. Mi azonban most részletesebben szeretnénk ismerni a teljesítmény frekvencia

szerinti eloszlását. Minden egyes meghatározott frekvenciához csak nagyon kicsi teljesítmény tartozik. Jelölje $P(\omega) d\omega$ azt a teljesítményt, amelyet a generátor a $d\omega$ frekvencia-intervallumban táplál az ellenállásba. Ekkor bizonyítható (a bizonyítást más esetre végezzük el, a számítás azonban mindkét esetben tökéletesen azonos), hogy a generátor leadott teljesítménye:

$$P(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} kT d\omega, \quad (41.3)$$

amely ily módon független az ellenállástól.

41.2 A sugárzás termikus egyensúlya

Most egy még bonyolultabb és érdekesebb problémával foglalkozunk. Tegyük fel, hogy egy olyan töltött oszcillátorunk van, amelyről a fény tárgyalásánál volt szó! Legyen ez mondjuk egy elektron, amely valamely atomban fel-le rezeg, és így fényt is sugároz. Tegyük továbbá fel, hogy az oszcillátor más atomokból álló nagyon ritka gázban van, amelyek időnként ütköznek vele. Amikor hosszú idő múlva beáll az egyensúly, az oszcillátor akkora energiára tesz szert, hogy a rezgés kinetikus energiája $(1/2)kT$ lesz, s mivel harmonikus oszcillátorról van szó, a teljes energia pedig kT .

Ez idáig természetesen a helyzet pontatlan leírása. Az oszcillátor ugyanis *elektromos töltést* hordoz, és ha kT energiája van, fel-le mozogva fényt sugároz. Ezért lehetetlen, hogy a valódi anyag önmagában egyensúlyban legyen anélkül, hogy a töltések ne bocsátanak ki fényt. A fényvel azonban energia távozik el, az oszcillátor — az idő múlásával — elveszti kT energiáját, s az egész környező gáz, amely az oszcillátorral ütközik, fokozatosan lehül. Éppen ily módon, a környezetébe fényt bocsátva, hül le hideg éjszakán az izzó kályha is; az atomok töltéseiket ide-oda mozgatják, folyamatosan sugároznak, és lassan — éppen e sugárzások miatt — táncoló mozgásuk lecsillapodik!

Másrészt viszont, ha az összes atomot és oszcillátort egy dobozba zárjuk úgy, hogy a fény nem tud kijutni belőle a végtelenbe, akkor végül is el lehet érni termikus egyensúlyt. A gáz bezárhatjuk egy olyan dobozba, amelynek a falain a doboz belsejébe fényt sugárzó más oszcillátorok is vannak, vagy pedig olyan dobozba, amelynek falai tükrök. Az utóbbival könnyebb a dolgot megérteni. Ily módon feltételezzük, hogy az oszcillátorunk által kisugárzott összes sugárzás a doboz belsejében marad. Természetesen ekkor sugározni kezd az oszcillátor is, de elég rövid idő alatt össze is gyűjti energiájának kT értékét, mert az oszcillátor maga a doboz falairól visszaverődő, saját fényével gerjesztődik. Bár az oszcillátor sugárzik, bizonyos mennyiségű fény visszatérül, és így az oszcillátor kisugárzott energiájának egy részét visszakapja.

Most meghatározzuk, hogy milyen erősen kell megvilágítani T hőmérséklet esetén egy ilyen dobozt ahhoz, hogy az oszcillátor a fény-szóródás által éppen annyi energiához jusson, amennyi a kisugárzás fenntartásához szükséges.

Legyen a dobozban nagyon kevés gázatom, a közöttük levő távolság pedig nagy. Ily módon ideális oszcillátorunk lesz, amelynek — a sugárzási veszteséggel járó csillapítását kivéve — semmilyen csillapítása sincs. Ekkor úgy tekinthetjük, hogy termikus egyensúly esetén az oszcillátor egyrészt sugároz (a kisugárzott energia ki is számítható), másrészt a reá eső fény szóródásakor kárpótlásként a sugárzás mennyiségével egyenlő energiamentiségget kap. Mivel az energia sehova máshova nem tud eltávozni, ezért az effektív sugárzás lényegében „az összfénynek” az a része, amely az oszcillátoron szóródott.

Mindenekelőtt kiszámoljuk tehát az adott energiájú oszcillátor által 1 s alatt kisugárzott energiamentiséget. (Ehhez a sugárzási veszteséget tárgyaló 32. fejezetből (3. kötet 78. oldal) néhány egyenletet felhasználunk anélkül, hogy megismételnénk levezetésünket.) A radiánonként kisugárzott energiának és az oszcillátor energiájának a hányadosát $1/Q$ -val

jelöljük (32.8 egyenlet):

$$\frac{1}{Q} = \frac{dW}{\omega_0 W}$$

A δ mennyiséget (csillapítási állandó) felhasználva ezt a következő alakban is felírhatjuk: $1/Q = \delta/\omega_0$, ahol ω_0 az oszcillátor sajátfrekvenciája, ha δ nagyon kicsiny, Q pedig nagyon nagy. Az 1 s alatt kisugárzott energia tehát:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\omega_0 W}{Q} = \frac{\omega_0 W \delta}{\omega_0} = \delta W, \quad (41.4)$$

vagyis egyszerűen δ -nak és az oszcillátor energiájának a szorzatával egyenlő. Az oszcillátor átlagos energiája viszont kT , ezért a δ és kT szorzatát a másodpercenként kisugárzott energia átlagértéke adja:

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \delta kT. \quad (41.5)$$

Most már csak δ jelentését kell ismernünk. Ezt a mennyiséget a (32.12) egyenletből könnyen megkaphatjuk:

$$\delta = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2}{c}, \quad (41.6)$$

ahol $r_0 = q_e^2/(4\pi \epsilon_0 m c^2)$ a klasszikus elektron-sugár (32.11), és felhasználtuk a $\lambda = 2\pi c/\omega_0$ összefüggést.

A fény-sugárzás átlagos időbeli változására vonatkozó végeredményünk ezért az ω_0 frekvencia környezetében

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2}{c} kT. \quad (41.7)$$

Mennyi fénynek kell az oszcillátorra esnie? Nyilvánvalóan annyinak, hogy az oszcillátor által a fényből (a fény szóródása következtében) elnyelt energiának a fenti mennyiséggel egyenlőnek kell lennie. Más szavakkal, az emittált fény az oszcillátort az üregben megvilágító fényből származó *szórt* fény. Most azt kell kiszámolnunk, hogy mennyi fényt szór vissza az oszcillátor, ha rá bizonyos ismeretlen mennyiségű fény esik. Jelölje $I(\omega) d\omega$ a $d\omega$

frekvenciaintervallumba eső ω frekvenciájú fényenergia mennyiségét (ugyanis *pontosan* megadott frekvenciájú fény nem létezik; a sugárzás kiterjed az egész spektrumra). Ily módon $I(\omega)$ az a *spektráeloszlás*, amelynek alakját kell megkeresnünk. Ilyen spektráeloszlás lehet például egy T hőmérsékletű kályhában a tűz színe, amelyet a kályhaajtó kinyitásakor látunk. Mégis mennyi fény nyelődik el? Valamely beeső fénynyalábból elnyelt sugárzás mennyiségét már meghatároztuk, és *hatáskeresztmetszetként* kifejeztük. Ez pontosan annak felel meg, mintha feltételeznénk, hogy egy bizonyos meghatározott területre beeső összes fény teljesen elnyelődne. A teljes visszasugárzott intenzitás így a beeső fény $I(\omega) d\omega$ intenzitásának és a σ hatáskeresztmetszetnek szorzatával lesz egyenlő.

A hatáskeresztmetszetre korábban levezetett (31.19) képlet nem tartalmazza a csillapítást. A levezetést azonban nem nehéz megismételni, és így az akkor elhanyagolt csillapítási tagot most számításba vehetjük. Ezt elvégezve és a hatáskeresztmetszetet ugyanolyan módon kiszámolva, azt kapjuk, hogy

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \left(\frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \delta^2 \omega^2} \right). \quad (41.8)$$

Menjünk tovább; σ_s a frekvencia függvényében jelentős értéket csak az ω_0 sajátfrekvencia közvetlen környezetében ér el. (Emlékezzünk vissza, hogy valamely sugárzó oszcillátor Q értéke kb. 10^8 .) Az oszcillátor $\omega = \omega_0$ esetén nagyon erősen, ω más értékeire viszont nagyon gyengén szór. Ezért helyettesítjük ω -t ω_0 -val és $(\omega^2 - \omega_0^2)$ -et $2\omega_0(\omega - \omega_0)$ -l; ekkor

$$\sigma_s = \frac{2\pi r_0^2 \omega_0^2}{3 \left[(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\delta^2}{4} \right]}. \quad (41.9)$$

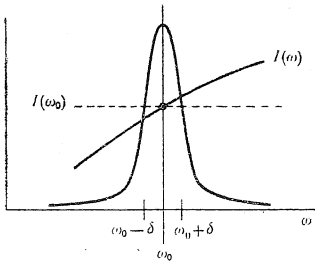
Az egész görbe most csaknem $\omega = \omega_0$ környezetére korlátozódik. (Ténylegesen semmilyen közelítést sem kellene tennünk, de az integrálokat sokkal egyszerűbb kiszámítani, ha az egyenletet egy kicsit leegyszerűsítjük.) Az adott frekvenciatarományba eső intenzi-

tást beszorozva a szórás keresztmetszettel, a $d\omega$ intervallumba szórt energiámmennyiséget kapjuk. A teljes szórt energia az összes ω -ra vett integrálja lesz, tehát

$$\frac{dW_s}{dt} \int_0^\infty I(\omega) \sigma_s(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{2\pi\omega_0^2 I(\omega) d\omega}{3 \left[(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\delta^2}{4} \right]} \quad (41.10)$$

Most azt állítjuk, hogy $dW_s/dt = 3\delta kT$. De miért jön be a 3-as szorzófaktor? Azért, mert amikor a hatáskeresztmetszetet számítottuk, a 32. fejezetben feltételeztük, hogy a fénynyaláb polarizáltsága folytan rezegtetni tudja az oszcillátort. Ha az oszcillátor csak egy irányban tudna rezegni, és a fény nem lenne helyesen polarizálva, akkor semmilyen szóródás sem jönne létre. Tehát vagy átlagolnunk kell a fény minden beesési és polarizációs irányára a csak egy irányban rezgő oszcillátor szórási hatáskeresztmetszetét, vagy ami sokkal könnyebb, olyan oszcillátort képzelünk el, amely azonnal követi a teret, bármilyen irányba is legyen. Az ilyen oszcillátor, amely mindhárom irányban egyformán rezeghet, $3kT$ átlagos energiájú, mivel három szabadsági fok van. A három szabadsági fok miatt tehát $3\delta kT$ -t kell írunk.

Végezzük el most az integrálást. Tegyük fel, hogy a fény ismeretlen $I(\omega)$ spektráloszlása sima görbe, amely abban a szűk frekvenciatartományban, ahol σ_s -nek éles maximuma van, nem változik nagyon erősen (41.3 ábra).



41.3 ábra. Szorozótényezők a (41.10) integrál alatti kifejezésben

A csúcs az $1/(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2/4$ rezonanciagörbe; az $I(\omega)$ tényezőt jó közelítéssel $I(\omega_0)$ -val lehet helyettesíteni

Ekkor az integrálhoz az egyetlen lényeges járulékot csak azok az ω frekvenciák adják, amelyek az ω_0 nagyon kicsiny környezetén belül vannak. Ezért, bár $I(\omega)$ ismeretlen és bonyolult függvény is lehet, az egyetlen helyen, ahol fontos az $\omega = \omega_0$ hely környezete, a sima görbét egy ugyanolyan magasságú egyenessel helyettesíthetjük. Más szavakkal, az $I(\omega)$ -t egyszerűen az integráljel elé visszük, és $I(\omega_0)$ -nak nevezzük. A többi állandót is kiemelve az integrál elé kapjuk, hogy

$$\frac{2}{3} \pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega_0) \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\delta^2}{4}} = 2\delta kT. \quad (41.11)$$

Az integrálás 0-tól ∞ -ig terjed, a 0 azonban oly messze van ω_0 -tól, hogy a görbe itt már csaknem az abszcissa mentén fut, ezért 0-helyett $-\infty$ -ig megyünk. Ez különbséget nem jelent, az integrálás pedig sokkal könnyebb. Az integrál egy $\int dx/(x^2 + a^2)$ alakú árkusz tangens függvény. Ennek értéke 0 és $+\infty$ határok között π/a -val egyenlő. Esetünkre $2\pi/\delta$ adódik, ezért kis átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$I(\omega_0) = \frac{9\delta^2 kT}{4\pi^2 r_0^2 \omega_0^2}. \quad (41.12)$$

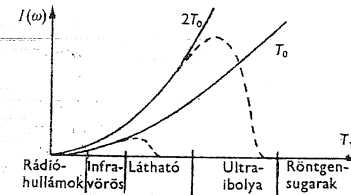
Behelyettesítve ide a δ -ra vonatkozó (41.6) összefüggést (nem szükséges ω_0 -t írunk; hiszen ez igaz bármely ω_0 értékre is, amelyet egyszerűen ω -nak nevezhetünk):

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^2}, \quad (41.13)$$

amely megadja a fény eloszlását egy forró kályhában. Ezt *feketetest-sugárzásnak* nevezik (fekete azért, mert abszolút zérus hőmérséklet esetén a kályha nyílása fekete).

A (41.13) a klasszikus elmélet szerint adja meg valamely zárt doboz belsejében a T hőmérsékletű sugárzás energiaeloszlását. Megjegyezzük, hogy sem az oszcillátor töltése, sem tömege, sem semmilyen jellegzetes tulajdonsága *nem szerepel* (41.13)-ban. Ha ugyanis egy oszcillátorral egyszer már elértük az

egyensúlyt, egyensúlyról kell gondoskodnunk bármely más, különböző tömegű oszcillátor esetében is, különben elméletünkkel bajba kerülünk. Ez igen fontos ellenőrzésmódja egyes állításoknak, mely szerint az egyensúly csak a *hőmérséklettől függ*, és nem attól, hogy minek az egyensúlyáról beszélünk. E megjegyzés után, rajzoljuk most fel az $I(\omega)$ görbe alakját (41.4 ábra). A görbe különböző frekvenciáknak megfelelő fényintenzitást mutatja.



41.4 ábra. Feketetest intenzitáseloszlása két hőmérséklet esetén a klasszikus fizika szerint (folytonos görbék)

A szaggatott görbék mutatják a tényleges eloszlást

Abban a kifejezésben, mely az egységnyi frekvenciatartományba eső intenzitás nagyságát írja le, a frekvencia négyzete szerepel. Ez azt jelenti, hogy bármely tetszőleges hőmérséklet esetén a dobozból mindig tekintélyes mennyiségű röntgensugárzás jön ki!

Természetesen tudjuk, hogy ez nem igaz. Amikor ugyanis kinyitjuk a kályhát és bepillantunk, a röntgensugarak egyáltalán nem teszik tönkre szemünket. Az előbbi kijelentésünk tehát hamis. A dobozban levő *teljes energia*: valamennyi frekvenciára összegezett intenzitás, azaz a végtelen görbe alatti terület. Itt tehát valami alapvetően hibás!

Kudarcunk azt jelenti, hogy a klasszikus elmélet teljesen *képtelen* a feketetest sugárzási eloszlásának és a gázok fajhőjének helyes leírására. A fizikusok e következtetést minden oldalról töviről-hegyire megvizsgálták, de kitutat nem találtak.

A (41.13) összefüggés, amelyet Rayleigh-törvénynek neveznek, a klasszikus fizika „jóslata”; nyilvánvalóan teljes abszurditás!

41.3 Ekvipartíció és a kvantumoszcillátor

A fenti nehézség csak egyike a klasszikus fizika megoldatlan kérdéseinek. Már a gázok fajhőjének értelmezésében is, majd pedig a feketetestben levő fényeloszlás magyarázata során jelentkeztek a nehézségek. Természetesen, miatt az elméleti fizikusok vizsgálták a problémát, azalatt *számos mérést* is végeztek. Megállapították, hogy a görbék helyes lefutása a 41.4 ábrán látható szaggatott görbékhez hasonló, azaz, semmilyen röntgensugarat sem találtak. Ha a hőmérsékletet csökkentjük, a tapasztalati görbék T -vel arányosan, a klasszikus elméletnek megfelelően az abszcisszatenegely felé közelednek, de ugyanakkor alacsonyabb hőmérséklet esetén hamarabb „vágnak le”.

Ily módon az eloszlási görbe kis frekvenciákra vonatkozó része a tapasztalattal megegyezik, a nagy frekvenciára vonatkozó azonban nem. Miért? Amikor Jeans a gázok fajhőjét vizsgálta, észrevette, hogy a nagyfrekvenciájú mozgások elég alacsony hőmérséklet esetén „kifagynak”. Ha ugyanis a hőmérséklet elég alacsony, vagy ha a frekvencia elég nagy, az oszcillátoroknak nem lesz többé átlagosan kT energiájuk.

Emlékezzünk vissza, hogyan is vezettük le (41.13) összefüggésünket! Minden az oszcillátor termikus egyensúlynál vett energiájától függött. A (41.5)-ben szereplő kT ugyanaz a mennyiség volt, mint ami a (41.13)-ban is szerepelt; az ω frekvenciájú harmonikus oszcillátor T hőmérsékletnél vett átlagenergiája. A klasszikus fizika szerint ez a mennyiség kT -vel egyenlő, a kísérlet azonban azt mutatja, hogy — alacsony hőmérséklet és nagy frekvencia esetén — *nem!* Ily módon a görbék levágásának ugyanaz az oka, mint a gázok fajhőcsökkenésének. Könnyebb azonban a feketetest görbéit vizsgálni, mint gázok fajhőit. Fordítsuk figyelmünket ezért a feketetest helyes görbéjének a meghatározására, mivel ez lesz az a görbe, amely minden frekvencián helyesen írja le a harmonikus oszcillátor átlagenergiájának a hőmérsékletfüggését.

E görbéket Planck tanulmányozta. A prob-

lémára először empirikus választ talált oly módon, hogy a kísérleti görbéhez egy megfelelő függvényt illesztett. Frekvenciafüggő empirikus képletet kapott a harmonikus oszcillátor átlagenergiájára, majd utána egy egyszerű levezetést is talált. Ehhez egy eléggé szokatlan dolgot kellett feltételeznie. Feltevése az volt, hogy a *harmonikus oszcillátor egyszerre csak $\hbar\omega$ energiát vehet fel*. Megszületett az első kvantummechanikai képlet, amely évtizedek problémáira adta meg a ragyogó választ! Természetesen ez a klasszikus mechanika végének még csak a kezdete volt. De ezután már nem gondolhatunk arra, hogy az oszcillátornak tetszőleges energiája lehet.

Levezetjük a legelső helyesen meghatározott kvantummechanikai képletet. Tegyük fel, hogy valamely harmonikus oszcillátor megengedett energiaszintjei egymástól egyenlő $\hbar\omega$ távolságra helyezkednek el. Az oszcillátor így csak e különböző energiaértékek valamelyikét veheti fel (41.5 ábra).

$$\begin{array}{l} N_4 - W_4 = 4\hbar\omega \quad P_4 = Ae^{-4\hbar\omega/kT} \\ N_3 - W_3 = 3\hbar\omega \quad P_3 = Ae^{-3\hbar\omega/kT} \\ N_2 - W_2 = 2\hbar\omega \quad P_2 = Ae^{-2\hbar\omega/kT} \\ N_1 - W_1 = \hbar\omega \quad P_1 = Ae^{-\hbar\omega/kT} \\ N_0 - W_0 = 0 \quad P_0 = A \end{array}$$

41.5 ábra. A harmonikus oszcillátor energiaszintjei egyenlő távolságra vannak egymástól, $W_n = n\hbar\omega$

Planck az itt közölnél valamivel bonyolultabban érvelt, hiszen ez még csak a kvantummechanika kezdetét jelentette és neki bizonyos megállapításokat még bizonyítani kellett. Mi azonban tényként fogadjuk el, hogy a W energianívó betöltési valószínűsége: $P(W)$ W energianívó betöltési valószínűsége: $P(W) = \alpha e^{-W/kT}$. Ebből kiindulva aztán a helyes eredményt kapjuk.

Feltételezzük, hogy sok oszcillátorunk van, és mindegyiknek ω_0 a frekvenciája. Egyesek közülük a legelső kvantumállapotot foglalják

el, néhányan pedig a fölötte levőt s í. t. Ismerni szeretnénk az oszcillátorok átlagos energiáját. Ehhez számoljuk ki először az oszcillátorok teljes energiájának összegét és a kapott értéket osszuk el az oszcillátorok számával. Termikus egyensúlyban ez az érték adja meg egy-egy oszcillátor átlagenergiáját, egyúttal ez lesz a feketetest sugárzásával egyensúlyban levő energia, és ezt kell a (41.13) egyenletbe írunk kT helyett.

Legyen N_0 az alapállapotban (a legalacsonyabb energiaállapotban) levő oszcillátorok száma; N_1 a W_1 állapotban, N_2 a W_2 állapotban levők stb. Az általunk nem bizonyított hipotézisnek megfelelően (miszerint a klasszikus fizikában általánosan használt $e^{-W_{pot}/kT}$ vagy $e^{-W_{kin}/kT}$ valószínűséget a kvantummechanikában az $e^{-\Delta W/kT}$ helyettesíti, ahol ΔW az energiakülönbség) feltételezzük, hogy az első állapotban levő oszcillátorok N_1 száma egyenlő az alapállapotban levők N_0 száma és az $e^{-\hbar\omega/kT}$ mennyiség szorzatával. Hasonlóképpen, a második állapotban levő oszcillátorok száma $N_2 = N_0 e^{-2\hbar\omega/kT}$. A számolás egyszerűsítésére vezessük be az $e^{-\hbar\omega/kT} = x$ jelölést. Ekkor:

$$N_1 = N_0 x, N_2 = N_0 x^2, \dots, N_n = N_0 x^n.$$

Számítsuk ki először az összes oszcillátor teljes energiáját. Ha az oszcillátor alapállapotban van, energiája zérus. Ha az első állapotban, energiája $\hbar\omega_0$; ilyen oszcillátor N_1 van. Ez azt jelenti, hogy ebben az állapotban az energiakészlet $N_1 \hbar\omega$ vagy $\hbar\omega N_0 x$. Mivel a második állapotban az oszcillátor energiája $2\hbar\omega_0$, de ilyen oszcillátorból N_2 van, ebben az állapotban az összes energia $N_2 \hbar\omega = 2\hbar\omega N_0 x^2$ s í. t. Ha mindezt összeadjuk, a teljes energiát kapjuk:

$$W_{\text{össz}} = N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots).$$

Hány oszcillátor van? Az alapállapotban természetesen N_0 , az első állapotban N_1 s í. t. Összesen:

$$N_{\text{össz}} = N_0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots).$$

Az átlagenergia tehát:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \frac{W_{\text{össz}}}{N_{\text{össz}}} = \\ &= \frac{N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{N_0 (1 + x + x^2 + \dots)}. \end{aligned} \quad (41.14)$$

Végezze el az Olvasó szórakozásképpen a két összegezt! Ha nem tévedett, akkor a végeredménybe x -et behelyettesítve, a következő kifejezést kell kapnia:

$$\langle W \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (41.15)$$

A fenti kifejezés természetesen kT -hez tart, amint $\omega \rightarrow 0$ -hoz, vagy $T \rightarrow \infty$ -hez.

Az átlagenergiára vonatkozó kifejezés szolgáltatta azt a híres levágási tényezőt, amelyet Jeans keresett, és ha a (41.13)-ban ezt használjuk kT helyett, a fekete doboz fényeloszlására azt kapjuk, hogy

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (41.16)$$

Látjuk, hogy ω nagy értéke esetén a görbe levág, és nincs rajta „felfutás”, hiába szerepel ugyanis a számlálóban ω^3 , a nevezőben e kitevője igen nagy. Nem kapunk ultraibolya fényt, s röntgensugarakat sem!

Elégedetlenkedhet esetleg valaki amiatt, hogy a (41.16) levezetésben, a harmonikus oszcillátor energiaszintjeire a kvantumelméletet, a σ_s hatáskeresztmetszet meghatározására pedig a klasszikus elméletet alkalmaztuk. A harmonikus oszcillátorral kölcsönható fény kvantumelmélete azonban pontosan ugyanazt az eredményt adja, mint ami a klasszikus elmélet alapján adódik. Ténylegesen ez a körülmény igazolja azt a sok időt, amelyet a törésmutató és a fényszórás tárgyalására fordítottunk, aminek során az atomokat kis oszcillátoroknak tekintettük. Ismételten hangsúlyozzuk, az így kapott összefüggések a kvantumformulákkal *tökéletesen* megegyeznek.

Térjünk vissza az ellenállásban fellépő Johnson-zajhoz. Már megjegyeztük, hogy e zaj teljesítményének elmélete lényegében ugyanaz, mint a klasszikus feketetest-sugárzásé. Ténylegesen az áramkör ellenállása nem valódi ellenállás, hanem inkább egy antennához hasonló. Így könnyen ki tudjuk számolni, hogy mi lesz a teljesítmény. A teljesítmény egyenlő lesz avval, amit az antenna az őt körülvevő fénytől kap, s egy-két szorzótényezőtől eltekintve, eloszlasa is ugyanolyan. Feltételezhetjük, hogy az ellenállás egy ismeretlen $P(\omega)$ teljesítményspektrummal rendelkező generátor. A spektrum meghatározását az a körülmény segíti, hogy a generátor, egy tetszőleges frekvenciájú rezonanciakörrel összekapcsolva — mint a 41.2b ábrán — az indukciós tekercsben a (41.2) egyenlet által megadott feszültséget kelti. A számítások elvégzése után ugyanahhoz az integrálhoz jutunk, mint (41.10)-ben, és e módszer szerint eljárva, megkapjuk a (41.3) egyenletet. Kis hőmérsékleten, (41.3)-ban kT természetesen (41.15) kifejezéssel helyettesítendő.

A két elmélet (a feketetest-sugárzásé és a Johnson-zajé) fizikailag is szoros kapcsolatban van, mivel a rezonanciakört természetesen egy *antennával* is összekapcsolhatjuk, tehát az R ellenállás tiszta *sugárzási ellenállás* lesz. Mivel (41.2) nem függ az ellenállás fizikai tulajdonságaitól, a G generátor mind a valódi ellenállás, mind a sugárzási ellenállás számára ugyanaz lesz. Mégis mi lesz a $P(\omega)$ teljesítmény forrása, ha az R ellenállás most egy — a környezetével T hőmérsékletnél egyensúlyban levő — ideális antenna? Ez a T hőmérsékleten, a térből az antennába belépő $I(\omega)$ sugárzás lesz, amely mint „bemenő jel” effektív generátorként viselkedik. Ezért lehet a $P(\omega)$ és $I(\omega)$ között (41.13)-ból (41.3) felé haladva közvetlen kapcsolatot teremteni.

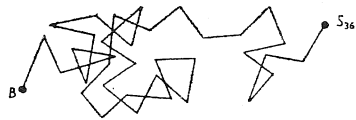
Mindezek — a Johnson-zaj, a Planck-eloszlás és a Brown-mozgás elmélete (amelyeket rövidesen pontosan is leírtunk) — a század első évtizedének eredményei. Miután megismertük történetüket, visszatérünk a Brown-mozgás tárgyalásához.

41.4 Bolyongás

Vizsgáljuk meg, hogy egy ide-oda lökődő részecske a „lökések” közötti időnél sokkal hosszabb idő alatt, milyen messzire jut el. Nézzünk meg pl. egy parányi, Brown-mozgást végző részecskét, amelyet a szabálytalanul ide-oda táncoló vízmolekulák minden oldalról lökdösnek. Kérdés: Bizonyos idő letelte után mily messzire jut el a részecske kezdeti helyétől? E feladatot Einstein és Smoluchowski oldották meg.

Képzeljünk el, hogy az időt kis intervallumokra, mondjuk századmásodpercekre osztjuk fel. Ekkor a részecske az első századmásodpercben egy adott helyen látszik, a második folyamán tovább mozog, a következő századmásodperc végére valamire másféle megy s í. t. A részecskét érő lökdösés gyakoriságához képest ez az idő nagyon hosszú. Az Olvasó könnyen meggyőződhet arról, hogy egyetlen vízmolekula másodpercenként kb. 10^{14} -szer ütközik, úgyhogy egy századmásodperc alatt 10^{12} ütközésnek kell lezajlania, ami igen sok! Ezért magától értetődik, hogy egy századmásodperc múlva a részecske már nem „emlékszik”, mi történt vele előbb. Az ütközések véletlenszerűek, a részecske minden egyes „lépése” független az elsőtől.

A probléma hasonló a híres „berüggött tengerész”-problémához: a tengerész kijön a bárból és el akar indulni valamire — mivel azonban rosszul áll a lábán —, lépései véletlenszerűek, minden lépése az előzővel valamilyen tetszőleges szöget zár be (41.6 ábra). Elég hosszú idő elteltével vajon meddig jut el a tengerész? Természetesen nem tudjuk, hiszen lehetetlen is megmondani! Csak az bizonyos, hogy valahol, többé-kevésbé véletlenszerűen,



41.6 ábra. $36L$ hosszúságú lépésből álló cikcakkos út

Milyen messze van S_{36} B-től? Átlagosan kb. $6L$ -re

itt vagy ott tartózkodik. No de mégis hol van körülbelül? Átlagosan milyen távolságra jutott el a bártól? Erre a kérdésre már feleltünk, mivel egyszer már megtárgyaltuk a nagyszámú, különböző fázisú forrásból származó fény szuperpozícióját és ez nagyszámú, egymással különböző szöget bezáró nyíl összeadását jelentette (32. fejezet). Ekkor megállapítottuk, hogy a véletlenszerű lépésekből álló lánc egyik végétől a másikig vett távolság négyzetes középértéke — amely éppen a fényintenzitás — az egyes források intenzitásának összegével egyenlő. Teljesen hasonló módon, ugyanezzel a számítással dolgozva, közvetlenül bebizonyítható, hogy ha N lépés után kezdetről R_N a vektortávolság, akkor az R_N négyzetes középértéke arányos a lépések N számával. Azaz $\langle R_N^2 \rangle = NL^2$, ahol L az egyes lépések hossza. Mivel a lépések száma esetünkben arányos az idővel, a távolság négyzetes középértékének szintén annak kell lennie:

$$\langle R^2 \rangle = \alpha t. \quad (41.17)$$

Ez nem jelenti azt, hogy az átlagos távolság arányos az idővel. Ha ugyanis ez fennállna, akkor a részecskének teljesen meghatározott sebességgel kellene mozogni. (A tengerész kétségkívül előre mozog, mozgása azonban olyan, hogy csak a távolság négyzetes középértéke arányos az idővel.) Ez a bolyongás jellegzetesége.

Nagyon könnyen megmutathatjuk, hogy minden lépés a távolság négyzetét átlagosan L^2 -tel növeli meg. $R_N = R_{N-1} + L$ felhasználásával ugyanis

$$R_N \cdot R_N = R_N^2 = R_{N-1}^2 + 2R_{N-1} \cdot L + L^2.$$

Sok esetre átlagolva pedig $\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + L^2$, mivel $\langle R_{N-1} \cdot L \rangle = 0$. Ily módon teljes indukcióval:

$$R_N^2 = NL^2. \quad (41.18)$$

Számítsuk ki (41.17) egyenletben szereplő α együttható értékét! Mielőtt ehhez hozzáfognánk, meg kell jegyeznünk néhány dolgot. Ha a részecskére erő hat (ennek semmi köze sincs a Brown-mozgáshoz — csak pillanatnyi kitérőt teszünk), akkor a részecske a következő-

képp hat vissza az erőre. Mindenekelőtt figyelembe kell venni a tehetetlenséget. Jelölje m a tehetetlenségi együtthatót, az objektum effektív tömegét (ez nem szükségképpen egyenlő a valódi részecske valódi tömegével, mivel ha a részecskét a vízben mozgatjuk, a víznek is mozognia kell a részecske körül). Ha tehát egy bizonyos irányú mozgásról beszélünk, akkor a mozgásegyenlet egyik oldalán egy $m(d^2x/dt^2)$ alakú tag lép fel. Továbbá hangsúlyozzuk, hogy ha a részecskére egyenletes tolóerő hat, akkor mozgását a folyadék a részecske sebességével arányos erővel fékezi. A folyadék tehetetlenségén kívül számolni kell áramlási-ellenállásával is, amely a folyadék viszkozitásából és bonyolult összetételéből adódik. Ingadozások előidézéséhez rendkívül lényeges néhány — az ellenálláshoz hasonló — irreverzibilis veszteség jelenléte. Amíg nincsenek ilyen veszteségek, semmilyen mód sincs arra, hogy kT mennyiséget kapjunk. Az ingadozások eredete szoros kapcsolatban van ezekkel a veszteségekkel. Rövidesen megtárgyaljuk, hogy milyen a fékezés mechanizmusa — beszélünk majd azokról az erőkről, amelyek a sebességgel arányosak és rávilágítunk eredetükre. Egyelőre azonban csak azt tételizzük fel, hogy létezik ilyen ellenállás. Amikor külső erő hatására a részecske csak a legegyszerűbb módon mozog, a következő mozgásegyenletet kapjuk:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{\text{külső}}. \quad (41.19)$$

A μ mennyiség közvetlenül kísérletből meghatározható. Nézzük például, mi történik egy parányi részecskével gravitáció hatására, ha az erő mg -vel egyenlő, μ pedig mg és a részecske végső esési sebességének hányadosa. A részecskét centrifugába is tehetjük, és megfigyelhetjük, hogy milyen gyorsan csapódik le. Ha pedig elektromos töltése van, elektromos térbe helyezhetjük. Ez azt jelenti, hogy μ mérhető mennyiség, melynek értéke sokféle koloid részecske esetén már ismert.

Alkalmazzuk most ugyanezt az összefüggést a Brown-mozgás szabálytalan erőire. Próbál-

juk meg ekkor meghatározni a részecske által megtett út négyzetes középértékét. A távolságot nem három dimenzióban, csak egy dimenzióban vizsgáljuk, és hogy előkészítsük a feladat megoldását, kiszámoljuk x^2 átlagértékét is. (Nyilvánvalóan, hogy x^2 átlagértéke ugyanaz, mint y^2 , ill. z^2 -é, ezért a távolság négyzetes középértéke pontosan háromszorosa annak, amit most kiszámolunk.)

A szabálytalan erők x komponense természetesen éppolyan szabálytalan, mint bármely más komponens. Mivel lesz egyenlő x^2 változásának sebessége? Ez $d(x^2)/dt = 2x(dx/dt)$. Tehát x^2 átlagértékének változási sebességét úgy számoljuk ki, hogy a sebesség és a helykoordináták szorzatát átlagoljuk. Mindjárt megmutatjuk, hogy ez állandó, s ezért a sugár négyzetes középértéke az idővel arányosan növekszik. Szorozzuk be a (41.19) egyenletet x -szel, azt kapjuk, hogy

$$mx \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right) + \mu x \left(\frac{dx}{dt} \right) = xF_x.$$

Minket $x(dx/dt)$ időátlagja érdekel. Képezzük ezért az egész egyenlet időátlagát és utána vizsgáljuk meg az egyenlet tagjait. De mit lehet mondani a távolság és az erő szorzatáról? Ha a részecske már elért egy bizonyos x távolságot, akkor, mivel az erő teljesen szabálytalan, s „nem tudja, hogy a részecske honnan indult”, a következő impulzus x -hez képest bármely irányból érheti a részecskét. Ha x pozitív, semmilyen ok sem indokolja, hogy miért kell az átlagos erőnek is ugyanebbe az irányba mutatni. Számára ugyanis az egyik irány éppoly valószínű, mint a másik. A véletlen erők nem hajthatják a részecskét egyetlen meghatározott irányba sem. Ezért x és F szorzatának átlagértéke zérus. Másrésztől kis fantáziával az $mx(d^2x/dt^2)$ tagot a következő alakba írhatjuk:

$$mx \frac{dx}{dt^2} = m \frac{d \left[x \left(\frac{dx}{dt} \right) \right]}{dt} - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Az átlagoláshoz először nézzük meg, mivel kell egyenlőnek lennie x és a sebesség szor-

zatának. Ez a szorzat az időtől nem függ, mert amikor a részecske egy adott ponthoz érkezik, nem emlékszik, hol volt előtte. E mennyiség átlagértéke tehát zérus. A második tag: mv^2 . Erről annyit tudunk, hogy $mv^2/2$ átlagértéke $(1/2)kT$. Megállapítottuk tehát, hogy az

$$\left\langle mx \frac{d^2x}{dt^2} \right\rangle + \mu \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = \langle xF_x \rangle$$

egyenletből következik a

$$-\langle mv^2 \rangle + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 0,$$

illetve a

$$\frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = 2 \frac{kT}{\mu} \quad (41.20)$$

összefüggés.

Ez azt jelenti, hogy bolyongást végző tárgyunk által megtett távolság négyzetes középértéke adott t időtartam végére az

$$\langle R^2 \rangle = 6kT \frac{t}{\mu} \quad (41.21)$$

kifejezéssel lesz egyenlő.

Ily módon végeredményben meg tudjuk határozni, milyen messzire mennek a részecskék! Először ismernünk kell, hogy milyen kölcsön-

hatásban vannak az állandóan ható erővel, s milyen gyorsan „vándorolnak” valamely ismert erő hatására (hogy megkapjuk μ -t) és akkor ki tudjuk számítani, mekkora távolságra jutnak el véletlen mozgásaik során. A most levezetett egyenlet a fizika történetében jelentős volt, mivel a k állandó meghatározásának egyik lehetőségét szolgáltatta. Meg tudjuk tehát mérni a μ -t, az időt, és azt, hogy a részecske milyen messze megy, és képezhetjük az átlagértékeket.

Miért volt ilyen fontos k pontos értékének meghatározása? Azért, mert az egy molra vonatkozó $pV = RT$ törvényben az R — amely egyébként szintén mérhető — az egy molban levő atomok számának és k -nak a szorzatával egyenlő. A múlt eredetileg mint egy meghatározott *gramm* O^{16} -ot definiálták (most a szenet használják erre a célra); a molban levő atomok száma kezdetben nem volt ismeretes, pedig ez nagyon érdekes és fontos kérdés. Az atomok számát egyik legkorábbi módszer szerint annak alapján határozták meg, hogy milyen messze jut el egy kis részecske, amíg azt mikroszkóp alatt meghatározott ideig türelmesen követjük. Ily módon — miután R -t ebben az időben már megmérték — a k Boltzmann-állandót és az N_0 Avogadro-számot meg lehetett határozni.

42 A kinetikus elmélet alkalmazásai

42.1 Párolgás

Ebben a fejezetben a kinetikus elmélet néhány további alkalmazásával foglalkozunk. Az előző fejezetben az elméletnek azt a sajátos oldalát hangsúlyoztuk, hogy egy molekula vagy valamely más tárgy minden szabadsági fokára átlagosan $(1/2)kT$ kinetikus energia jut. A továbbiakban bemutatandó jelenségeknek van egy közös vonása: annak egységnyi térfogatra vonatkoztatott valószínűsége, hogy részecskét találjunk valamely helyen, arányos az $e^{-W_{pot}/kT}$ függvénnyel. (Ezt egy sor feladat megoldásában felhasználjuk majd.)

A tanulmányozott jelenségek — folyadékok párolgása, elektronok kilépése fémfelületből, vagy kémiai reakciók, amelyekben nagyszámú atom vesz részt — viszonylag bonyolultak. Ilyen esetekben a kinetikus elmélet alapján már nem lehet egyszerű és pontos leírást adni. A leírt eredmények még eléggé pontatlanok. (Kivételekre azonban külön felhívjuk majd a figyelmet.) Csupán azt a gondolatot akarjuk kifejtetni, hogy a jelenségek a kinetikus elmélet alapján *többé-kevésbé* megérthetők. A termodinamika vagy a kritikus mennyiségekre vonatkozó egyes mérések pontosabban írják le a jelenségeket.

Nagyon hasznos azonban tudni — még ha csak közelítőleg is —, hogy valami *miért* történik úgy, ahogy történik. Ily módon ugyanis, amikor új jelenséggel találkozunk, vagy olyanul, amelyet még nem vizsgáltunk, többé-kevésbé pontosan előre meg tudjuk mondani, minek *kell* majd bekövetkeznie. Tárgyalásunk — bár eléggé pontatlan — fizikai gondolatmenete helyes, csak egyes speciális részeket leegyszerűsítve közöl.

Tekintsük az első példát, a folyadék párolgását. Tegyük fel, hogy egy nagy térfogatú doboz adott hőmérsékleten termikus egyensúlyban levő folyadékkal (pl. víz) és gőzzel van megtöltve, továbbá azt is, hogy a gőz molekulái egymástól viszonylag távol helyezkednek el, a víz molekulái viszont szorosan tapadnak egymáshoz. A feladat a gőzfázisban, ill. vízben levő molekulák számának meghatározása. Mekkora a gőz sűrűsége adott hőmérsékleten, s hogyan függ ez a hőmérséklettől?

Legyen a gőz egyensúlyi térfogatában n számú molekula. n természetesen a hőmérséklettel változik. Hőközlés esetén például a gőzmennyiség megnő. Vezessünk be még egy másik mennyiséget is, a folyadék egységnyi térfogatára eső részecskék számát, $1/V_a$ -t, ahol V_a az egy molekula által elfoglalt térfogat. Feltételezzük ugyanis, hogy a folyadék minden egyes molekulája adott térfogatot foglal el, s így minél több a molekula, annál nagyobb az elfoglalt térfogat. Az egységnyi térfogatban levő molekulák száma az egységnyi térfogatnak és egy molekula térfogatának a hányadosával egyenlő. Feltételezzük továbbá, hogy a folyadékmolekulák között vonzóerő hat, amely összetartja őket (különben nem lehetne megérteni, miért következik be kondenzáció). Feltesszük tehát, hogy létezik ilyen erő és, hogy a folyadékban levő molekuláknak kötési energiájuk van, amelyet a gőzfázisba való átlépéskor le kell győzniük. Ez persze maga után vonja azt a feltételezést, hogy egy molekulának folyadékból gőzbe való átmenetkor bizonyos mennyiségű W munkát kell végeznie.

A gőzfázisba való átvitel azt jelenti, hogy a molekulát el kell szakítanunk a többi, őt vonzó molekulától.

Most felhasználjuk azt az általános törvényt, miszerint két különböző tartományban a térfogategységenkénti atomok száma $n_2/n_1 = e^{-(W_2 - W_1)/kT}$. Ez általános szabály. Esetünkben: a gőz egységnyi térfogatában levő molekulák n számát osztjuk a folyadék egységnyi térfogatára eső molekulák $1/V_a$ számával és így

$$nV_a = e^{-W/kT}. \quad (42.1)$$

Nagyon hasonló a helyzet a gravitációs térben egyensúlyban levő atmoszférához, ahol az alsó légrétegekben a gáz sűrűbb, mint magasabban, azon mgh munka miatt, amely a gáz-molekuláknak h magasságba való felemeléséhez szükséges. A folyadékban a molekulák sűrűbben helyezkednek el, mint a gőzben, és mivel W „energiadombon” kell átvinnünk őket, a sűrűségek aránya $e^{-W/kT}$.

Tulajdonképpen ez az amit le akartunk vezetni, a gőz sűrűsége valamilyen energia negatív értéke és kT hányadosának függvényében exponenciálisan változik. Az e előtt álló tényezők nem különösebben érdekesek, mivel az esetek túlnyomó részében a gőz sűrűsége sokkal kisebb, mint a folyadéké.

Ha a gőz és a folyadék állapota nem közelíti meg a kritikus pontot, ahol a sűrűségek csaknem azonosak, akkor W sokkal nagyobb, mint kT . Ebből következően n sokkal kisebb, mint $1/V_a$. A (42.1) típusú képletek csak ilyen esetben érvényesek. Ekkor ugyanis, mivel az exponens igen nagy negatív szám, ha T -t kicsit megváltoztatjuk, ez a nagy kitevő szintén megváltozik. Az exponenciális változása sokkal lényegesebb, mint az, ami az előtte álló bármelyik szorzótényezőben egyáltalán bekövetkezhet. Miért kell a V_a -hoz hasonló szorzótényezőknak megváltozniuk? Azért, mert leírásunk közelítő; az egyes molekuláknak ugyanis a valóságban nincs határozott térfogatuk és a hőmérséklet változtatásával a feltételezett V_a térfogat sem marad állandó — a folyadék összehúzódik vagy kitágul. Még más hasonló tulajdonságokat is figyelembe kell

venni, úgyhogy a tényleges helyzet sokkal bonyolultabb, e tulajdonságok azonban a hőmérséklettel csak lassan változnak. Azt mondhatnánk, valójában a hőmérséklettel maga a W energia változik meg, mivel különböző hőmérsékleteken a molekuláknak különböző térfogatok felelnek meg, más-más lesz az átlagos vonzás stb. Arra a következtetésre jutunk tehát, hogy ha olyan képletünk van, amelyben minden tényező változik a hőmérséklettel, akkor végeredményben nincs is képletünk. Ha azonban tudjuk, hogy a W/kT kitevő általában nagyon nagy, akkor biztosak lehetünk afelől, hogy a gőz sűrűségét a hőmérséklet függvényében leíró görbe legnagyobb változását az exponenciális szorzótényező okozza. Ezért ha W -t állandónak, az $1/V_a$ -t pedig majdnem állandónak tekintjük, akkor ez a feltételezés görbénk rövid szakaszaira jó közelítést nyújt. Más szavakkal: az alapvető változást az $e^{-W/kT}$ függvényalak határozza meg.

A természetben — mint később majd látni fogjuk — nagyon sok ilyen folyamat van; jellemző rájuk az energiakölcsonvétel, és alap-tulajdonságuk az exponenciális hőmérséklet-függés: $e^{-\text{energia}/kT}$.

Tekintsünk most kissé részletesebben egy másik, a párolgásra vonatkozó és az előzővel csaknem azonos eredményre vezető módszert. A (42.1) összefüggés levezetéséhez az egyensúlyi esetre mindig érvényes szabályt alkalmaztuk. A jelenség jobb megértése érdekében azonban nem árt részletesebben is megvizsgálni a párolgás folyamatát. Ezt a következőképpen is leírhatjuk: a gőzben levő molekulák folyamatosan bombázzák a folyadék felszínét. Ütközésük során vagy visszapatannak róla, vagy átmennek rajta. Hogy melyik esemény a gyakoribb, azt nem tudjuk. Először feltesszük, hogy minden molekula átmegy a felületen, később pedig azt vizsgáljuk meg, mihez vezet, ha a felület „szilárdabb”. Első esetben a folyadék felületén minden pillanatban lesz bizonyos számú kondenzálódó molekula. Számuk (a felületegységre érkező molekulák száma) az egységnyi térfogatban levő molekulák n számának és a v sebességnek a szorzatával egyenlő. A molekulák sebessége a hőmérsék-

lettel függ össze, mivel — mint ismeretes — $(1/2)mv^2$ átlagosan $(3/2)kT$ -vel egyenlő. Tehát v bizonyos fajta átlagos sebesség. Természetesen integrálnunk kell még a szögekre, és bizonyos átlagolást kell végeznünk, az eredmény azonban néhány szorzótényezőtől eltekintve a sebesség négyzetes középértékének gyökével arányos. Így

$$N_c = nv \quad (42.2)$$

az egységnyi felületre érkező és kondenzálódó molekulák száma.

Ugyanakkor azonban a folyadékban levő atomok szüntelenül mozognak s közülük időnként egy-egy kirepül. Becsüljük most meg, vajon mekkora ennek a gyakorisága. A számítás alapgondolata az, hogy egyensúly esetén a másodpercenként kirepülő molekulák száma megegyezik a bejövőkével.

Ahhoz, hogy egy adott molekula kirepüljön, a szomszédos molekulákhoz képest jelentős energiatöbblettel kell rendelkeznie, mivel a folyadék többi molekulája nagyon erősen vonzza. Általában nem is képes legyőzni ezt az erős vonzást, néha azonban az ütközések során ez mégis sikerülhet. Annak az esélye, hogy energiatöbblet W -t elérje, nagyon kicsi, ha $W \gg kT$. Ténylegesen annak a valószínűsége, hogy egy atom az átlagosnál több energiára tesz szert: $e^{-W/kT}$. Tegyük most fel, hogy néhány molekulának sikerült megszereznie ezt az energiát. Mennyi lesz ekkor a felületet másodpercenként elhagyó molekulák száma? Nem biztos, ugyanis az, hogy a szükséges energiával rendelkező molekula valóban el is párolog. A mélyebben fekvő, valamint a nem megfelelő irányba mozgó molekulák esetleg nem lépnek ki a folyadékfázisból. Az egységnyi felületből másodpercenként kilépő molekulák száma közelítőleg egyenlő: a felülethez közeli molekulák felületegységenkénti száma osztva a kilépéshez szükséges idővel és megszorozva $e^{-W/kT}$ -vel, azaz annak valószínűségével, hogy a molekula kilépésre kész állapotban van.

Minden egyes molekula — feltételezésünk szerint — a folyadék felszínénél meghatározott A területet foglal el. Az egységnyi folya-

dékfelületre eső molekulák száma ekkor $1/A$ lesz. Mennyi ideig tart, amíg egy molekula kilép a folyadékból? Ha a molekulák átlagos sebessége v , és át kell haladniuk d molekula-átmérőnyi külső rétegvastagságon, akkor a kilépéshez szükséges idő: d/v . Az elpárolgó molekulák számát tehát közelítőleg az

$$N_e = \left(\frac{1}{A}\right) \left(\frac{v}{d}\right) e^{-W/kT} \quad (42.3)$$

összefüggés adja meg. Egy molekula vetületének és a réteg vastagságának szorzata közelítőleg a molekula által elfoglalt V_a térfogattal egyenlő. Következésképpen: az egyensúlyhoz szükséges, hogy $N_c = N_e$, vagy

$$nv = \left(\frac{v}{V_a}\right) e^{-W/kT} \quad (42.4)$$

legyen.

A v sebességekkel — mivel egyenlők — egyszerűsíthetünk. Bár egyik a gőzben levő, a másik pedig az elpárolgó molekula sebessége, mégis egyenlők, hiszen tudjuk, mindkét molekula átlagos kinetikus energiája (egy adott irányban): $(1/2)kT$. Valaki azonban vitatkozhat velünk: „Nem! Nem! Csak az egészen gyorsan mozgó molekulák párolognak el. Csak ezeknek lesz energiatöbbletük.” Ez azonban nem egészen így van! Abban a pillanatban ugyanis, amint a molekulák kirepülnek a folyadékból, energiatöbbletüket a potenciális energia leküzdésére kell hogy fordítsák, és a felülethez érkezésükkor már a lelassult v sebességgel mozognak! A helyzet pontosan ugyanaz, mint amit a légkörben levő molekuláris sebességeloszlások tárgyalása során ismertettünk: az alsóbb rétegekben a molekulák energiaeloszlása adott. Azoknak, amelyek magasabb rétegekbe érkeznek, *ugyanaz* lesz az energiaeloszlásuk, mivel a lassúbbak egyáltalában nem érkeznek fel, a gyorsak pedig mire felérnek, lelassulnak. Mindenesetre szükségtelen formulánk pontosságának finomítására törekednünk, mert a képlet más pontatlanságokat is tartalmaz. Nem vettük pl. tekintetbe a kondenzáció valószínűségét, csak azt, hogy a molekulák a folyadék felületéről

visszaverődhetnek s i. t. A párolgás és a kondenzáció sebességéről ily módon durva elképzelést szereztünk és látjuk, hogy az n gőzsűrűség ugyanúgy változik, mint előbb, de most már a folyamatot is jobban értjük, míg korábban egy csaknem önkényes képletet írtunk fel.

Az a tény, hogy a folyamatot mélyebben megértettük, lehetővé teszi, hogy még néhány dolgot megvizsgáljunk. Például tegyük fel, hogy a gőzt olyan sebességgel tudjuk elszívni, mint ahogy keletkezik (azaz, nagyon „ideális szivattyú” áll rendelkezésünkre, a folyadék párolgása pedig nagyon lassú). Mekkora a folyadék párolgási sebessége, ha a T hőmérséklet közben állandónak tartjuk? Feltételezzük, hogy kísérletileg már megmértük a gáz egyensúlyi sűrűségét, és ismerjük, hogy térfogategységenként adott hőmérsékleten hány molekula van a folyadékkal egyensúlyban. Bár az eddigiekben a párolgást csak közelítő pontossággal vizsgáltuk, azért a folyadék felszínére érkező gőzmolekulák számát — tekintve az ismeretlen visszaverődési együtthatótól — mégsem pontatlanul adtuk meg. Kihasználhatjuk tehát azt a körülményt, hogy egyensúly esetén a folyadékfelszínből kilépő molekulák száma egyenlő a belépőkével. Igaz ugyan, hogy a gőzt elszívjuk és a molekulák a folyadék felszínéből csak kifelé tudnak lépni, de ha a gőz nyugalomban volna, elné egyensúlyi sűrűségét, akkor a visszaérkező molekulák száma egyenlő lenne az elpárolgókéval. Következésképpen könnyű belátni, hogy a felületet másodpercenként elhagyó molekulák száma egyenlő az ismeretlen R visszaverődési együtthatónak és a másodpercenként visszatérő olyan molekulák számának a szorzatával, amelyek akkor érkeznének a felületre, ha a gőz továbbra is ott volna. Ez a szám szerepel az egyensúlyi párolgás mérlegegyenletében:

$$N_e = n_e v R = \frac{vR}{V_a} e^{-W/kT}. \quad (42.5)$$

Természetesen a gőzből a folyadékba belépő molekulák számát könnyebb meghatározni, mint a folyadékból kilépőket, mivel az erőkre nézve nem kell feltételezéseket tennünk.

42.2 Termikus elektronemisszió

Egy másik, a folyadék párolgásához hasonló, és a gyakorlatban sűrűn előforduló folyamattal is foglalkozhatunk. A feladat *lényegében ugyanaz*, szinte nem is érdemes külön elemezni.

Minden rádiócsőben van egy elektronforrás — egy izzó volfrámszál, és egy pozitív töltésű lemez. A volfrám felületét elhagyó elektronok a lemez felé repülnek. Ez az az „ideális szivattyú”, amely állandóan „elszívja” az elektronokat. Felmerül a kérdés: másodpercenként hány elektron hagyja el a volfrámszálat, és ez a szám hogyan változik a hőmérséklet függvényében? A feladat megoldása ugyancsak a (42.5) összefüggés. Egy fémdarabban ugyanis az elektronok köteve vannak a fém ionjaihoz vagy atomjaihoz, durván szólva a fémhez. Az elektron „leszakításához” tehát valamekkora energia szükséges, azaz munkát kell végezni. Ez a munka különböző fémek esetén más és más, sőt adott fajtájú fém esetén is a felület jellegétől függően változik. A kilépéshez szükséges munka nagysága néhány elektronvolt, amely éppen a kémiai reakciókra jellemző érték. (Meggjegyezzük, hogy egy kémiai feszültségforrás, pl. egy villanólámpa telepének feszültsége 1 V nagyságrendű.)

Hogyan határozhatjuk meg a fémből másodpercenként kilépő elektronok számát? Az elektronok kilépését befolyásoló minden hatást elég nehéz lenne számításba vennünk, könnyebb lesz, ha a feladatot másképpen oldjuk meg. Induljunk ki abból az elképzelésből, hogy az elektronokat nem tudjuk elszívni, mert gázatomokként viselkednek és vissza tudnak térni a fémbe. Így létrejön egy adott értékű egyensúlyi elektronsűrűség, amelyet természetesen azonos formula határoz meg (42.1)-gyel, ahol V_a erős közelítéssel a fémben egy elektron által elfoglalt térfogat és $W = q_e \varphi$. A φ mennyiség az ún. *kilépési munka*, ill. az a potenciálkülönbség, amely egy elektronnak a fémfelületből való kilépéséhez szükséges. Ez az összefüggés határozza meg, hány elektronnak kell a környező térben tartózkodnia, és a fémbe ütköznie ahhoz,

hogy pótlódjék az az energia, amely az elektronok kilépéséhez volt szükséges. Könnyű tehát kiszámolni, hány elektron lép ki a fémből, feltételezve, hogy állandóan elszívjuk őket. A kilépő elektronok száma ugyanis pontosan egyenlő azon elektronok számával, amelyeknek be kellene lépniük a fémbe, ha létezne a (42.1) összefüggéssel megadott sűrűségű „elektrongózz”. Más szavakkal: az segítségny felületre beérkező elektromos áram egyenlő a töltésnek és a felületegységen 1 s alatt áthaladó elektronok számának a szorzatával. Az utóbbi mennyiség viszont a térfogategységen levő elektronok számának és a sebességnek a szorzata:

$$I = q_e n v = \left(\frac{q_e v}{V_a} \right) e^{-q_e \varphi / kT}. \quad (42.6)$$

Ha a hőmérséklet 11 600 K, akkor kT egyenlő 1 eV-tal. A rádiólámpa izzószála kb. 1100 K-os, ezért az exponenciális szorzófaktor értéke kb. e^{-10} . A hőmérséklet kis megváltoztatása tehát az exponenciális faktor értékének nagy megváltozását okozza. Ez ismét alapvető tulajdonsága az $e^{-q_e \varphi / kT}$ kifejezést tartalmazó összefüggésnek. Az exponenciális előtti tényező lényegében nem jó, hiszen az elektronok viselkedését valamely fémbe nem a klasszikus mechanika, hanem a kvantummechanika írja le helyesen. A kvantummechanika alapján kiszámolt tényező azonban alig különbözik valamit az általunk használttól. Valójában eddig még senki sem tudta ezt a tényezőt pontosan kiszámolni, annak ellenére, hogy sokan kvantummechanikai képletekkel is próbálkoztak. A nagy kérdés az: változik-e W — akárcsak kevésbé is — a hőmérséklettel? Ha igen, akkor a hőmérséklettel lassan változó W -t nem lehet megkülönböztetni egy másik, az exponenciális előtti szorzótényezőtől. Ha W mondjuk lineárisan változik a hőmérséklettel, azaz $W = W_0 + \alpha kT$, akkor

$$e^{-W/kT} = e^{-(W_0 + \alpha kT)} = e^{-\alpha} e^{-W_0/kT}.$$

Azt látjuk, hogy W -nek ezen lineáris hőmérsékletfüggése egy megváltozott „állandóval” egyenértékű.

42.3 Termikus ionizáció

Most áttérünk ugyanennek a gondolatnak egy további alkalmazására. Az ionizációról lesz szó. Tegyük fel, hogy valamely gáz igen nagy mennyiségű atomot tartalmaz, amelyek általában semlegesek, ha azonban a gázt felhevítjük, ionizálódhatnak. Azt szeretnénk tudni, hogy adott körülmények, az adott térfogategységenkénti atomsűrűség és meghatározott hőmérséklet esetén hány ion keletkezik. Képzeljünk el ismét egy dobozt, amelyben N atom van. Adott időpontban legyen a semleges atomok száma térfogategységenként n_a , az ionok száma n_i , az elektronok száma pedig n_e . Kérdésünk a következő: mi az összefüggés e három szám között?

Mindenekelőtt két körülménynek, ill. feltételnek kell rájuk nézve teljesülni. Például, az $n_a + n_i$ -nek a körülmények, a hőmérséklet stb. változtatásával mindig állandónak kell maradnia, mivel ez a mennyiség egyszerűen a dobozban levő atomok száma, vagyis N . Ha a térfogategységenkénti atommagok számát állandónak tartjuk és megváltoztatjuk mondjuk a hőmérsékletet, akkor bár az ionizáció eredményeként néhány atom ionná alakul, az atomok és az ionok teljes száma változatlan marad. A másik feltétel onnan származik, hogy ha az egész gáz elektromosan semleges (és ha elhanyagoljuk a dupla, ill. tripla ionizációt), akkor az ionok száma mindig egyenlő az elektronok számával, vagyis $n_i = n_e$. Ezek a kiegészítő feltételek egyszerűen a töltésmegmaradást és az atomok megmaradását fejezik ki.

Ezek az egyenletek igazak, és gyakorlati feladatok megoldásakor mindig használjuk őket. A fenti mennyiségek között azonban valamilyen más összefüggést szeretnénk találni. Ennek módja a következő: Kövessük ismét azt a gondolatmenetet, hogy az elektronok az atomból való kiszakításához bizonyos mennyiségű energia szükséges, amelyet *ionizációs energiának* nevezünk, és (azért, hogy az összes képlet hasonlóan nézzen ki) W -vel jelölünk. A „gőzben” levő térfogategységenkénti szabad elektronok száma.

egyenlő: a térfogategységenkénti, atomokban kötött elektronok száma szorozva a kötött és a szabad elektronok energiakülönbsége és kT hányadosának exponenciálisával. Ez ismét az alapegyenlet, de hogyan írjuk le? A térfogategységenkénti szabad elektronok száma n_e . No, és mit lehet mondani a térfogategységenkénti atomokhoz kötött elektronok számáról? Azoknak a helyeknek a száma, ahol elektronok lehetnek nyilvánvalóan $n_a + n_i$, és feltételezzük, hogy amikor minden elektron kötött, mindegyikükhöz egy bizonyos V_a térfogat tartozik. Tehát a kötött elektronok rendelkezésére álló térfogat $(n_a + n_i)V_a$, és így képletünk most a következő alakba írható:

$$n_e = \frac{n_a}{(n_a + n_i)V_a} \cdot e^{-W/kT}.$$

A képlet azonban nem jó, mégpedig a következő lényeges tulajdonság miatt: ha egy elektron az atomba beépült, egy újabb elektron már nem kerülhet ugyanebbe a térfogatba! Más szavakkal az olyan elektronnak, amelyik azt fontolgatja, vajon gőzállapotban maradjon-e vagy kondenzálódjon, nincs lehetősége teljesen szabad választásra. Az elektron n_i nem mehet arra a helyre, ahol már egy másik elektron tartózkodik. A már elfoglalt térfogatok a teljes rendelkezésre álló térfogatba nem számítanak bele. Csak az *ionokra* vonatkozó térfogatok lehet olyan üres helyeknek tekinteni, ahová az elektronok bejuthatnak. Ezt a körülményt tekintetbe véve képletünk pontosabb alakja:

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{1}{V_a} e^{-W/kT}. \quad (42.7)$$

Ez a *Saha-féle ionizációegyenlet*. Nézzük meg, vajon a folyamat kinetikájának nyomon követésével a képlet helyessége belátható-e. Újra és újra amikor egy elektron valamely ion közelébe kerül, az elektron és az ion atommá egyesül, rekombinálódik. Ugyancsak időről időre az ütköző atomok elektronra és ionra bomlanak szét. Nos, a két folyamat sebességének egyenlőnek kell lennie. Milyen gyorsan találják meg az elektronok és az ionok egy-

mást? A találkozások nyilvánvalóan gyakoribbá válnak, ha a térfogategységben levő elektronok vagy ionok száma megnő. Ebből az következik, hogy a rekombináció teljes gyakorisága arányos az elektronok és az ionok számának szorzatával. Továbbá, az ütközési ionizáció teljes gyakoriságának lineárisan kell függnie az ionizációra képes atomok számától. Ilyen módon a két folyamat sebessége akkor lesz egyensúlyban, ha meghatározott kapcsolat alakul ki az $n_e n_i$ szorzat és az atomok n_a száma között. Az a tény, hogy ezt a kapcsolatot épp a (42.7) képlet fejezi ki, több információt ad, mint az előző hasonló formuláink. Könnyen megérthetjük azonban, hogy a képleteknek okvetlenül tartalmazniuk kell az elektronok, ionok és atomok koncentrációját $n_e n_i / n_a$ formában. Ez olyan állandó, amely az n -ektől független, csak a hőmérséklettől, az atomi hatáskeresztmetszetektől és más állandóktól függ.

Megjegyezhetjük még, hogy mivel az egyenlet a *térfogategységenkénti* részecskeszámokat tartalmazza, ha két kísérletet végeznénk adott $N = n_i + n_a$ számú atommal és ionnal, de különböző térfogatú dobozokat használnánk, akkor az n -ek kisebbek lennének a nagyobb dobozban. Mivel azonban az $n_e n_i / n_a$ arány állandó marad, az elektronok és ionok *együttes számának* nagyobbnak kell lennie a nagyobb dobozban. Hogy erről meggyőződjünk, tételezzük fel, hogy N mag van egy V térfogatú dobozban és ezek f -ed része ionizált. Ekkor $n_e = fN/V = n_i$ és $n_a = (1-f)N/V$, egyenletünk tehát a következő alakú lesz:

$$\frac{f^2 N}{1-fV} = \frac{e^{-W/kT}}{V_a}. \quad (42.8)$$

Más szavakkal, ha egyre csökkentjük az atomok sűrűségét vagy növeljük a doboz térfogatát, az elektronok és ionok f hányadának növekednie kell. Az a tény, hogy az ionizáció egyszerűen „expánzió” következménye lehet — amelynek során a sűrűség csökken —, magyarázatot ad a következőkre: Ha nagyon kicsi a sűrűség (mint pl. a hideg, csillagközi térben), akkor is léteznek ionok, bár ez, a

rendelkezésre álló energiát tekintve, nehezen érthető. Miért léteznek ionok, ha nagy tér van körülöttük, és miért igyekeznek eltűnni, ha növeljük a sűrűséget? Nos, tekintsünk egy atomot! Időről időre foton, másik atom, ion vagy bármi, ami a termikus egyensúlyt fenntartja, az atomba ütközik. Nagyon ritkán, mivel ehhez óriási energiátöbblet kell, elektron válik ki az atomból, és az atom ionná alakul. Ha mármost a tér igen nagy, az elektron sokat vándorol, évek is eltelnek talán, és semmivel sem találkozik. Egyszer azonban talál egy iont és akkor azzal egyesülve, atomot hoz létre. A sebesség, amellyel atomokból elektronok keletkeznek, nagyon kicsiny. Ha azonban a térfogat nagy, akkor egy, az atomot elhagyó elektron oly sokára talál egy iont, mellyel rekombinálódni tud, hogy ennek valószínűsége igen-igen kicsivé válik; ezért annak ellenére, hogy az ionizációhoz nagy energiátöbblet szükséges, az elektronok száma elég nagy lehet.

42.4 Kémiai reakciók kinetikája

Ugyanezek a jelenségek, amelyeket az imént ionizációnak neveztünk, kémiai reakciókban is megtalálhatók. Ha pl. két anyag A és B , egy AB -vé alakul, akkor egy kicsit utánagondolva beláthatjuk, hogy elnevezéseik alapján, AB lényegében az atom, B az elektron és A az ion. Ilyen helyettesítés után az egyensúlyi egyenletek alakjukra nézve tökéletesen azonosak:

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = c e^{-W/kT}. \quad (42.9)$$

Ez a képlet természetesen nem pontos, mivel a c , „állandó” függ pl. attól, hogy az A és B egyesülésére mekkora térfogat áll rendelkezésre és más egyébtől is. A termodinamika segítségével azonban megadható a kitévőben szereplő W jelentése, és ekkor kiderül, W a reakcióhoz szükséges energiával szoros kapcsolatban van.

Próbáljuk meg ezt a formulát a részecskék ütközése alapján megérteni, körülbelül úgy,

mint ahogyan a párolgásra vonatkozó képletet értelmeztük, az egységnyi idő alatt létrejövő és eltűnő elektronok számának meghatározása segítségével. Tegyük fel, hogy valahányszor A és B ütközik, kialakul egy AB rendszer. Tételezzük fel továbbá, hogy az AB rendszer bonyolult molekula, amely ide-oda mozog, más molekulákkal ütközik, és időnként elég energiát kap ahhoz, hogy felrobbanva ismét A és B -vé hasadjon szét.

Az A és B atomok kis energiájú ütközése még akkor sem jelentené feltétlenül az $A+B \rightarrow AB$ reakció kezdetét, ha ütközéskor energia szabadulna fel. Ahhoz, hogy a reakció egyáltalában meginduljon, az ütközésnek elég „keménynek” kell lennie. A kémiai reakciók általános követelménye, hogy A -nak és B -nek AB -vé egyesüléséhez *elegendő energiával kell rendelkeznie*. Ezt az energiát *aktivációs energiának* nevezik, azaz olyan energiának, amely a reakció „aktiválásához” szükséges. Jelölje A^* azt az energiátöbbletet, amely feltétlenül szükséges ahhoz, hogy az ütközés ténylegesen reakcióhoz vezessen. Jelölje R_e azt a sebességet, amellyel A és B -ből AB keletkezik. R_e -nek tartalmaznia kell az A és B atomok számának, valamint annak a gyakoriságának a szorzatát, amellyel egy atom eltalál egy σ_{AB} nagyságú keresztmetszetet, s ezt meg kell szorozni az $e^{-A^*/kT}$ tényezővel (amely annak a valószínűsége, hogy az atomok elegendő energiával rendelkeznek). Ez képletben:

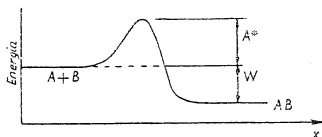
$$R_e = n_A n_B \sigma_{AB} e^{-A^*/kT}. \quad (42.10)$$

Nézzük most a fordított (visszafelé irányuló) folyamat sebességét, az R_v -t. Van bizonyos valószínűsége annak, hogy AB ismét szétváljon. Ehhez nemcsak a külön-külön létezéshez szükséges W energiát kell megszerezniük, hanem — éppúgy, mint az egyesüléskor — bizonyos többletet is. Az egyesülés és szétválás olyasféléhez hasonló, mint amikor egy mély völgybe csak úgy juthatunk, ha előbb felkapaszkodunk egy dombra. Visszafelé a völgyből újra fel kell kapaszkodni a dombra, átmenni rajta, és csak ezután jutunk vissza a kiindulási helyzetbe (42.1 ábra). AB -nek A -ba és B -be való átalakulási sebessége arányos a



pillanatnyilag jelenlevő AB molekulák n_{AB} számának és az $e^{-(W-A^*)/kT}$ mennyiségnek a szorzatával:

$$R_v = c' n_{AB} e^{-(W+A^*)/kT}. \quad (42.11)$$



42.1 ábra. Az $A+B \rightarrow AB$ reakcióra vonatkozó energiaösszefüggés

c' az atomok térfogatát és az ütközések gyakoriságát tartalmazza. Utóbbit ugyanúgy számíthatjuk ki, mint párolgás esetén, vagyis a területek, az idők és a rétegvastagságok segítségével. Most azonban jobban érdekel bennünket az, hogy ha ezek a sebességek egyenlők, arányuk egységnyi. Ez pedig annyit jelent, hogy $n_{ANB}/n_{AB} = ce^{-W/kT}$, éppúgy, mint az előbb. A képletben c keresztmetszeteket, sebességeket és más, az n -ektől független faktorokat tartalmaz.

Érdekes, hogy a reakciósebesség szintén az $e^{-\text{konst.}/kT}$ függvény szerint változik, de ez az állandó semmilyen kapcsolatban sem áll azzal, amellyel a koncentrációkra vonatkozó példánkban találkoztunk; az A^* aktivációs energia a W energiától teljesen különböző. A W energia szabályozza az A , B és AB egyensúlyi arányát. Ha azonban azt akarjuk tudni, hogy $A+B$ milyen gyorsan megy át AB -be, akkor a W már nem lesz kapcsolatban az egyensúllyal. Ilyenkor egy másfajta energia jelenik meg, az aktivációs energia, amely mint exponens szabályozza a reakció sebességét.

A^* nem olyan alapvető állandó, mint W . Tegyük fel, hogy pl. egy edény falán A és B sokkal könnyebben egyesül AB -vé, mint másutt. Más szavakkal: találtunk a dombon keresztülhaladó „alagutat”, vagy talán alacsonyabb dombot. Az energiamegmaradás következtében bármilyen módon is jön létre A -ból és B -ből AB , a W energiakülönbség teljesen független attól az úttól, amelyen a reakció lejátszódik. Az A^* aktivációs energia azon-

ban erősen függ tőle. Ez az oka annak, hogy a kémiai reakciók sebessége nagyon érzékeny a külső körülményekre. A reakcióba lépő anyagokkal érintkező felületet kicserélve, a sebességet megváltoztathatjuk; „más edénybe” tehetjük a reagenseket, és a reakció — ha függ a felület tulajdonságaitól — más sebességgel zajlik le. Bizonyos anyagokat a reakcióba lépő anyagok közé helyezve, egyszerűen A^* értékének kis megváltoztatásával a reakció sebességének óriási változásait idézik elő. Ezeket az anyagokat *katalizátoroknak* nevezzük. Megtörténhet, hogy egy reakció egyáltalában nem játszódik el, mivel adott hőmérsékleten A^* értéke túl nagy; ha azonban hozzáadjuk ezt a speciális anyagot, a katalizátort, amely A^* -ot lecsökkenti, akkor a reakció igen gyorsan végbemegy.

Megjegyezzük, hogy $A+B \rightarrow AB$ típusú reakciók magyarázata valójában nem ilyen egyszerű. Nem maradhat meg ugyanis egyszerűen az energia és az impulzus is, amikor megpróbálunk két anyagot úgy egyesíteni, hogy belőlük egy sokkal stabilabb legyen. Ehhez legalább egy harmadik, C anyag is szükséges, emiatt a tényleges reakció sokkal bonyolultabb. Az egyik irányba végbemenő reakció sebességének tartalmaznia kell az $n_{ANB}n_C$ szorzatot, s így azt gondolhatnánk, hogy képeltünk pontatlanná válik. Ez azonban nincs így! Ha ugyanis megvizsgáljuk AB szétválási reakciójának a sebességét, azt találjuk, hogy ennek a molekulának szintén ütköznie kell C -vel, tehát az $n_{ANB}n_C$ szorzatnak szerepelnie kell a fordított irányú reakciósebesség kifejezésében is. Így az egyensúlyi koncentrációra vonatkozó összefüggésből az n_C kiesik. Az először felírt (42.9) egyensúlytörvény tehát mindig helyes, bármilyen is legyen a reakció mechanizmusa.

42.5 Einstein-féle sugárzási törvények

Most áttérünk egy, az imént ismertetetthez hasonló, a feketetest sugárzási törvényével kapcsolatos feladatra. A 41.3 szakaszban az oszcillátorsugárzás figyelembevételével

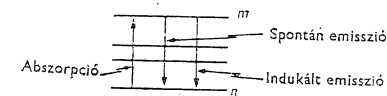
— Planck nyomán — levezettük az üregben levő sugárzás eloszlási törvényét. Az oszcillátornak meghatározott átlagos energiája volt, és rezgése következtében állandóan sugárzást táplált az üregbe, míg ott annyi sugárzás nem halmozódott fel, amennyi a sugárzás és az elnyelés közötti egyensúly fenntartáshoz szükséges. Azt találtuk, hogy az ω frekvenciájú sugárzás intenzitása:

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (42.12)$$

Az eredmény azt a feltevést tartalmazza, hogy a sugárzást kelető oszcillátornak meghatározott, egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő energiaszintjei vannak. Nem beszéltünk arról, hogy a fénynek a fotonokból, vagy más ehhez hasonló természetű dolgokból kell állnia. Nem tárgyaltuk meg azt sem, hogy miképpen bocsátja ki az atom az energiát fény alakjában, amikor egyik energiaszintről a másikra átugrik. Planck eredeti elképzelése az volt, hogy az anyag kvantált, de a fény nem: az anyagi oszcillátorok nem tudnak felvenni tetszőleges mennyiségű energiát, hanem csak energiaadagokat. Felmerült még az a kifogás is, hogy a levezetés voltaképpen „félklasszikus”. Az oszcillátor sugárzási sebességét ugyanis a klasszikus fizika törvényei alapján számoltuk ki, majd elfeledtünk erről, s azt mondtuk: „Az oszcillátornak nagyszámú energiaszintje van.” Ennek szigorúan kvantummechanikai levezetéséhez azonban még hosszú út vezetett. A munka 1927-ben a kvantummechanika megalkotásával fejeződött be. Közben azonban Einstein megkísérelte Planck álláspontját — miszerint csak az anyagi oszcillátorok kvantáltak — átalakítani és arra a gondolatra jutott, hogy valójában a fény is kvantált, és bizonyos értelemben $\hbar\omega$ energiájú részecskékből álló gáznak lehet tekinteni. Bohr kimutatta azt is, hogy bármely atomokból álló rendszernek energiaszintjei vannak, a szintek között levő távolság azonban nem szükségképpen állandó, mint ahogy azt Planck feltételezte. Szükségessé vált tehát, hogy a sugárzási törvényt a sokkal követ-

kezetesebb kvantummechanikai szempontok alapján ismételen levezessék vagy legalábbis alaposabban megvizsgálják.

Einstein Planck végképletét helyesnek tette fel, és segítségével a sugárzásnak a (kémiai) anyaggal történő kölcsönhatásáról néhány új, korábban még nem ismert információt kapott. Gondolatmenete a következő volt: az atom sok energiaszintje közül tekintsünk kettőt, mondjuk az m -edik és az n -edik szintet (42.2 ábra). Amikor az atomot megfelelő frekvenciájú fény világítja meg, az atom a fotonot abszorbeálhatja, miközben n állapotból m állapotba megy át. Az ilyen átmenet 1 s alatti be-következésének valószínűsége arányos az atomot megvilágító fény intenzitásával és természetesen függ a választott két energiaszinttől.



42.2 ábra. Az atom két energiaszintje közötti átmenetek

Jelöljük az arányossági állandót B_{nm} -mel, arra utalva, hogy nem univerzális természeti állandó, hanem függ a kiválasztott szintpároktól: egyes szintek könnyen, mások viszont nehezen gerjeszthetők. Most megkeressük az m -ből n -be való átmenet sebességét leíró képletet. Einstein feltételezése szerint ennek két részről kell állnia. Még ha nem volna külső megvilágítás, akkor is lenne bizonyos valószínűsége annak, hogy egy gerjesztett állapotban levő atom alacsonyabb állapotba menjen át, miközben fotonot emittál. Ez az ún. *spontán emisszió*. A feltételezés hasonló ahhoz az elképzeléshez, hogy valamely meghatározott energiájú oszcillátor még a klasszikus fizika szerint sem tartja meg ezt az energiát, hanem sugárzás útján elveszti. Egy klasszikus rendszer spontán sugárzásához hasonlóan, meghatározott A_{mn} valószínűsége van annak, hogy az atom az m -ből n állapotba menjen át, és ez a valószínűség — amely ismét csak függ a választott energiaszintektől — független attól, megvilágítja-e az atomot fény vagy sem.

De Einstein még tovább ment, és a klasszikus elmélettel való összehasonlítás és más érvek alapján arra következtetett, hogy a sugárzás függ a környező fénytől. Amikor ui. valamely atomot megfelelő frekvenciájú fény világít meg, a fotonkibocsátás sebessége a fényintenzitással arányosan megnő, ahol az arányossági állandó B_{mn} . Ha sikerülne megmutatni, hogy ennek az együtthatónak az értéke zérus, akkor ez azt bizonyítaná, hogy Einstein téved. Természetesen be kell majd látnunk, hogy nem tévedett.

Einstein tehát feltételezte, hogy háromféle folyamat létezik:

- fényintenzitással arányos abszorpció,
- fényintenzitással arányos emisszió, amelyet *indukált* vagy időnként *stimulált emisszió*-nak neveznek,
- fényintenzitástól független, spontán emisszió.

Tegyük fel, hogy T hőmérsékleten, adott N_n számú n állapotban levő és N_m számú m állapotban levő atom egyensúlyban van. Ekkor az n -ből m -be átmenő atomok teljes száma egyenlő az n állapotban levők számának és egy atom n állapotból m -be való átmenete sebességének a szorzatával. Ily módon a másodpercenként n -ből m -be átmenő atomok száma:

$$R_{n \rightarrow m} = N_n B_{nm} I(\omega). \quad (42.13)$$

Az m -ből n -be átmenő atomok száma pontosan ugyanilyen módon fejezhető ki: az m állapotban levő atomok számát, N_m -et szorozni kell egy atom n állapotba való másodpercenkénti átmenetének valószínűségével:

$$R_{m \rightarrow n} = N_m [A_{nm} + B_{mn} I(\omega)]. \quad (42.14)$$

Most feltételezzük, hogy termikus egyensúly esetén a magasabb szintre jutó atomok számának egyenlőnek kell lennie az alacsonyabb szintre kerülőkével. Ez végső soron az egyik módja annak, hogy az atomok száma minden szinten biztosan állandó maradjon*. Egyensúly esetén tehát a két átmenet sebességét egyenlőnek tekintjük. Rendelkezésünkre áll azonban további információ is: tudjuk, hogy N_m hányszor nagyobb mint N_n , hányado-

suk ugyanis $e^{-(W_m - W_n)/kT}$. Einstein feltételezése szerint azonban $n \rightarrow m$ átmenetet csak olyan fény képes előidézni, amelynek a frekvenciája megfelel az energiakülönbségnek, úgyhogy összes kifejezéseikben $W_m - W_n = \hbar\omega$. Így

$$N_m = N_n e^{-\hbar\omega/kT}. \quad (42.15)$$

Tehát, ha a két sebességet egyenlővé tesszük: $N_n B_{nm} I(\omega) = N_m [A_{nm} + B_{mn} I(\omega)]$ és N_m -mel elosztjuk, azt kapjuk, hogy

$$B_{nm} I(\omega) e^{\hbar\omega/kT} = A_{nm} + B_{mn} I(\omega). \quad (42.16)$$

Az egyenletből $I(\omega)$ -t kiszámíthatjuk:

$$I(\omega) = \frac{A_{nm}}{B_{nm} e^{\hbar\omega/kT} - B_{mn}}. \quad (42.17)$$

Planck azonban már megmutatta, hogy a képletnek (42.12) alakúnak kell lennie. Ennek alapján tehát azt a következtetést lehet levonni, hogy B_{nm} -nek egyenlőnek kell lennie B_{mn} -nel, különben nem kapnánk meg az $(e^{\hbar\omega/kT} - 1)$ mennyiséget. Einstein — mint látjuk — felfedezett néhány olyan összefüggést, amelyet közvetlenül nem tudott levezetni, pl. hogy az *indukált emisszió valószínűségének és az abszorpció valószínűségének egyenlőnek kell lennie*. Ez nagyon érdekes. Továbbá, a (42.17) és (42.12) összefüggések megegyezéséhez szükséges, hogy:

$$\frac{A_{nm}}{B_{mn}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2}. \quad (42.18)$$

Ez azt jelenti, hogy ha ismert pl. egy adott energiaszintre vonatkozóan az abszorpció sebessége, akkor ki lehet számítani a spontán emisszió és az indukált emisszió sebességét, ill. e mennyiségek bármely kombinációját is.

Ilyen általános feltételezések alapján sem Einstein, sem mások nem jutottak tovább. Hogy ténylegesen ki lehessen számolni a spontán emisszió abszolút sebességét vagy általá-

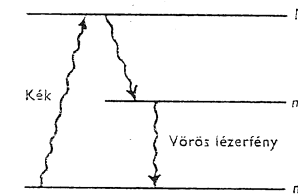
* Bár nem ez az egyetlen mód, amellyel az atomok száma a különböző energiaszinteken állandónak tartható, a természetben ténylegesen ez fordul elő leggyakrabban. Termikus egyensúly esetében minden folyamatot ki kell egyensúlyoznia pontos ellentettjének; ez az ún. *részletes egyensúly elve*.

ban bármely specifikus atomi átmenetre vonatkozó sebességet, ismerni kell az atom egész működési mechanizmusát. Ezt az ún. kvantumelektrodinamika írja le, amelyet csak 11 évvel Einstein ezen 1916-ban írt munkája után fedeztek fel.

Az indukált emisszióknak napjainkban érdekes alkalmazása van. A fény lefelé irányuló átmenetet igyekeznek létrehozni. Az átmenet ekkor — természetesen, ha léteznek olyan atomok, amelyek a felső energiaszinten vannak — a rendelkezésre álló fényenergiához képest a maga $\hbar\omega$ -ját hozzáadja. Nemtermikus módszerrel elérhetjük, hogy valamely gázban az m állapotban levő atomok száma sokkal nagyobb legyen, mint az n állapotban levőké.

A gáz ekkor nagyon messze lesz az egyensúlytól, így reá — a csak egyensúlyra érvényes — $e^{-\hbar\omega/kT}$ kifejezést nem alkalmazhatjuk. Sőt azt is elérhetjük, hogy a magasabb energiaállapotban levő atomok száma igen nagy, ugyanakkor az alacsony energiaállapotban levők száma gyakorlatilag zérus legyen. Ekkor a $W_m - W_n$ energiakülönbségnek megfelelő frekvenciájú fény nagyon gyengén abszorbeálódik, mivel az őt abszorbeálni képes n állapotban levő atomok száma nagyon kevés. Másrészt, amikor ilyen atomokból álló gázt megvilágítunk, a fény erről a felső szintről emissziót indukál (42.3 ábra)! Tehát, ha már a magasabb állapotban sok atom tartózkodik, akkor bizonyos fajtájú láncreakció kezdődik abban a pillanatban, amikor az atomok sugározni kezdenek; sőt az atomok kényszerítve vannak arra, hogy sugározzanak és az összes atom egyszerre esik le az alacsonyabb állapotba. Így működik a lézer vagy infravörös sugarak esetén a mézer.

Csak különböző trükkös eljárásokkal lehet



42.3 ábra. Kék fényvel való gerjesztés révén az atom a magasabb h állapotba kerül, ahonnan foton bocsátva ki, m állapotba megy át. Amikor az m állapotban levő atomok száma elég nagy, a lézerműködés megindul

elérni azt, hogy az atomok m állapotba kerüljenek. Egyes magasabb energiaszintekre úgy lehet felvinni az atomokat, hogy pl. erős, nagyfrekvenciájú fénynyalábbal világítjuk meg őket. Ezekről a magasabb szintekről az atomok fotonokat kibocsátva fokozatosan leeshetnek, amíg mind el nem éri az m állapotot. Ha arra törekszenek, hogy fotonkibocsátás nélkül m állapotban maradjanak, akkor az állapotot *metastabilnak* nevezzük. Innen indukált emisszió révén aztán egyszerre mennek át az alacsonyabb szintre. Helyezzük a rendszert egy dobozba, ekkor az indukált effektust megnöveli és hatékonyságát fokozza az, ha a doboz minden oldalát egy-egy, csaknem tökéletesen visszaverő tükrökből készítjük. Ekkor ugyanis többszörös fényvisszaverődés miatt nagyobb az emisszió valószínűsége. Bár a tükrök csaknem száz százalékosan tükröznek, azért mégis van egy kis valószínűsége annak, hogy a fény egy része kimenjen a dobozból. Végül is természetesen az energiamegmaradás következtében az összes fény egy meghatározott irányban vékony, erős sugárzás formájában lép ki a dobozból. Így hozhatnak létre erős fénysugarakat a lézerekben.

43 A diffúzió

43.1 A molekulák közötti ütközések

A molekulák mozgását eddig csak termikus egyensúlyban levő gázban vizsgáltuk. Foglalkozunk most olyan gázzal, amely nincs ugyan egyensúlyban, de közel van hozzá. Az egyensúlyi állapottól távol minden jelenség rendkívül bonyolult, az egyensúly közvetlen közelében viszont könnyebben leírhatjuk a gáz viselkedését. Ehhez azonban vissza kell térnünk a kinetikus elmélethez. A statisztikus mechanika és a termodinamika csak az egyensúlyi állapottal foglalkozik, ha azonban a vizsgált állapot eltér ettől, akkor úgyszólván atomonként kell nyomon követnünk a folyamatot.

A nemegyensúlyi állapotra egyszerű példa az *ionok diffúziója gázokban*. Foglalkozunk most ezzel a jelenséggel. Tegyük fel, hogy a vizsgált gázban az ionok — elektromosan töltött molekulák — koncentrációja kicsi. Ha a gázra elektromos teret kapcsolunk, akkor az ionokra más erő hat, mint a gáz semleges molekuláira. Ha a többi molekula nem lenne ott, akkor az ionok állandó gyorsulással mozognának mindaddig, amíg el nem érik a tartály falánál levő elektródot, most azonban a többi molekula miatt ezt nem tehetik. Sebességük csak addig nő, amíg másik molekulával nem ütköznek; ekkor elvesztik impulzusukat, majd újra gyorsulni kezdenek és ütközéskor újra elvesztik. Az ionok bonyolult cikcakk pályán, de végső soron mégis az elektromos térerősség irányába mozdulnak el. Meglátjuk, hogy az ionoknak van egy átlagos vándorló („drift”) mozgása, amelynek átlagsebessége az elektromos térerősséggel arányos — minél

nagyobb a térerősség, annál gyorsabban halad az ion. Amíg a gáz elektromos térben van, és az ion mozog, addig az ion nyilvánvalóan *nincs* termikus egyensúlyban. A rendszer az egyensúlyi állapot felé törekszik, amelyben valamennyi ion az edény végén levő elektródon helyezkedik el. A kinetikus elmélet alapján a driftsebesség kiszámítható.

Jelenlegi matematikai ismereteink nem teszik lehetővé, hogy pontosan kiszámítsuk, mi történik; olyan *közelítő eredményekhez* azonban, amelyek a jelenség minden lényeges vonását helyesen mutatják, már most is eljuthatunk. Kiszámíthatjuk az egyes folyamatok nyomástól, hőmérséklettől és más mennyiségektől való függését, de nem tudjuk megadni az egyes tagok előtt álló numerikus együtthatók pontos értékét. Levezetéseinkben nem is bajlódunk az együtthatók pontos meghatározásával.

Mielőtt megvizsgálánánk, hogy mi történik az egyensúlyi helyzettől eltérő esetekben, kissé közelebről meg kell néznünk, hogy mi is megy végbe az egyensúlyban levő gázban. Így pl. meg kell határozni, hogy mekkora az átlagos időtartam egy molekula két egymásutáni ütközése között.

A gázmolekulák mozgásuk során gyakran ütköznek egymással, és az ütközések nyilvánvalóan véletlenszerűen következnek be. Egy kiszemelt molekula a hosszának feltételezett T idő alatt mondjuk N esetben ütközik. Ha az időtartamot kétszer akkorára választjuk, akkor az ütközések száma is kétszer akkora. Az ütközések száma tehát arányos a T idővel.

Írjuk fel ezt az összefüggést

$$N = \frac{T}{\tau} \quad (43.1)$$

alakban. Az arányossági tényezőt itt $1/\tau$ -val jelöltük, ahol a τ állandó az egymás utáni ütközések közötti átlagos idő. Ha pl. 1 h alatt 60 ütközés játszódik le, akkor $\tau = 1$ min. Így valóban azt mondhatjuk, hogy τ az ütközések közötti eített *átlagos idő*.

Gyakran szükségünk lehet arra, hogy válaszolni tudjunk a következőkre: „Mekkora annak a *valószínűsége*, hogy egy molekula a következő *kis dt időintervallumban* ütközzön fog?” Sejtethetjük, hogy a válasz: dt/τ . Próbáljuk ezt meggyőzőbb érvekkel is alátámasztani. Tegyük fel, hogy igen nagy számú, mondjuk N molekulánk van. Hány ütközik ezek közül a következő dt idő alatt? Egyensúlyi állapot esetén az *átlag* időben nem változik. Így N molekula dt idő alatt ugyanannyiszor ütközik, mint *egyetlen* molekula $N dt$ idő alatt. Egy molekula ütközéseinek száma viszont — mint tudjuk — $N dt/\tau$. Így az N molekula dt idő alatt szintén $N dt/\tau$ ütközést szenved el, egyetlen molekulára pedig az ütközés valószínűsége ennek N -ed része, vagyis $(1/N)(N dt/\tau) = dt/\tau$, mint sejtettük. Ez azt jelenti, hogy dt idő alatt a molekulák dt/τ hányada ütközik. Ha pl. $\tau = 1$ min, akkor 1 s alatt a részecskék 1/60-ad része ütközik. Ez természetesen azt jelenti, hogy a molekuláknak *éppen* az az 1/60-ad része ütközik a következő másodpercben, amely elég közel van az ütközésre váró molekulához.

Amikor azt mondjuk, hogy az ütközések közötti átlagos időtartam $\tau = 1$ min, ezen nem azt értjük, hogy az ütközések mindig pontosan egy perc múltával jönnek létre. Ha ugyanis figyelemmel kísérnénk egy részecske mozgását, akkor nem azt látnánk, hogy az ütközés után vár egy percig, majd ismét ütközik. Az egymás utáni ütközések közötti időtartam erősen változó. Bár a továbbiakban nem szükséges, most mégis teszünk egy kis kitérőt, hogy választ adhassunk egy kérdésre: „Mekkora *valójában* az ütközések közötti idő-

tartamok?” Tudjuk, hogy a most említett esetben az *átlagos* idő egy perc, de szeretnénk pl. ismerni annak valószínűségét is, hogy *két* percig nem következik be ütközés.

Választ keresünk tehát egy általános kérdésre: „Mi annak a valószínűsége, hogy egy molekula t ideig nem ütközik?” Egy önkényesen megválasztott időpillanatban — jelöljük ezt $t = 0$ -val — elkezdünk figyelni egy molekulát. A valószínűség kiszámításához meg kell vizsgálnunk, hogy mi történik a tartályban levő összes N_0 molekulával. A t idő elteltével ezek közül egyesek ütköztek, mások nem. Jelölje $N(t)$ azoknak a molekuláknak a számát, amelyek a t idő alatt *nem* szenvedtek ütközést. Természetesen $N(t)$ kisebb, mint N_0 . $N(t)$ értékét meg tudjuk határozni, hiszen ismerjük időbeli változását. Ha ugyanis tudjuk, hogy $N(t)$ molekula eljutott a t időig, akkor $N(t+dt)$, a $t+dt$ -ig ütközés nélkül eljutó molekulák száma éppen a dt idő alatt ütközött molekulák számával *kevesebb*, mint $N(t)$. A dt idő alatt ütközött molekulák számát az előzőekben megadott τ átlagos idő felhasználásával $dN = N(t)dt/\tau$ alakban fejezhetjük ki. Így a következő egyenletre jutunk:

$$N(t+dt) = N(t) - N(t) \frac{dt}{\tau} \quad (43.2)$$

A bal oldalon levő $N(t+dt)$ mennyiség a differenciálszámítás szabályai szerint $N(t) + (dN/dt)dt$ alakba írható. (43.2)-ből ezzel a helyettesítéssel

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau} \quad (43.3)$$

A dt időintervallumban ütköző molekulák száma tehát arányos az ütközésben még részt nem vett molekulák számával és fordítva arányos τ -val, az ütközések közötti átlagos időtartammal. A (43.3) egyenlet könnyebben integrálható, ha először átírjuk a

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\frac{dt}{\tau} \quad (43.4)$$

alakba. Mivel mindkét oldal teljes differenciál, az integrál

$$\ln N(t) = -\frac{t}{\tau} + \text{konst.}, \quad (43.5)$$

vagy ami ugyanazt jelenti:

$$N(t) = \text{konst.} \cdot e^{-t/\tau}. \quad (43.6)$$

Tudjuk, hogy az állandónak éppen N_0 -nak — a gáz összmolekula-számának — kell lennie, hiszen a $t = 0$ időpillanatban valamennyi molekula a „következő” ütközés előtt áll. Eredményünk tehát

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}. \quad (43.7)$$

Annak $P(t)$ valószínűségét, hogy t ideig nincs ütközés, $N(t)$ és N_0 hányadosként kapjuk:

$$P(t) = e^{-t/\tau}. \quad (43.8)$$

Eredményünk szerint tehát annak valószínűsége, hogy egy kiszemelt molekula t ideig nem ütközik, $e^{-t/\tau}$, ahol τ az ütközések közötti átlagos időtartam. Ez a valószínűség $t = 0$ -nál 1-ből (vagyis a biztos eseményből) indul ki és t növekedésével monoton csökken. Annak valószínűsége, hogy a molekula τ ideig nem ütközik, $e^{-1} = 0,37\dots$, tehát annak valószínűsége, hogy az ütközések között az átlagosnál hosszabb idő telik el, $1/2$ -nél kisebb. Ez nem jelent ellentmondást, hiszen elég sok molekula csak az átlagosnál sokkal *hosszabb* idő múlva ütközik, úgyhogy az átlagos idő ettől még lehet τ .

A τ állandót eredetileg az ütközések között eltelt átlagos időként definiáltuk. (43.7) szerint azonban egy *tetszőleges* időponttól a legközelebbi ütközésig eltelt átlagos idő *szintén* τ . Próbáljuk ezt a kissé meglepő tényt bizonyítani. Azon molekulák száma, amelyeknek egy tetszőlegesen választott $t = 0$ időpont utáni első ütközése a t és $t + dt$ időpontok között van, $N(t)dt/\tau$. A soron levő ütközésükig természetesen éppen t idő telik el. A „következő ütközésig eltelt átlagos idő” így a szokásos módon számolva:

$$\frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \frac{N(t) dt}{\tau}$$

Ha ide beírjuk $N(t)$ (43.7)-ben kapott alakját és kiszámítjuk az integrált, valóban azt kapjuk, hogy egy *tetszőleges* pillanattól az ütközésig eltelt átlagos idő éppen τ .

43.2 Az átlagos szabad úthossz

A molekulaütközések leírásának egy másik módszeréhez jutunk, ha az ütközések közötti *időtartam* helyett azt vizsgáljuk, hogy közben *milyen messze* jut a részecske. Ha az ütközések közötti átlagos időtartamot τ , a molekulák átlagsebességét pedig v jelöli, akkor az ütközések közötti átlagos távolság, amelyet l -vel jelölünk, éppen τ és v szorzata. Ezt az ütközések közötti l távolságot általában *átlagos szabad úthossznak* nevezzük:

$$l = v\tau. \quad (43.9)$$

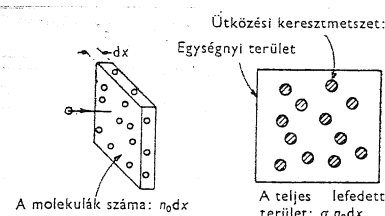
Ebben a fejezetben nem sokat törődünk azzal, hogy az egyes speciális esetekben pontosan *milyen átlagról* van szó. A különböző lehetséges átlagok — a számtani középérték, a négyzetes középérték négyzetgyöke stb. — közelítőleg megegyeznek, csupán egyhez közel álló szorzótényezőkben különböznek. Mivel a numerikus tényezők pontos értéke úgyszólván csak sokkal részletesebb vizsgálattal határozható meg, nem kell törődnünk azzal, hogy az egyes esetekben milyen átlag szerepel. Arra is felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy néhány fizikai mennyiséget nem az általánosan elfogadott szabványoknak megfelelően jelöltünk.

Mint ahogy dt/τ annak valószínűsége, hogy egy molekula dt idő alatt ütközik, a dx távolságon való ütközés valószínűsége dx/l . Az Olvasó a fentihez teljesen hasonló okoskodással beláthatja, hogy annak valószínűsége, hogy egy molekula első ütközése előtt legalább x utat tesz meg, $e^{-x/l}$.

Az az átlagos l távolság, amelyet egy molekula az ütközésig befut, függ a környező molekulák számától és „nagyágától”, vagyis attól, hogy azok mekkora céltáblának felelnek meg. Ezt az ütközési hatáskeresztmetszet-

tel jellemezhetjük, amelynek jelentése ugyanaz, mint a magfizikában vagy a fényszórásnál.

Kövessünk egy mozgó molekulát. Tegyen meg molekulánk dx utat egy olyan gázban, amelyben térfogategységenként n_0 szórócentrum (molekula) van (43.1 ábra). Kiválasztott részecskénk mozgási irányára merőlegesen ekkor minden egységnyi alapterületű, dx vastagságú rétegben $n_0 dx$ molekulát találunk. Ha mindegyiknek σ_c ütközési hatáskeresztmetszet felel meg, akkor a szórócentrumok által lefedett teljes felület $\sigma_c n_0 dx$.



43.1 ábra. Az ütközési hatáskeresztmetszet

Ütközési hatáskeresztmetszet az a terület, amelyen belül kell molekulánk középpontjának lenni ahhoz, hogy egy adott molekulával ütközhesen. Ha a molekulák kis gömbök lennének (klasszikus kép), azt várnánk, hogy $\sigma_c = \pi(r_1 + r_2)^2$, ahol r_1 és r_2 a két ütköző gömb sugarát jelöli. Annak valószínűsége, hogy részecskénk ütközik, a molekulák által lefedett terület és az egységnyinek tekintett teljes terület hányadosa. Eszerint

$$\text{a } dx \text{ úthosszon való ütközés valószínűsége} = \sigma_c n_0 dx. \quad (43.10)$$

Láttuk, hogy a dx úthosszon való ütközés valószínűségét az l átlagos szabad úthossz segítségével dx/l alakban is kifejezhetjük. Ezt a (43.10) képlettel egybevetve

$$\frac{1}{l} = \sigma_c n_0, \quad (43.11)$$

vagy a könnyebb megjegyezhetőség kedvéért más alakba írva:

$$\sigma_c n_0 l = 1. \quad (43.12)$$

E képlet szerint akkor jön létre átlagosan egy ütközés, ha a részecske olyan l vastagságú rétegen halad át, amelyben a molekulák *éppen* le tudnák fedni a teljes területet. Egy l hosszúságú, egységnyi alapterületű hengerben a szórócentrumok száma $n_0 l$; ha mindegyikük σ_c területet fed le, a teljes lefedett terület $n_0 l \sigma_c$, vagyis éppen egységnyi. A teljes terület természetesen *nincs* összefüggően lefedve, mivel egyes molekulák más molekulák mögött helyezkednek el. Emiatt bizonyos molekulák l -nél nagyobb távolságot is megtehetnek ütközés nélkül, csak *átlagosan* igaz, hogy a molekulák l úthossz befutása után ütköznek. Ha megmérjük az l átlagos szabad úthosszt, meghatározhatjuk a σ_c szórési hatáskeresztmetszetet, az így kapott értéket összehasonlíthatjuk az atomszerkezet részletes elméletén alapuló számítások eredményével is — ez azonban már egészen más témakör! Ne kalandozunk nagyon el, térjünk vissza a nemegyensúlyi állapotok vizsgálatához.

43.3 A driftsebesség

Most olyan molekulák mozgását szeretnénk leírni, amelyek valamilyen szempontból különböznek a gáz túlnyomó többségét alkotó molekuláktól. A továbbiakban a többséget alkotó molekulákat „háttérmolekuláknak”, az ezektől különbözőket pedig „speciális”, vagy röviden S molekuláknak nevezzük.

Egy molekula igen sokféle ok miatt lehet speciális. Lehet nehezebb, mint a háttérmolekulák, eltérhet tőlük kémiai felépítésében, vagy elektromos töltésű lehet. Eltérő jellemzőik következtében az S molekulákra más erők hatnak, mint a háttérmolekulákra. Az S molekulák viselkedését tanulmányozva megérthetjük azokat az alapvető hatásokat, amelyek az egyes jelenségekben hasonlóak. Néhány ilyen jelenség: a gázok diffúziója, ülepedés, centrifugális separáció stb.

Kezdjük az alapvető folyamattal: tegyük fel, hogy a háttérgázban levő S molekulára F specifikus erő hat (amely lehet pl. nehézségi vagy elektromos erő), de *emellett* hatnak rá a

háttérmolekulákkal való ütközések következtében kevésbé specifikus erők is. Feladatunknak azt tekintjük, hogy a molekula általános viselkedését írjuk le. Ha teljes részletességgel akarnánk mozgását figyelemmel kísérni, csak annyit látnánk, hogy a molekula, miközben újabb és újabb molekulákkal ütközik, rendszertelenül ide-oda száguldozik. Gondos megfigyelés után azonban megállapíthatjuk, hogy a molekula elsősorban mégiscsak az F erő irányában mozdul el. Azt mondhatjuk, hogy a véletlenszerű mozgásra egy vándorló mozgás (driftmozgás) szuperponálódik. Szeretnénk tudni, hogy a driftsebesség hogyan függ az F erőtől.

Kezdjük el egy S molekula megfigyelését egy tetszőleges időpillanatban, amely valószínűleg két ütközés közé esik. A korábbi ütközések hatására kialakult sebességhez képest ez alatt az idő alatt megnő a sebesség μ irányú komponense. Rövid (átlagosan τ) idő múlva a molekula ismét ütközik, s pályájának új szakaszára jut. Az ütközéskor új kezdősebességet kap, de az F erő okozta gyorsulása változatlan marad.

Az egyszerűség kedvéért először tételezzük fel, hogy S molekulánk minden ütközés után teljesen „új életet kezd”, azaz nem őrzi meg „emlékezetében”, hogy mennyire gyorsult fel előzőleg az F erő hatására. Ez a feltevés csak akkor helytálló, ha S molekulánk sokkal könnyebb a háttérmolekuláknál, ami általánosan természetesen nem igaz. Később foglalkozunk majd e feltevés „javított változatával” is.

Pillanatnyilag tehát feltesszük, hogy az S molekula sebessége minden ütközés után azonos valószínűséggel lehet bármilyen irányú. Mivel a kezdősebesség az eredő mozgáshoz nem járul hozzá, a továbbiakban nem is törődünk vele. A véletlenszerű mozgás sebességéhez mindig hozzáadódik egy F irányú sebesség, amelyet a molekula az utolsó ütközés óta vett fel. Mekkora átlagosan a sebességnek ez a része? Ez éppen az F/m gyorsulás (ahol m az S molekula tömege) és az utolsó ütközés óta eltelt átlagos idő szorzata. Az utolsó ütközés óta eltelt átlagos idő viszont ugyanakkora,

mint a következő ütközésig terjedő idő átlagos értéke, amelyet korábban τ -vel jelöltünk. Az F erőből származó átlagos sebesség természetesen éppen a driftsebesség, ezért

$$v_{\text{drift}} = \frac{F\tau}{m}. \quad (43.13)$$

Ez a vizsgált problémakör alapvető összefüggése. Bár τ pontos jelentésének meghatározása okozhat egy kis nehézséget, az alapvető folyamatot azonban képletünk leírja.

Mint látható, a driftsebesség arányos az erővel. Az arányossági tényezőnek egyelőre sajnos nincs általánosan elfogadott neve, különböző típusú erők esetén más-más nevet adnak neki. Elektromos feladatokban, ahol az erőt a töltés és a térerősség szorzataként írjuk fel ($F = qE$), a sebesség és az E elektromos térerősség közötti arányossági tényezőt általában „mozgékonyásnak” nevezik. A driftsebesség és az erő hányadosát a továbbiakban bármely erő esetén mozgékonyásnak fogjuk nevezni. Így teljes általánosságban írhatjuk:

$$v_{\text{drift}} = \mu F, \quad (43.14)$$

ahol a μ tényező a mozgékonyág. A (43.13) egyenletből

$$\mu = \frac{\tau}{m}. \quad (43.15)$$

A mozgékonyág tehát arányos az ütközések közötti átlagos időtartammal (nagyobb τ esetén kevesebb ütközés lassítja le a molekulát) és fordítva arányos a tömeggel (ha nagyobb a tehetetlenség, a molekula kisebb sebességre gyorsul fel két ütközés között).

Ahhoz, hogy éppen a (43.13)-ban helyesen szereplő numerikus együtthatót kapjuk, bizonyos óvatosságra van szükség. Bár nem akarjuk az Olvasót megzavarni, szeretnénk rámutatni arra, hogy meggondolásainkban vannak bizonyos finomságok, amelyek csak gondos és részletekbe menő vizsgálat után érzékelhetők igazán. Annak illusztrálására, hogy a látszat ellenére valóban vannak problémák, megismételjük a (43.13)-ra vezető érvelésünket egy teljesen meggyőző, de hibás úton.

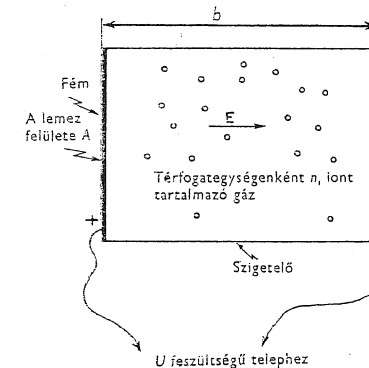
A következőt mondhatjuk: az ütközések közötti átlagos időtartam τ . A részecske minden ütközés után véletlenszerű sebességgel indul el, de a sebességhez még hozzáadódik az ütközések között felvett, a gyorsulás és idő szorzatával egyenlő sebesség. A részecske τ idő múlva ütközik ismét, ekkor sebessége $(F/m)\tau$. Az ütközés pillanatában a sebessége zérus. Így a két ütközés közötti átlagos sebessége a végső sebesség fele, tehát a driftsebesség $1/2 F\tau/m$ (hibás!). Ezzel az eredménnyel szemben, a (43.13) a helyes, bár érvelésünk mindkét esetben meggyőzőnek tűnik. A második levezetésnek hibája: feltételeztük, hogy az egymás utáni ütközéseket mindig τ idő választja el egymástól. A valóságban némelyik idő rövidebb, némelyik viszont hosszabb az átlagnál. A rövid idők gyakrabban fordulnak elő, de kisebb mértékben befolyásolják a driftsebességet, mivel ezalatt a részecske nem tud eléggé felgyorsulni. Az ütközések közötti időtartamok eloszlását figyelembe véve megmutathatjuk, hogy valóban nem lép fel a második meggondolásunkban kapott $1/2$ tényező. A hibát akkor követtük el, amikor félrevezetően egyszerűsítve akartuk megkeresni az átlagos végső sebesség és az átlagsebesség kapcsolatát. Ez a kapcsolat azonban bonyolultabb, ezért jobb, ha figyelmünket magára az átlagsebességre összpontosítjuk. Most már talán az is világossá vált minden Olvasónk előtt, hogy általában miért nem kívánunk elemi levezetéseinkben valamennyi numerikus együttható pontos meghatározására törekedni!

Térjünk most vissza arra az egyszerűsítő feltevésünkre, hogy a molekulák „emlékezetéből” minden ütközés egész korábbi mozgásuk emlékét kitorlí, azaz a molekulák minden ütközés után „új életet kezdenek”. Ha S molekulánk nehéz, a háttérmolekulák pedig könnyűek, akkor az S molekula nem veszíti el minden ütközésben „előre irányuló” impulzusát, és jó néhány ütközés kell ahhoz, hogy mozgása ismét „véletlenszerű” legyen. Ehelyett abból a feltevésből indulhatnánk ki, hogy a molekula minden ütközésben — átlagosan τ időnként — előre irányuló impulzusának bizonyos hányadát veszíti el. Ezzel az esettel

részletesebben nem foglalkozunk. Világos, hogy ugyanarra az eredményre kell jutnunk, mint ha a τ átlagos ütközési időt egy új, hosszabb τ' idővel helyettesítenénk. Ez az új τ' annak az átlagos időnek felel meg, amely alatt a molekulák éppen elfelejtették, hogy valaha rendelkeztek előre mutató impulzussal („átlagos felejtési idő”). Ha τ -t így értelmezzük, (43.15) az először feltételezettnél bonyolultabb esetekben is alkalmazható.

43.4 Ionos vezetés

A kapott eredményeket most egy speciális esetre alkalmazzuk. Legyen egy tartályban gáz, s e gázban bizonyos számú ion, ami lehet elektromosan töltött atom vagy molekula (43.2 ábra). A tartály két szemben levő fala



43.2 ábra. Ionizált gáz elektromos térben

fémlemez; ha a lemezekre rákapcsoljuk egy telep két sarkát, a gázban elektromos tér jön létre. Az erőtér hatására az ionok elkezdnek vándorolni valamelyik lemez felé, és elektromos áram jön létre. Az ionokat tartalmazó gáz ellenállásként hat, az ionok mozgását akadályozza. A driftsebességből az ionáramot kiszámítva meg tudjuk határozni az ellenállás nagyságát, pontosabban azt, hogy hogyan függ az elektromos áram erőssége a lemezekre kapcsolt U feszültségtől.

Legyen a tartály b hosszúságú, A keresztmetszetű téglatest alakú doboz (43.2 ábra). Ha a két lemez között a potenciálkülönbség azaz a feszültség U , akkor az elektromos térerősség U/b . (Az elektromos potenciál az a munka, amelyet egységnyi töltés egyik lemezről a másikra való átvitelekor végzünk. Az egységnyi töltésre ható erő E . Ha E a két lemez között nem változik, ami esetünkben elég jó közelítés, akkor az egységnyi töltésen végzett munka éppen Eb , vagyis $U = Eb$.) A gáz egy ionjára ható erő qE , amelyben q az ion töltése. Az ion driftsebessége ennek az erőnek a μ -szöröse, azaz

$$v_{\text{drift}} = \mu F = \mu q E = \mu q \frac{U}{b}. \quad (43.16)$$

Az I elektromos áramerősség egyenlő az időegység alatt átfolyó töltésmennyiséggel, tehát az egyik lemezen átfolyó áram erőssége az egységnyi idő alatt a lemezre érkező ionok összes töltése. Ha az ionok v_{drift} sebességgel vándorolnak a lemez felé, akkor közülük azok érik el a lemezt T idő alatt, amelyek legfeljebb $v_{\text{drift}}T$ távolságra vannak tőle. Ha tehát az ionok száma térfogategységenként n_i , akkor T idő alatt a lemezt $n_i A v_{\text{drift}} T$ számú ion éri el. Minden ion q töltést hordoz, ezért a

$$T \text{ idő alatt beérkező töltés} = q n_i A v_{\text{drift}} T. \quad (43.17)$$

Az I áram a T idő alatt beérkező töltés T -ed része, vagyis

$$I = q n_i A v_{\text{drift}}. \quad (43.18)$$

Írjuk be v_{drift} helyébe a (43.16) kifejezést:

$$I = \mu q^2 n_i \frac{A}{b} U \quad (43.19)$$

Azt kaptuk tehát, hogy az áram éppen arányos a feszültséggel. Ez éppen az Ohm-törvény, amelyben az R ellenállás az arányossági tényező reciproka:

$$\frac{1}{R} = \mu q^2 n_i \frac{A}{b}. \quad (43.20)$$

Összefüggést találtunk tehát az ellenállás, valamint az n_i , q és az m -től és τ -tól függő μ molekuláris jellemzők között. Ha n_i és q értékeit atomi mérésekből már ismerjük, akkor R méréseiből μ -t és közvetve τ -t is meghatározhatjuk.

43.5 Molekuláris diffúzió

Foglalkozunk most egy más típusú jelenség, a diffúzió vizsgálatával. Ehhez az eddigiektől kissé eltérő módszereket kell választanunk. Termikus egyensúlyban levő, gázzal telt tartály tetszőleges helyére vigyünk be kis mennyiségű más gázt. Az eredeti gázt „háttérgáznak”, az újat „speciális” gáznak fogjuk nevezni. A speciális gáz fokozatosan szétterjed a tartályban, de mozgását a háttérgáz lassítja. Ezt a lassú szétterjedési folyamatot *diffúzió*nak nevezzük. A diffúzió során a speciális és a háttérgáz molekulái állandóan ütköznek. Végül, nagyszámú ütközés után, a speciális molekulák eloszlása többszöröse egyenletes lesz az egész térfogatban.

Vigyázzunk, *ne tévesszük össze* a diffúziót a konvektív áramokkal, amelyekben egyszerre nagy anyagmennyiségek transzportálódnak. Két gáz keveredése során a konvekció és diffúzió általában együtt lép fel. Most azonban mi csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a gáz kizárólag a molekulák mozgása, vagyis diffúzió útján terjed szét. Célunk az, hogy kiszámítsuk, milyen gyorsan megy végbe a diffúzió.

Számítsuk ki először azt, hogy mekkora a molekulák mozgása következtében a speciális gáz molekuláinak *eredő árama*. Erről természetesen csak akkor beszélhetünk, ha a molekulák eloszlása a gáztartályban nem egyenletes, hiszen ellenkező esetben az összes molekuláris mozgások eredő árama zérus.

Tekintsük először az x irányú áramlást, helyezünk képzeletben a gázba egy az x -tengelyre merőleges síkfelületet és számláljuk le azokat a speciális molekulákat, amelyek a felületen átmennek. Pozitívként kell számolnunk azokat a molekulákat, amelyek a felületet a

pozitív x irányban keresztezik. Ebből a számból levonjuk a felületet a negatív x irányban keresztező molekulák számát, így kapjuk az eredő áramerősséget. Mint már sokszor láttuk, a felületen ΔT idő alatt éppen azok a molekulák jutnak át, amelyek a felület és az attól $v\Delta T$ távolságra levő sík között helyezkednek el. (Ne felejtjük el, hogy itt v nem a driftsebesség, hanem a molekulák tényleges sebessége!)

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy képzeletbeli felületdarabunk egységnyi területű. Ekkor — a pozitív x irányt balról jobbra felvéve — a balról jobbra áthaladó speciális molekulák száma $n_- v\Delta T$, ahol n_- a speciális molekulák térfogategységre eső száma a bal oldalon (ez ugyan csak kb. kettes tényező erejéig igaz, de ilyen tényezőkkel most nem törődünk!). A jobbról balra áthaladó molekulák száma, hasonlóan, $n_+ v\Delta T$, ahol n_+ a speciális molekulák száma a felület jobb oldalán levő egységnyi térfogatban.

A molekulaáramlás erősségét, azaz az idő- és felületegységenként balról jobbra és jobbról balra áthaladó molekulák számának különbségét J -vel jelölve a következőt kapjuk:

$$J = \frac{n_- v\Delta T - n_+ v\Delta T}{\Delta T}, \quad (43.21)$$

vagyis

$$J = (n_- - n_+)v. \quad (43.22)$$

De mi legyen n_- és n_+ pontos jelentése? Nem elég azt mondanunk, hogy pl. n_- adja meg a sűrűséget a felülettől balra — azt is meg kell mondanunk, hogy *milyen távolságra*? Azon a helyen kell megadnunk a sűrűséget, ahonnan a molekulák közvetlenül a felületen való áthaladásuk előtt *elindultak*, hiszen ez a sűrűség szabja meg az elinduló molekulák számát. Így n_- jelentse a sűrűséget a képzeletbeli felülettől l (azaz szabad úthossznyi) távolságra balra, n_+ pedig attól l távolságra jobbra.

Számításainkat egyszerűsíti, ha feltesszük, hogy a speciális molekulák térbeli eloszlása az x , y , z változók egy folytonos n_a függvényével leírható. Az $n_a(x, y, z)$ függvény tehát a speciális molekulák sűrűsége az (x, y, z) pont

körüli kis térfogatelemében. Az $n_+ - n_-$ különbséget n_a segítségével a következőképpen fejezhetjük ki:

$$n_+ - n_- = \frac{dn_a}{dx} \Delta x = \frac{dn_a}{dx} 2l. \quad (43.23)$$

Ezt az eredményt (43.22)-be helyettesítve és a kettes szorzótényezőt elhagyva:

$$J_x = -lv \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.24)$$

Azt kaptuk tehát, hogy a speciális molekulák árama arányos a sűrűség differenciálhányadosával, vagy ahogy néha mondják, a sűrűség gradiensevel.

Levezetésünk során nyilvánvalóan több durva közelítést is tettünk. Amellett, hogy rendszeresen elhagytuk a szorzótényezőket, v -t írtunk ott, ahol v_x -et kellett volna, és fel tettük, hogy n_+ és n_- képzeletbeli felületünk-től l merőlegesen mért távolságra vonatkozik, holott a felületre nem merőlegesen haladó molekulákhoz l -nek a felülettől ferdén mért távolságát kellett volna hozzárendelni. Mindezek a hibák kiküszöbölhetők; a gondosabb vizsgálat azt mutatja, hogy (43.24) jobb oldalát $1/3$ -dal kell szoroznunk. Így (43.24) javított változata:

$$J_x = -\frac{lv}{3} \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.25)$$

Hasonló egyenleteket írhatunk fel az y és z irányú áramokra is.

A J_x áram és a dn_a/dx sűrűséggradiens makroszkopikus módszerekkel is meghatározható. Kísérletileg meghatározott hányadosukat „diffúziós együtthatónak” nevezzük és D -vel jelöljük; így

$$J_x = -D \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.26)$$

A (43.25) egyenlet alapján tehát gázokra

$$D = \frac{1}{3} lv. \quad (43.27)$$

Az e fejezetben vizsgált két folyamat közül a driftmozgást külső erők, a diffúziót viszont

belső erők, a véletlenszerűen lejátszódó ütközések okozzák. E két jelenség mégsem független egymástól, hiszen mindkettő szoros kapcsolatban áll a hőmozgással, s mindkét jelenség elemzésében fontos szerephez jut az l átlagos szabad úthossz.

A (43.25) egyenletben elvégezve az $l = v\tau$ és $\tau = \mu m$ helyettesítést:

$$J_x = -\frac{1}{3} m v^2 \mu \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.28)$$

$m v^2$ viszont csak a hőmérséklettől függ! Emlékezzünk rá, hogy

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT, \quad (43.29)$$

s így

$$J_x = -\mu kT \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.30)$$

Azt kaptuk tehát, hogy a D diffúziós együttható éppen kT -szerese μ -nek, a mozgékonyágnak:

$$D = \mu kT. \quad (43.31)$$

Pontos számítással kimutatható, hogy (43.31)-ben a numerikus együttható is helyes, durva feltevéseink hatását nem kell külön tényezőkké ellensúlyoznunk. Sőt mi több, az is bizonyítható, hogy (43.31) szükségképpen mindig fennáll, még olyan bonyolult viszonyok esetén is (pl. folyadékokban szuszpendált anyag), amelyekre egyszerű számításunk részletei egyáltalán nem alkalmazhatók.

Annak bizonyítására, hogy (43.31) szükségképpen mindig igaz, vezessük le az összefüggést más módon is, kizárólag a statisztikus mechanika alapvető elvei segítségével. Legyen egy rendszerben a „speciális” molekulák sűrűségeloszlásának valamilyen gradiense, s folyjon (43.26)-nak megfelelően a gradienssel arányos diffúziós áram. Létesítsünk x irányú erőteret úgy, hogy minden speciális molekulára F erő hasson. A μ mozgékonyág definíciója szerint ekkor a driftsebesség

$$v_{\text{drift}} = \mu F. \quad (43.32)$$

A driftáramsűrűség (a két irányban felület- és időegységként áthaladó molekulák számának különbsége) ezért

$$J_{\text{drift}} = n_a v_{\text{drift}}, \quad (43.33)$$

vagy

$$J_{\text{drift}} = n_a \mu F. \quad (43.34)$$

Válasszuk meg most F -et akkorára, hogy a driftáram éppen ellensúlyozza a diffúziót, vagyis a speciális molekulák eredő árama zérus legyen. Ekkor tehát $J_x + J_{\text{drift}} = 0$, vagyis

$$D \frac{dn_a}{dx} = n_a \mu F. \quad (43.35)$$

A kompenzáció következtében a sűrűséggradiens időben állandó marad:

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a \mu F}{D}. \quad (43.36)$$

A további már egyszerű: mivel rendszerünk egyensúlyi állapotban van, alkalmazhatók rá a statisztikus mechanika egyensúlyra vonatkozó törvényei. E törvények szerint annak valószínűsége, hogy egy molekulát az x helyen találunk, $e^{-W_{\text{pot}}/kT}$ -vel arányos, ahol W_{pot} a potenciális energia. Az n_a sűrűsége ez a következtől jelenti:

$$n_a = n_0 e^{-W_{\text{pot}}/kT}. \quad (43.37)$$

Ha (43.37)-et x szerint differenciáljuk, azt kapjuk, hogy

$$\frac{dn_a}{dx} = -n_0 e^{-W_{\text{pot}}/kT} \frac{1}{kT} \frac{dW_{\text{pot}}}{dx}, \quad (43.38)$$

vagy

$$\frac{dn_a}{dx} = -\frac{n_a}{kT} \frac{dW_{\text{pot}}}{dx}. \quad (43.39)$$

A mi esetünkben, mivel az F erő x irányú, a W_{pot} potenciális energia éppen $-Fx$ és így $-dW_{\text{pot}}/dx = F$. A (43.29) egyenletből tehát azt kapjuk, hogy

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a F}{kT}. \quad (43.40)$$

Ez megegyezik a (40.2) egyenlettel, amelyből először vezettük le az $e^{-W_{\text{pot}}/kT}$ törvényt; a kör tehát bezárult. A (43.40) és (43.36) egyenlet összehasonlításából éppen (43.31)-re jutunk. Ezzel igazoltuk, hogy (43.31), amely megadja a diffúziós áram és a mozgékonyág kapcsolatát, helyes együtthatókat tartalmaz és teljesen általános feltevések mellett is igaz. A mozgékonyág és a diffúzió között tehát igen szoros a kapcsolat. Ezt az összefüggést először Einstein ismerte fel.

43.6 Hővezetés

A kinetikus elmélet módszereivel, amelyeket az eddigiekben felhasználtunk, valamely gáz hővezetőképességét is ki lehet számítani. Ha egy tartályban levő gáz felül melegebb, mint alul, a gázban felülről lefelé hő áramlik. (Azért tekintjük a felső részt melegebbnek, mert ellenkező esetben konvektív áramok jönnének létre, s így példánk már nem lenne tisztán hővezetési feladat.) A melegebb gáz úgy ad át hőt a hidegebbnek, hogy a „meleg” — nagyobb energiájú — molekulák lefelé, a „hideg” molekulák pedig felfelé diffundálnak. A termikus energiaáramot úgy számíthatjuk ki, hogy külön-külön meghatározzuk, mennyi energiát visznek egy felületelemen keresztül a lefelé haladó molekulák lefelé, a felfelé haladó molekulák pedig felfelé; a kettő különbsége az eredő energiaáram.

A λ hővezetési tényező az egységnyi felületen időegységként átáramló energia és a hőmérsékleti gradiens hányadosa:

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = -\lambda \frac{dT}{dz}. \quad (43.41)$$

Mivel a részletes számítás igen hasonló ahhoz, amelyet az ionizált gázban folyó elektromos árammal kapcsolatban már elvégeztünk, gya-

korlatként az Olvasóra bízunk annak bizonyítását, hogy

$$\lambda = \frac{knv}{\alpha - 1}, \quad (43.42)$$

ahol $(\alpha - 1)kT$ egy molekula átlagos energiája T hőmérsékleten.

Az $n\sigma_c = 1$ összefüggés felhasználásával a hővezetési tényező:

$$\lambda = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{kv}{\sigma_c}. \quad (43.43)$$

Eredményünk kissé meglepő. Tudjuk, hogy a gázmolekulák átlagsebessége függ a hőmérséklettől, de független a sűrűségtől. Nyugodtan feltételezhetjük, hogy σ_c csak a molekulák méretétől függ. Így egyszerű eredményünk azt jelenti, hogy a λ hővezetési tényező (s azzal együtt a hőáram sebessége is, bármilyen speciális feltételek mellett) független a gáz sűrűségétől! Ha a sűrűség változik, az „energia-hordozók” száma is megváltozik, de ezt a változást éppen ellensúlyozza az, hogy az „energia-hordozók” az ütközések között hosszabb utakat tudnak megtenni.

Feltehetjük a következő kérdést: „A hőáram ebben a határesetben is független a gáz sűrűségétől, amikor a sűrűség zérushoz tart? Amikor egyáltalán nincs is jelen gáz?” Természetesen nem! A (43.43) képlet levezetése során — hasonlóan, mint a fejezetben szereplő többi képlet levezetéséhez is — feltételeztük, hogy az ütközések közötti átlagos szabad úthossz sokkal kisebb a tartály valamennyi méreténél. Ha a gáz sűrűsége olyan kicsi, hogy egy molekula bizonyos valószínűséggel ütközés nélkül eljuthat a tartály egyik falától a másikig, akkor a fejezetünkben szereplő számítások nem alkalmazhatók. Ilyen esetekben vissza kell térnünk a kinetikus elmülethez, és elejétől kezdve részletesen kell elemezni, hogy mi történik.

44 A termodinamika főtételei

44.1 Hőgépek. Az első főtétel

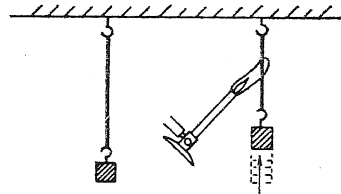
Az anyag tulajdonságait eddig az atomos felépítésből kiindulva elemeztük, vagyis főbb vonásokban meg akartuk érteni az anyag viselkedését, arra alapozva, hogy minden anyag bizonyos törvényeknek engedelmeskedő atomokból áll. Az anyagok tulajdonságai között azonban olyan összefüggések is vannak, amelyeket az anyagszerkezet vizsgálata nélkül is meg tudunk ismerni. A (fenomenológikus) termodinamika tárgya éppen az anyag tulajdonságai közötti, ilyen jellegű összefüggések elemzése. Történelmileg tekintve, a termodinamika kifejlődése meg is előzte az anyag belső szerkezetének megismerését.

Nézzünk egy példát. Mint azt a kinetikus elméletből tudjuk, egy gáz nyomását az okozza, hogy a gáz molekulái minduntalan nekiütköznek az edény falának. Azt is tudjuk, hogy ha a gázt melegítjük, akkor a molekulák gyorsabban és nagyobb sebességgel ütköznek a falnak, tehát a nyomásnak még kell nőnie. Megfordítva, ha egy dugattyút nyomunk egy gáztartályba a molekuláütközések okozta erővel szemben, akkor az ütköző molekulák energiája megnő, s ezért a gáz hőmérséklete növekszik. E két jelenség között — a kinetikus elmélet alapján — megállapítható ugyan kvantitatív összefüggés, nyilvánvaló azonban, hogy fennáll valamilyen szükségszerű, az ütközések részletes mechanizmusától független kapcsolat is.

Tekintsünk most egy másik példát. Olvasóink közül bizonyára sokan tapasztalták, hogy ha egy gumiszalagot kihúznak, az felmelegszik. Ha pl. ajkunk közé téve húzzuk ki

a gumiszalagot, a felmelegedést érzékelhetjük is. E felmelegedés reverzibilis, vagyis ha a szalagot ajkunk közé tartva gyorsan meglazítjuk, az érezhetően lehűl. A gumiszalag tehát megnyúláskor felmelegszik, összehúzódva pedig lehűl.

Ennek alapján ösztönünk azt súgja, hogy ha a szalagot melegítenénk, akkor összehúzódna. Abból a tényből, hogy a szalag a megnyújtás hatására felmelegedett, azt következtetjük tehát, hogy melegítés hatására viszont összehúzódik. És valóban, ha egy súlyt tartó gumiszalaghoz gázlángot közelítünk, azt látjuk, hogy a szalag hirtelen összehúzódik (44.1 ábra). Ez a tény kétségtelenül kapcsolatos azzal is, hogy a feszültség csökkentésekor a szalag lehűl.



44.1 ábra. A gumiszalag melegítéskor összehúzódik

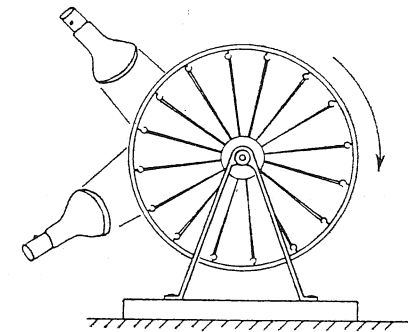
Ezt a jelenséget igen bonyolult belső mechanizmus okozza. Bár ebben a fejezetben fő célunk az összefüggések molekuláris szerkezetétől független megértése, próbáljuk mégis vázlatosan leírni e mechanizmust molekuláris szempontból. Képzeljünk magunk elé egy hosszú láncmolekulákból álló szövevényt, egy csomó

„molekuláris spagettit”, amelyet még bonyolultabbá tesz az, hogy a láncok helyenként össze vannak kötve egymással — mintha a spagetti szálai néhol össze lennének ragasztva. Ha egy ilyen szövevényt kihúzzunk, a láncok a húzóerő irányába állnak be, ugyanakkor hőmozgást is végeznek, s így gyakran ütköznek egymással. A lánc önmagától nem is marad meg kihúzott állapotban, mert a többi láncrész és molekula oldalról nekiütközik, s igyekezik ismét összekunkorítani. Érthető tehát, hogy ha a láncokat kinyújtva tartjuk és a hőmérsékletet növeljük, akkor a láncrészek nagyobb erővel ütköznek egymásnak, s ezért igyekeznek összehúzódni és így nagyobb súlyt képesek felemelni, mint hideg állapotban. Ha a gumiszalagot, miután egy ideig kinyújtott állapotban volt, hagyjuk összehúzódni, a láncok elveszítik feszességüket, s a meglazuló láncoknak ütköző molekulák energiát vesztenek. Ezért csökken a hőmérséklet.

Láttuk tehát, hogyan hozható kapcsolatba a kinetikus elmélet felhasználásával az előbbi két folyamat, a melegítés okozta összehúzódás és a feszültség csökkenésével együjtjáró lehűlés. A két jelenség pontos kapcsolatának elméleti meghatározása azonban óriási feladat lenne. Ehhez tudnunk kellene, hogy mennyi az ütközések száma másodpercenként, milyen a láncok pontos szerkezete, s figyelembe kellene vennünk még jó pár egyéb hatást is, amelyek a feladatot még bonyolultabbá tennék. A belső mechanizmus olyannyira összetett, hogy kinetikus elmélettel nem is írható le pontosan. A két megfigyelt jelenség között azonban határozott összefüggés van és ez nélkül is megadható, hogy bármit is tudnánk a belső szerkezetről!

Az egész termodinamika lényegében a következőkhöz hasonló megfontolásokon alapul. Mivel egy gumiszalag magasabb hőmérsékleten „erősebb”, mint alacsony hőmérsékleten, lehetővé válik, hogy energiaközlés segítségével súlyokat emeljünk fel vagy hozzunk mozgásba, s így munkát végezzünk. A termodinamika tudománya annak tanulmányozásával kezdődik, hogy hőhatással hogyan végezhettünk munkát. Esetünkben a kérdést így

tehetjük fel: készíthetünk-e olyan gépet, amely a melegítés gumiszalagra gyakorolt hatását folyamatos munkavégzésre használja fel? Leírunk egy meglehetősen „ügyetlen” gépet, amely képes erre. Helyettesítsük egy biciklikerék küllőit gumiszalagokkal (44.2 ábra). Ha a kerék egyik oldalán levő szalagokat két hőszugárzó segítségével melegíteni kezdjük, „erősebbé” válnak, mint a másik oldalon levő gumiszalagok. Ennek hatására a kerék súlypontja eltávolodik a forgástengelytől és így a kerék forogni kezd. Forgás közben újabb gumiszalagok melegednek fel, a melegek pedig lehűlnek. Így a kerék mindaddig megtartja lassú forgását, míg a hőszugárzók működnek. A gép hatásfoka rendkívül kicsi. A két hőszugárzó fogyasztása lehet pl. 400 W, a gép mégis alig képes felemelni egy legyet! De vajon felhasználható-e a hőhatás munkavégzésre hatásosabb módon is?



44.2 ábra. Hőgép melegített gumiszalagokkal

A termodinamika tudománya ténylegesen akkor született meg, amikor Sadi Carnot megvizsgálta, hogy hogyan lehet megépíteni a legjobb, legnagyobb hatásfokú gépet. Ez egyike volt azon — eléggé ritka — eseteknek, amikor a mérnöki gyakorlat vezetett alapvető fizikai felfedezéshez. Egy másik ilyen eset, Claude Shannon analízise újabb keletű. Ennek eredményeként jött létre az információelmélet. E két gondolatmenet egyébként véletlenül igen közeli kapcsolatban is áll egymással!

A gőzgép úgy működik, hogy valamilyen égből felszabaduló energia hőhatásával vizet melegít, a keletkezett gőz kiterjed és mozgásba hoz egy dugattyút, ez pedig egy kerek forgat. A gőz tehát tolja a dugattyút — de mi történik ezután? Valahogy be kell fejezni a folyamatot! Ügyetlenül úgy is csinálhatnánk, hogy a gőzt egyszerűen kiengednénk a levegőbe, de ekkor vízkészletünket mindig újra ki kellene egészítenünk. Olcsóbb — jobb hatásfokú — az eljárás, ha a gőzt egy másik tartályba vezetjük, hideg víz segítségével lecsapatjuk, az így kapott vizet visszazivattyúzzuk a kazánba. A gép működését ily módon folyamatossá tesszük. Ekkor gépünk tevékenysége valóban csupán annyi, hogy hőt vesz fel, és munkát végez. Jobb lenne-e vajon, ha víz helyett alkoholt használnánk? Milyen tulajdonságú anyagra lenne szükségünk ahhoz, hogy a lehető legjobb gépet kapjuk? Ezek voltak azok a kérdések, amelyekkel Carnot behatóan kezdett foglalkozni, s vizsgálatának egyik melléktermékeként derült fény az olyan típusú összefüggésekre is, mint amilyenről fentebb volt szó*.

A termodinamika valamennyi eredménye néhány látszólag egyszerű kijelentésből következik, amelyeket a *termodinamika főtételeinek* nevezünk. Amikor Carnot élt, a termodinamika első főtétele — az energia megmaradásának törvénye — még nem volt ismeretes. Carnot azonban következtetéseiben annyira körültekintő volt, hogy gondolatmenete végig helyes, annak ellenére, hogy az első főtétele nem ismerte! Valamivel később Clausius megadott egy egyszerűbb levezetést, amely könnyebben érthető volt, mint Carnot rendkívül finom gondolatmenete. Clausius azonban a levezetés során azt tételezte fel, hogy nem általában az energia, hanem — a hőanyag-elméletnek megfelelően — a hő marad meg, s később derült ki, hogy ez nem igaz. Később gyakran hangoztatták, hogy Carnot levezetése rossz volt, pedig csak a mindenki által olvasott

* Carnot eredeti gondolatmenete magyar nyelven a Matematikai és Fizikai Lapokban 6 (1897) 5, 247. old. jelent meg. (Szerkesztő)

Clausius-féle, leegyszerűsített változatban volt a hiba.

Carnot így a termodinamika második főtétele az első főtétele előtt fedezte fel! Érdekes lenne elmondani Carnot levezetését az első főtétele felhasználása nélkül, ezt azonban mégsem tesszük, hiszen fizikát akarunk tanulni, nem pedig történelmet. Az első főtétele kezdettől fogva felhasználjuk annak ellenére, hogy sok minden nélküle is levezethető.

Kezdjük az *első főtétele*, az energiamegmaradás törvényének kimondásával: ha egy rendszerrel hőt közlünk és munkát is végzünk rajta, akkor a rendszer energiája a közölt hővel és a végzett munkával növekszik meg. Ez a következő módon is felírható: a rendszerrel közölt Q hő plusz a rendszeren végzett W munka egyenlő a rendszer U energiájának (amelyet néha belső energiának is neveznek) a megnövekedésével:

$$U \text{ megváltozása} = Q + W, \quad (44.1)$$

illetve differenciális formában:

$$dU = DQ + DW, \quad (44.2)$$

ahol DQ , DW az elemi hő, ill. munka*.

44.2 A második főtétele

Térjünk most rá a termodinamika második főtételeire. Tudjuk, hogy ha pl. a sűrűdést le akarjuk győzni, akkor a befektetett munka egyenlő a keletkezett hővel. Ha T hőmérsékletű szobában és elég lassan végezzük a munkát, akkor a szoba hőmérséklete nem sokat változik, tehát a munkát állandó hőmérsékleten alakítottuk át hővé. Meg tudjuk-e fordítani ezt a folyamatot? Vissza tudjuk-e alakítani a hőt munkává állandó hőmérsékleten? A termodinamika második főtétele szerint nem. Ha csak az energia megmaradásának törvényére gondolunk, azt hihetnénk, hogy a molekulák rendszertelen mozgásának energiája jól hasznosítható energiakészletet jelent.

* A „D” jel arra mutat, hogy ezek nem teljes differenciálok (Szerkesztő).

Carnot azonban feltételezte, hogy egyetlen meghatározott állandó hőmérsékleten a hőenergia nem alakítható át munkává. Más szavakkal, ha az egész világmindenség mindenütt ugyanakkora hőmérsékletű lenne, akkor a hőenergiából semennyit sem tudnánk munkává alakítani. Bár a munka állandó hőmérsékleten is átalakítható hővé, e folyamat nem fordítható meg, a munka nem nyerhető vissza. Carnot szerint nem lehetséges adott hőmérsékleten egy rendszerrel hőt közölni s e hőt munkává alakítani úgy, hogy a rendszerben vagy környezetében semmi más változás ne menjen végbe.

Az utolsó kikötés igen lényeges. Képzelejünk el pl. egy adott hőmérsékletű sűrített levegővel telt tartályt. Ha engedjük, hogy a gáz kiterjedjen, munkavégzésre is képes lesz, pl. légkalapácsokat tud működtetni. Kiterjedés közben a gáz kissé lehűl, de ha rendelkezésünkre állna egy tenger vagy óceán — azaz egy óriási hőtartály —, amelynek hőmérséklete megegyezne a sűrített gáz kezdeti hőmérsékletével, akkor ismét fel tudnánk melegíteni. A tengerből így energiát vonnánk el, s a sűrített levegővel munkát végeznénk. De Carnot tételével mégsem kerülünk ellentmondásba, mivel *nem hagyunk mindent ugyanúgy, ahogy volt.* Ha pedig a gázt ismét összenyomjuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az eközben végzett munka több, mint amennyit nyertünk kiterjedése révén. Mi csak azokkal a folyamatokkal akarunk foglalkozni, amelyeknek *végeredményeként* a közölt hőből munkát nyerünk, fordítva mint pl. a sűrűdés esetében, ahol munkából nyertünk hőt. Ha egy testet zárt pályán mozgatunk, a ciklus végén a rendszer pontosan eredeti állapotába tér vissza: a ciklus végeredménye csak az, hogy munkát végeztünk és hőt nyertünk. Carnot szerint ez a folyamat nem fordítható meg. Fogadjuk el mi is ezt az álláspontot.

Ha a folyamat megfordítható lenne, abból többek között az is következne, hogy „ingyen” (azaz eredő munkavégzés nélkül) tudnánk hőt elvonni egy alacsonyabb hőmérsékletű testtől, s átadni egy magasabb hőmérsékletű testnek.

Tudjuk azonban, hogy ha egy melegebb és

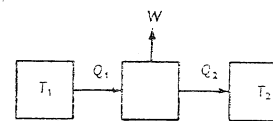
egy hidegebb testet egymás mellé helyezünk, és semmi mást nem csinálunk, akkor nem történhet meg az, hogy a meleg test még melegebbé válik, a hideg pedig lehűl. Ha egy igen nagy hőtartályból — pl. tengerből — adott hőmérsékleten energiát tudnánk elvonni, és azzal munkát végeztetnénk, akkor ezt sűrűdés segítségével visszaalakíthatnánk hőenergiává valamilyen más hőmérsékleten — pl. úgy, hogy gépünkkel kinyúlna egy kar, amely egy már meleg testet dörzsölve azt tovább melegítené.

Végeredményben tehát hőt vonnánk el egy hideg testről, és azt átvinnénk egy „melegebbre”, miáltal ellentétbe kerülne Carnot hipotézisével, a termodinamika második főtételeivel, amely tehát úgy is megfogalmazható, hogy a „hő nem folyhat át önmagától hidegebb testről melegebbre”.

Az az elemzés, amelyet Carnot a hőgépekről adott, igen hasonló volt ahhoz, amelyet az 1. kötet 4. fejezetében az energia megmaradásának tárgyalásánál adtunk a súlyokat fel-emelő gépekről. Ottani megfontolásainknak éppen Carnot gondolatmenete volt a mintája, ezért nem meglepő, hogy a továbbiakban is ezekhez hasonló megfontolásokkal találkozunk.

Építsünk egy gőzgépet, amelynek „kazánja” mondjuk T_1 hőmérsékletű. A gép a kazánból Q_1 hőt vesz fel, majd W munkát végez, és egy másik, T_2 hőmérsékleten lead a „kondenzátornak” Q_2 hőt (44.3 ábra). Carnot nem tudta, hogy mennyi e leadott hő, hiszen nem ismerte az első főtétele. A hőanyag-elmélet szerint a Q_1 és Q_2 hő egyenlő, de ebben Carnot nem hitt, ami jól jellemzi, mennyire körültekintően járt el. Ha felhasználjuk az első főtétele, azt kapjuk, hogy a leadott Q_2 hő éppen a felvett Q_1 hő és a végzett W munka különbsége:

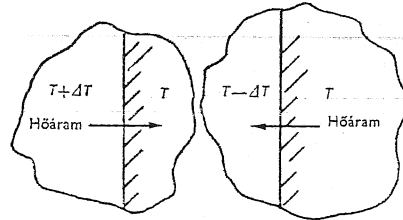
$$Q_2 = Q_1 - W. \quad (44.3)$$



44.3 ábra. Hőgép vázlat

(Ciklikus folyamat esetén a kondenzátorból a vizet lecsapódása után azonnal visszaszivattyúzzuk a kazánba. Ekkor azt mondhatjuk, hogy minden ciklusban fellép a Q_1 hőközlés, és a gép W munkát végez.)

Építsünk most egy másik gépet. Ha jellemzőit az előzővel azonosra választjuk, de víz helyett más folyadékot, pl. alkoholt használunk, felmerül a kérdés: vajon ez a gép több munkát végezhet-e, mint előbbi gőzgépünk?



44.4 ábra. Reverzibilis hőtranszport

44.3 Reverzibilis gépek

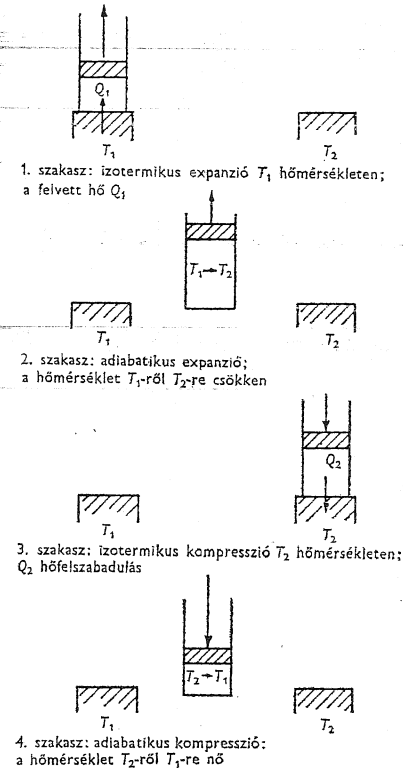
Vizsgáljuk most meg egy kissé közelebről is gépeinket. Egy dolog világos: ha valamely gépben sűrűdés lép fel, akkor az veszteséget okoz. Az tehát a legjobb gép, amelyik sűrűdésmentes. Az energiamegmaradás tárgyalásához hasonlóan csak a tökéletesen sűrűdésmentes gépeket vizsgáljuk.

Nézzük meg, hogy mi a sűrűdésmentes mozgás hőtani megfelelője, a „sűrűdésmentes” hőátadás. Ha két különböző hőmérsékletű testet egymás mellé helyezünk, akkor az energiaáram a melegebből a hidegebbe folyik, s a hőmérsékletek kis megváltoztatásával nem érhetjük el, hogy irányá ellentétesre változzék. A gyakorlatilag sűrűdésmentes gépet viszont az jellemzi, hogy mindig abban az irányban működik, amelyik irányból az erőhatás érte. Mi most a sűrűdésmentes mozgás megfelelőjét, az olyan hőátadást szeretnénk megtalálni, amelynek irányát igen kis változtatással megfordíthatjuk. Véges hőmérséklet-különbség esetén ez lehetetlen, ha azonban gondoskodunk arról, hogy a hőcsere mindig két, lényegileg azonos hőmérsékletű test között menjen végbe, vagyis ha a hőátadás kívánt irányát végtelenül kicsiny hőmérséklet-különbséggel biztosítjuk, akkor a folyamatot reverzibilisnek nevezzük (44.4 ábra). Látható, hogy az ideális gép ún. *reverzibilis* gép. Ebben, a *valóságban nem létező, fiktív* gépben minden folyamat kis infinitezimális változtatásokkal megfordítható lenne.

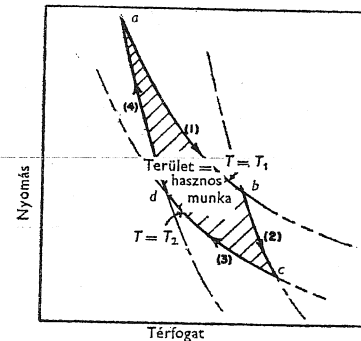
Nézzünk most egy ilyen „ideális” gépet. Példaként leírunk egy körfolyamatot, amely-

nek gyakorlati értéke kétséges ugyan, viszont megvan az a tulajdonsága, hogy Carnot-féle értelemben reverzibilis. Legyen gáz egy sűrűdésmentes dugattyúval felszerelt hengerben. Hogy határozott esetről beszélhessünk, tegyük fel, hogy a hengerben ideális gáz van, bár ez nem feltétlenül szükséges. Legyen ezenkívül két, T_1 , ill. T_2 hőmérsékletű hőtartályunk, s tegyük fel róluk, hogy igen nagy kiterjedésű testek. Tételezzük fel továbbá, hogy T_1 nagyobb, mint T_2 . Engedjük először a gázt lassan kiterjedni, s ezzel egyidejűleg melegítsük a T_1 hőmérsékletű hőtartály segítségével. Azzal, hogy a dugattyút végtelen lassan engedjük ki, biztosítjuk, hogy a gáz hőmérséklete sohasem térjen el jelentősen T_1 -től. Ha a dugattyút lassan ellenkező irányba, vagyis befelé mozgathatunk, a hőmérséklet csak végtelen kicsivel emelkedne T_1 fölé, de a hőátadás iránya megfordulna. Az ilyen izotermikus (állandó hőmérsékletű) térfogatváltoztatás tehát — ha végtelen lassan végezzük — reverzibilis folyamat.

Hogy jobban megértsük, amit csinálunk, ábrázoljuk a gáz nyomását térfogatának függvényében (44.6 ábra). Miközben a gáz kiterjed, nyomása csökken. Az l jelzésű görbe megmutatja, hogy hogyan változik a nyomás és a térfogat, ha a T_1 hőmérséklet állandó. Ideális gázra e görbe egyenlete $pV = NkT_1$. Az izotermikus kiterjedés közben tehát a térfogat növekedésével a nyomás a b pontig csökken. E pontban a folyamat e szakasza befejeződik. A kiterjedés során a gáz a hőtartálytól elvont bizonyos Q_1 hőt, hiszen ha nem állt volna



44.5 ábra. A Carnot-körfolyamat szakaszai



44.6 ábra. A Carnot-körfolyamat

kapcsolatban a hőtartállyal, akkor — mint tudjuk — lehűlt volna.

A b pontnál, az izotermikus térfogatnövelés végén, válasszuk el a hengert a hőtartálytól, majd növeljük tovább a gáz térfogatát. Ebben az új szakaszban nem engedjük meg, hogy a hengert hőközlés érje, tehát a gáz hőmérséklete csökken. A térfogatot ismét lassan növeljük, hogy a folyamat megfordítható legyen, s ismét feltezzük, hogy nincs sűrűdés.

A folyamatot a 2 görbe ábrázolja, amelynek vonalát addig kell húznunk, míg a hőmérséklet a c pontnál el nem éri a T_2 értéket. Az ilyen hőközlés nélküli térfogatváltozást *adiabatikusnak* nevezzük. Mint már tudjuk, ideális gázra a 2 görbe $pV^\gamma = \text{konst.}$ alakú, ahol $\gamma > 1$, vagyis az adiabatikus görbe az izotermikusnál meredekebb lefutású.

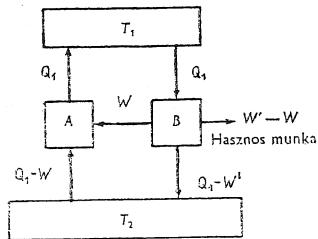
A gázt tartalmazó henger elérte tehát a T_2 hőmérsékletet, s így érintkezésbe hozható a T_2 hőmérsékletű hőtartállyal anélkül, hogy irreverzibilis változás történne. A T_2 hőmérsékletű hőtartály elvétele nélkül nyomjuk most lassan össze a gázt a 44.6 ábra 3. görbéjének megfelelően (44.5 ábra, 3. szakasz). Mivel a henger érintkezik a hőtartállyal, a gáz hőmérséklete nem nő, hanem ehelyett a hengerből a T_2 hőmérsékletű hőtartályba áramlik Q_2 hő. Fejezzük be a 3 izotermikus összenyomást a d pontnál, majd válasszuk el a hengert a T_2 hőmérsékletű hőtartálytól és folytassuk az összenyomást úgy, hogy a henger és környezete között termikus kölcsönhatást nem engedünk meg. A hőmérséklet ekkor nő, s a nyomás a 4 görbének megfelelően változik. Ha minden lépést végtelen lassan végeztünk el, akkor visszajutunk a T_1 hőmérsékletre tartozó a pontba, amelyből kiindultunk, s a körfolyamat megismételhető.

Az előzőekben leírt fiktív körfolyamat reverzibilis, tehát minden lépés fordítva is elvégezhető. Haladhattunk volna fordított irányban is: az a pontból, T_1 hőmérsékletéről kiindulva növelhetjük volna a gáz térfogatát a 4 görbementén, folytathattuk volna a térfogatnövelést T_2 hőmérsékleten, s közben a gáz Q_2 hőt vett volna fel stb. Ha a ciklust egyik irányban valósítjuk meg, munkát kell végeznünk a gá-

zon, ha a másik irányban, akkor a gáz végez munkát.

A teljes munka könnyen kiszámítható, ha tudjuk, hogy a gáz kis kiterjedésekor végzett munka a nyomás és a dV térfogatváltozás szorzata, vagyis $p dV$. A tetszőleges térfogatváltozásokkor végzett munka tehát $\int p dV$. Előző diagramunkon p -t függőlegesen, V -t vízszintesen mértük fel. Így ha a függőleges távolságot y -nak, a vízszinteset x -nek nevezzük, az előbbi integrál $\int y dx$, vagyis a görbe alatti terület. A számozott szakaszok alatti területek tehát megadják, hogy mekkora volt a gáz által, ill. a gázon végzett munka a megfelelő szakaszokban. Könnyen látható, hogy a teljes munkát éppen az ábrán bevonalkozott terület adja.

Most tegyük fel, hogy más reverzibilis gépek is léteznek. Tegyük fel, hogy van egy A reverzibilis gépünk, amely T_1 hőmérsékleten Q_1 hőt vesz fel, W munkát végez és T_2 hőmérsékleten lead valamennyi hőt. Legyen most egy tetszőleges felépítésű másik, B gépünk, amelynek munkavégző közege lehet gumiszalag, gőz, vagy bármilyen más anyag, s amelyet esetleg még fel sem találtak. A gépről még azt sem tételezzük fel, hogy reverzibilis, egyetlen kikötésünk az, hogy T_1 hőmérsékleten ugyanakkora Q_1 hőt vegyen fel, mint A , és az a hőmérséklet, amelyen hőt ad le, ismét T_2 legyen (44.7 ábra). Tegyük fel, hogy a B gép W' munkát végez. Azt állítjuk, hogy W' nem lehet nagyobb, mint W , vagyis egy reverzibilis gépnél több munkát semmilyen gép sem végezhet. Hogy ezt belássuk, tegyük fel az ellen-



44.7 ábra. Az A reverzibilis gépet a B gép fordított irányban működteti

kezőjét, vagyis hogy W' nagyobb W -nél. Akkor a T_1 hőmérsékletű hőtartályból Q_1 hőt kivéve, a B géppel W' munkát végeztethetnénk, s eközben bizonyos hőt leadnánk a T_2 hőmérsékletű hőtartálynak; hogy mennyit, azzal nem törődünk. Ezután a W -nél nagyobb feltetelezett W' munkából W -t felhasználhatnánk arra, hogy az A gépet visszafelé működtessük — ezt megtehetnénk, hiszen A reverzibilis gép —, a megmaradó $W' - W$ munkát pedig hasznos munkavégzésre fordíthatnánk. Az A gép ekkor T_2 -n felvenne valamennyi hőt, a T_1 hőmérsékletű tartálynak pedig leadna Q_1 hőt. E kettős ciklus után minden visszajutna eredeti állapotába, s a folyamat *egyedüli* eredménye az lenne, hogy $W' - W$ munkát végeztünk, s a T_2 hőmérsékletű hőtartályból energiát vontunk el! Mivel voltunk olyan elővigyázatosak, hogy a Q_1 hőt visszajuttattuk a T_1 hőmérsékletű hőtartályba, e hőtartálynak nem kell nagyon nagy lennie, s ezért elhelyezhető az is kombinált $A+B$ gép „belsejében”. Kombinált gépünk tehát végeredményben $W' - W$ hőt vont el a T_2 hőmérsékletű hőtartálytól, s e hőt munkává alakította. Carnot posztulátuma szerint azonban egyetlen, adott hőmérsékletű hőtartályból nem nyerhetünk hasznos munkát úgy, hogy eközben *semmi más ne változzék*. Ebből viszont következik az, hogy nem építhető olyan gép, amely a T_1 hőmérsékleten vesz fel és a T_2 hőmérsékleten ad le hőt, s több munkát végez, mint az ugyanezen hőmérsékletek között működő reverzibilis gép.

Most azt tegyük fel, hogy a B gép is reverzibilis. Ekkor természetesen nemcsak az igaz, hogy W' nem nagyobb, mint W , hanem érvelésünket megfordítva az is belátható, hogy W sem lehet nagyobb W' -nél. Ha tehát mindkét gép reverzibilis, akkor munkavégzésük megegyezik. Ezzel el is jutottunk Carnot ragyogó végkövetkeztetéséhez: ha egy gép reverzibilis, akkor teljesen mindegy, hogy milyen a szerkezete, hiszen ha T_1 hőmérsékleten adott mennyiségű hőt vesz fel, s a hőt T_2 hőmérsékleten adja le, a végzett munka mennyisége *független a gép szerkezetétől*.

Ha találunk olyan törvényt, amely meg-

szabja, hogy mekkora munkát végez gépünk, ha t_1 hőmérsékleten Q_1 hőt vesz fel és a hőt T_2 hőmérsékleten adja le, akkor univerzális, minden anyagra érvényes törvényhez jutnánk. Természetesen, ha valamely speciális anyag tulajdonságait ismernénk, akkor erre az anyagra levezethetnénk ezt a törvényszerűséget, s azután egyszerűen azt mondhatnánk, hogy reverzibilis gépnél minden más anyagra ugyanekkora a munkavégzés. Ennek a gondolatnak a felhasználásával találhatjuk meg az összefüggést pl. egy gumiszalag melegítéskor tapasztalt összehúzódása és összehúzódáskor bekövetkező lehülése között is. Egyszerűen azt kell tennünk, hogy építünk vele reverzibilis gépet, s elvégeztünk egy teljes körfolyamatot. A ciklus során végzett munkák összege éppen az előbbi egyetemes összefüggést adja, amely független az anyag minőségétől. Az anyagok tulajdonságai tehát korlátozottak; nem készíthetünk olyan anyagot, amelyet csak akarunk, hiszen akkor olyat is feltalálhatnánk, amely egy reverzibilis ciklusban a maximálisan megengedett munkánál többet végezne. Ez az elv, ez a korlátozás a termodinamikából levezethető egyetlen reális szabály.

44.4 Az ideális gép hatásfoka

Határozzuk most meg, hogy hogyan függ a W munka a Q_1 , T_1 , T_2 mennyiségektől. Először is nyilvánvaló, hogy W arányos Q_1 -gyel.

Lássunk most hozzá általános összefüggésünk levezetéséhez. Vizsgáljunk meg ezért egy olyan reverzibilis gépet, amelyben a munkavégző közeg tulajdonságait jól ismerjük. (Célunkat tisztán logikai megfontolással is elérhetnénk. Ez a fejtegetés a fizika történetének legszebb gondolatmenetei közé tartozik, s mivel nem szeretnénk teljesen kihagyni, később majd röviden visszatérünk rá. Először azonban válasszuk az egyszerűbb, sokkal kevésbé elvont módszert, vagyis végezzük el a számítást ideális gázra.)

Mivel $W = Q_1 - Q_2$, feladatunk mindössze az izotermikus kompresszió és expanzió során fellépő Q_1 és Q_2 nagyságának kiszámítása.

Határozzuk meg pl. először a Q_1 hőt, amelyet a T_1 hőmérsékleten vesz fel a gáz, miközben a p_a nyomással, V_a térfogattal és T_1 hőmérséklettel jellemzett a pontból a p_b nyomással, V_b térfogattal és az előbbivel megegyező T_1 hőmérséklettel jellemzett b pontig izotermikusan kiterjed (44.6 ábra, 1 szakasz). Az ideális gáz molekuláinak energiája csak a hőmérséklettől függ, s mivel a hőmérséklet és a molekulák száma az a és b pontban megegyezik, e két pontban a gáz belső energiája is egyenlő. Így U nem változik; a kiterjedés során a gáz által végzett

$$W = \int_a^b p dV$$

munka egyenlő a tartályból felvett Q_1 hővel. Mivel a kiterjedéskor $pV = NkT_1$, ezért

$$p = \frac{NkT_1}{V},$$

tehát

$$Q_1 = \int_a^b p dV = \int_a^b NkT_1 \frac{dV}{V},$$

vagyis a T_1 hőmérsékletű tartályból elvont hő

$$Q_1 = NkT_1 \ln \frac{V_b}{V_a}. \quad (44.4)$$

Ugyanígy a T_2 hőmérsékleten végzett kompresszió folyamán (44.6 ábra, 3 szakasz) a T_2 hőmérsékletű tartálynak leadott hő

$$Q_2 = NkT_2 \ln \frac{V_c}{V_d}. \quad (44.5)$$

Most már csak az a feladatunk, hogy a V_c/V_d és V_b/V_a hányadosok összefüggését megtaláljuk. Használjuk fel, hogy a b -től c -ig terjedő szakasz adiabatikus expanzió, amelynek során pV^γ állandó. Mivel $pV = NkT$, előbbi összefüggésünket $(pV)^\gamma V^{\gamma-1} = \text{állandó}$ alakba átvirva T -re és V -re azt az összefüggést kapjuk, hogy $TV^{\gamma-1} = \text{állandó}$, vagyis

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}. \quad (44.6)$$

Ugyanígy a 4 szakasz, a d -től a -ig tartó expanszió szintén adiabatikus.

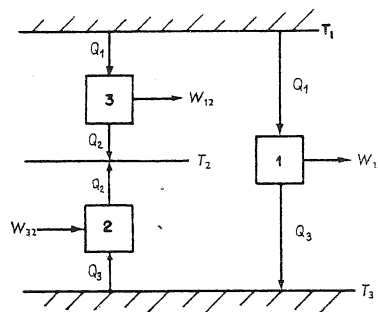
$$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1}. \quad (44.6a)$$

Ezt az egyenletet az előzővel elosztva azt kapjuk, hogy V_b/V_a és V_c/V_d megegyezik, vagyis a (44.4) és (44.5) képletben a logaritmusok egyenlők, s így

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.7)$$

Ez a keresett összefüggés. Bár levezetésünket speciális, ideális gázzal működő gépre végeztük, a végeredmény mégis, mint tudjuk, *minverzibilis gépre igaz*.

Hogyan kapható meg ez az univerzális törvény tisztán logikai úton, anélkül, hogy az anyag bármilyen tulajdonságának ismeretét feltételeznénk? Legyen három gépünk és három hőmérsékletünk T_1 , T_2 és T_3 . Az első gép vegyen fel Q_1 hőt T_1 hőmérsékleten, végezzen W_{13} munkát és adjon le Q_3 hőt a T_3 hőmérsékleten (44.8 ábra). A második gépet működteszük T_2 és T_3 között fordított irányban.



44.8 ábra. Az 1 és 2 gép együttesen egyenértékű a 3 géppel

E gép méreteit válasszuk meg úgy, hogy a T_3 hőmérsékleten éppen Q_3 hőt vegyen fel; a T_2 hőmérsékleten leadott hőt jelölje ekkor Q_2 . A gép fordított irányban működtetéséhez szükséges munkát jelölje W_{32} (a gép által „végzett” munka természetesen negatív). Az első gép egy ciklusban Q_1 hőt vesz fel és a T_3

hőmérsékleten Q_3 hőt ad le; a második gép viszont e leadott hővel egyenlő Q_3 hőt vesz fel a T_3 hőmérsékleten, s a T_2 hőmérsékleten ad le hőt. A két gép összekapcsolásával kapott gép tehát Q_1 hőt vesz fel T_1 hőmérsékleten és Q_2 -t ad le T_2 -n, s így megfelel egy harmadik, T_1 és T_2 hőmérsékletek között működő gépnek. Mint az első főtételből közvetlenül látható, az összetett gép $W_{13} - W_{32}$ munkája valóban megegyezik W_{12} -vel, a harmadik gép munkájával:

$$\begin{aligned} W_{13} - W_{32} &= (Q_1 - Q_3) - (Q_2 - Q_3) = \\ &= Q_1 - Q_2 = W_{12}. \end{aligned} \quad (44.8)$$

Ezután hozzákezdhetünk a gépek hatásfoka közötti összefüggés meghatározásához, hiszen az előzőkből világosan látható, hogy feltétlenül lennie kell valamilyen összefüggésnek a T_1 és T_3 , T_2 és T_3 , ill. T_1 és T_2 hőmérsékletek között működő gépek hatásfoka között.

Gondolatmenetünk igen egyszerű. Mint láttuk, a T_1 hőmérsékleten felvett és T_2 -n leadott hő kapcsolata könnyen megadható, ha tudjuk, mekkora gépünk hőleadása egy harmadik, T_3 hőmérsékleten. Ha önkényesen bevezetünk egy alaphőmérsékletet, s feltesszük, hogy a gép mindig ezen a hőmérsékleten ad le hőt, akkor ebből az analízisből a gép valamilyen tulajdonságát megkapjuk. Más szavakkal: ha ismernénk egy olyan gép hatásfokát, amely T és egy önkényesen rögzített standard hőmérséklet között működne, akkor tetszőleges más hőmérsékletkülönbségre is ki tudnánk számítani a hatásfokot. Mivel csak reverzibilis gépekkel foglalkozunk, a véghőmérséklethez mindig eljuthatunk úgy, hogy először a kezdeti hőmérséklettől a standard hőmérsékletig, majd a standard hőmérsékletől a véghőmérsékletig működtetjük a gépet. Nevezzük a standard hőmérsékletet önkényesen *egy foknak* (1°). Vezessünk be külön jelölést a standard hőmérsékleten leadott hőre is: legyen ez Q_s . Mint a három, különböző hőmérsékleten működő géppel kapcsolatban már megmutattuk, ha egy T_1 hőmérsékleten Q_1 hőt felvevő gép 1° -on Q_s hőt ad le, s ha egy T_2 hőmérsékleten Q_2 hőt felvevő gép 1° -on ugyan-

csak Q_s hőt ad le, akkor egy T_1 -en Q_1 hőt felvevő gép T_2 -n Q_2 hőt ad le.

Mindössze azt kell tehát kiszámítanunk, hogy mekkora Q_1 hőt kell felvennie egy gépnek T_1 hőmérsékleten ahhoz, hogy 1° hőmérsékleten adott Q_s hőt adjon le. Ha ezt kiszámítottuk, akkor feladatunkat meg is oldottuk. Vezessük be Q_1 , T_1 helyett a Q , T jelölést. A Q hő természetesen függ a T hőmérséklettől, mégpedig vele együtt növekszik, hiszen, mint tudjuk, ahhoz, hogy egy gépet fordított irányban működtessünk és így a hőt alacsonyabbról magasabb hőmérsékletre vigyük át, munkát kell végeznünk. Az is könnyen látható, hogy a Q hő arányos Q_s -sel. Az általános törvény tehát a következő: az a Q hő, amelyet egy gépnek T hőmérsékleten fel kell vennie ahhoz, hogy 1° hőmérsékleten Q_s hőt adjon le, a Q_s hőnek és a T hőmérséklet valamilyen monoton növekvő függvényének szorzataként írható fel, vagyis

$$Q = Q_s f(T). \quad (44.9)$$

44.5 A termodinamikai hőmérséklet

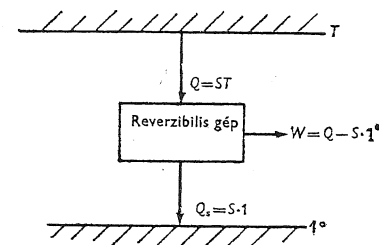
Ne foglalkozunk most azzal, hogy mi is az $f(T)$ monoton növekvő függvény pontos alakja, ha T a megszokott, higanyos hőmérőn leolvasott hőmérséklet, hanem ehelyett *válasszunk egy új hőmérsékleti skálát*. Régen a „hőmérsékletet” önkényesen úgy definiálták, hogy a víz hőtágulásának nagyságát egyenlő részekre osztották. Az így kapott fokbeosztás higanyos hőmérőn nem adódik teljesen egyenletesnek. *Jelenlegi tudásunk alapján viszont már a specidális anyagi tulajdonságoktól függetlenül is definiálni tudjuk a hőmérsékletet*. Felhasználhatjuk erre az $f(T)$ függvényt, amely nem függ a gép szerkezetétől, hiszen a reverzibilis gép hatásfoka nem függ a munkaközeg fajtájától. Mivel a kapott függvény a hőmérséklettel monoton nő, definiáljuk *magát ezt a függvényt hőmérsékletként*, s egységeként válasszuk az 1° standard hőmérsékletet, vagyis legyen

$$Q = ST, \quad (44.10)$$

ahol

$$S = Q_s/1^\circ. \quad (44.11)$$

Eszerint valamely test hőmérsékletét úgy határozhatjuk meg, hogy a testet és az 1° hőmérsékletű hőtartályt reverzibilis gép közbeiktatásával kapcsoljuk össze, s megmérjük, hogy a felvett hő hányszorosa a leadott hőnek (44.9 ábra). Ha pl. a testől elvont hő az 1° hőmérsékletű hőtartálynak leadott hő hétszerese, akkor a test hőmérséklete 7° stb. Így a különböző hőmérsékleteken felvett hőmennyiségek mérésével meghatározhatjuk a hőmérsékleteket. Az így definiált hőmérséklet az anyagi minőségétől független, neve: *termodinamikai* (abszolút) *hőmérséklet*. A következőkben a hőmérsékletnek kizárólag ezt a definícióját alkalmazzuk*.



44.9 ábra. Az abszolút termodinamikai hőmérséklet

Ha van két gépünk, s az egyik T_1 és 1° , a másik T_2 és 1° között működik, s 1° -on ugyanakkora hőt adnak le, akkor az előzők alapján:

$$\frac{Q_1}{T_1} = S = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.12)$$

* A hőmérsékleti skálát korábban ettől eltérően úgy definiáltuk, hogy ideális gázban a molekulák átlagos kinetikus energiáját a hőmérséklettel arányosnak tekintettük, ill. az ideális gáztörvényben pV -t T -vel arányosnak vettük. Ekvivalens ezekkel az új definíció? Igen, mivel a gáztörvényből levezetett (44.7) összefüggés megegyezik az itt levezetett képletünkkel. Erre a kérdésre a következő fejezetben még visszatérünk.

Eszerint, ha egy gép T_1 és T_2 között működik, és T_1 hőmérsékleten Q_1 hőt vesz fel, T_2 hőmérsékleten pedig Q_2 hőt ad le, akkor — s ez egész meggondolásunk végeredménye — Q_1 úgy aránylik T_1 -hez, ahogyan Q_2 aránylik T_2 -höz. Feltéve, hogy a gép reverzibilis, ez az összefüggés a felvett és leadott hő között mindig fennáll. Ez az egész termodinamika lényege amely magában foglalja mindazt, amiről a továbbiakban szó lesz.

Ha valóban csak ennyiből áll az egész termodinamika, akkor miért tartják azt olyan nehéz tudománynak? Nos, tegyük fel, hogy le akarjuk írni egy anyag viselkedését. Ha az anyag mennyisége adott, akkor hőmérsékletének és térfogatának megadásával bármely időpillanatban leírhatjuk állapotát. Ha ismerjük a térfogatot és a hőmérsékletet, s tudjuk, hogy ezeknek milyen függvénye a nyomás, akkor ismerjük a belső energiát is, de tekinthetjük a térfogatot a hőmérséklet és a nyomás függvényének, s hozzá hasonlóan a belső energiát is, és így tovább. Nohát ezért olyan nehéz a termodinamika, mert mindenki másképp kezd hozzá!

Foglalkozunk most tételünk következményeivel. Éppúgy, mint ahogy az $F = ma$ összefüggés a mechanika alaptörvénye, s minden más csak számolási probléma, most talált törvényünk is magában foglalja az egész termodinamikát. De vajon mire következtethetünk ebből a törvényből?

Először is, ha az energiamegmaradás törvényét kombináljuk most kapott, Q_1 és Q_2 kapcsolatát megadó törvényünkkel, könnyen kiszámíthatjuk egy reverzibilis gép hatásfokát. Az első főtétel szerint ugyanis $W = Q_1 - Q_2$, új törvényünk szerint viszont

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1,$$

ezek alapján a végzett munka:

$$W = Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.13)$$

E képlet megadja, hogy mennyire „hatásosan” működik gépünk, vagyis adott hő felhasználásával mennyi munkát végez. A gép hatásfoka tehát a T_1 és T_2 közti hőmérsékletkülönbségnek és T_1 -nek, a magasabb hőmérsékletnek a hányadosa:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.14)$$

A hatásfok nem lehet egynél nagyobb, az abszolút hőmérséklet pedig nem lehet zérusnál — az abszolút zérusnál (!) — kisebb. Így, mivel T_2 pozitív, a hatásfok mindig kisebb egynél. Ez törvényünk első következménye.

44.6 Az entrópia

A (44.7) vagy (44.12) egyenletet igen érdekesen értelmezhetjük. Ha gépünk reverzibilis, akkor $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$, és azt mondhatjuk, hogy Q_1 hő a T_1 hőmérsékleten és Q_2 hő a T_2 hőmérsékleten „ekvivalens” abban az értelemben, hogy az egyik felvétele a másik leadását vonja maga után. Célszerűnek látszik tehát a Q/T hányadost külön mennyiségnek tekinteni; e mennyiségből egy reverzibilis ciklus során ugyanannyi nyelődik el, mint amennyi felszabadul, vagyis Q/T nem csökken és nem is nő. Ezt a Q/T mennyiséget *entrópiának* nevezzük azt mondhatjuk, hogy „egy reverzibilis ciklusban az entrópia eredő megváltozása zérus”. Ha $T = 1^\circ$, akkor az entrópia $Q_s/1^\circ$, vagyis korábbi (44.11) jelölésünkkel $Q_s/1^\circ = S$. Az entrópia, amelynek általánosan elfogadott jele S , számértékben tehát megegyezik Q_s -sel, vagyis az 1° hőmérsékletű tartálynak leadott hővel (maga az entrópia nem hő, dimenziója J/K).

Arra az érdekes eredményre jutottunk tehát, hogy a nyomás és a belső energia mellett, amelyek a hőmérséklet és a térfogat függvényei, még egy mennyiség van — az anyag entrópiája —, amely csak az állapot függvénye.

Foglalkozunk kissé részletesebben az entrópia mérésével, s próbáljuk megmagyarázni, mit értünk azon, hogy az entrópia „állapot-

függvény”. Tekintsük egy rendszer két különböző állapotát. Esetünk ahhoz a kísérlethez hasonló, melynek során a gáz adiabatikus és izotermikus térfogatváltozásait vizsgáltuk. A p - V -diagramra tetszőleges görbét berajzolhatunk; minden ilyen görbéhez hozzárendelhető a gáz reverzibilis állapotváltozásainak egy sorozata. Válasszuk ki egy görbét a gáz kezdő- és végállapotának megfelelő a és b pont között. Tegyük fel, hogy az a -ból b -be vezető görbe minden pontján van egy kis hőtartályunk, amelyeknek hőmérséklete sorra megegyezik a görbe megfelelő pontjához tartozó hőmérséklettel, tehát a gáz az elemi állapotváltozások során felszabaduló DQ elemi hőt mindig reverzibilisen adja át a hozzá tartozó hőtartálynak. Kapcsoljuk össze ezután mindegyik hőtartályt egy-egy reverzibilis gépet közbeiktatva, ugyanazzal az egységnyi hőmérsékletű hőtartállyal. Miután az anyagot átvittük az a -ból a b állapotba, állítsuk vissza a kis hőtartályok eredeti állapotát. Végeredményben tehát az állapotváltozások során különböző hőmérsékleteken felszabadult DQ elemi hőket reverzibilis gépek munkává alakították, s az egységnyi hőmérsékleten az egyes gépek

$$dS = DQ/T \quad (44.15)$$

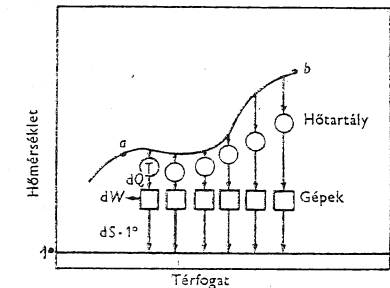
entrópiát adtak le.

Számítsuk ki a teljes leadott entrópiát. Az a és b közötti entrópiakülönbség, vagyis az az entrópia, amely speciális reverzibilis folyamatunk elvégzéséhez szükséges, megegyezik a kis hőtartályoktól elvont és egységnyi hőmérsékleten leadott entrópiával:

$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{DQ}{T}. \quad (44.16)$$

Függ-e ez az entrópiakülönbség a választott úttól? Az a -ból a b pontba több úton is eljuthatunk; gondoljunk pl. arra, hogy a 44.6 ábrán látható Carnot-ciklusban a -ból c -be eljuthatunk akár a b , akár a d ponton keresztül, vagyis az izotermikus és adiabatikus szakaszok sorrendjét felcserélhetjük. A kérdés tehát az: ugyanakkora-e az entrópiaváltozás, ha a -ból

b -be két különböző görbén jutunk el (44.10 ábra)? Ugyanakkorának kell lennie, hiszen ha egyik görbén a -ból b -be megyünk, a másikon b -ből a -ba, akkor zárt ciklust kapunk, ami megfelel egy reverzibilis gépnek, s ezért az egységnyi hőmérsékleten leadott hő zérus. Így tehát az a -ból b -be jutáshoz szükséges entrópia nem függ az úttól, csak a végpontoktól. Ezért mondhatjuk azt, hogy az anyag entrópiája csak az állapot függvénye.



44.10 ábra. Az entrópia megváltozása reverzibilis állapotváltozás esetén

Ily módon megadható egy $S(V, T)$ függvény, amelynek az a tulajdonsága, hogy ha az anyagot tetszőleges reverzibilis úton visszük át az egyik állapotból a másikba, akkor a ΔS entrópiaváltozás éppen egyenlő az egységnyi hőmérsékleten leadott hővel, vagyis

$$\Delta S = \int \frac{DQ}{T}, \quad (44.17)$$

ahol DQ az anyagból T hőmérsékleten eltávozó hő. A teljes entrópiaváltozás a kezdeti és végső ponthoz tartozó entrópiák különbsége:

$$\Delta S = S(V_b, T_b) - S(V_a, T_a) = \int_a^b \frac{DQ}{T}. \quad (44.18)$$

Ez az összefüggés nem írja le az entrópiát, csak a két végállapot közötti entrópiakülönbséget határozza meg. Ahhoz, hogy az S függvényt magát meghatározhatassuk, ismernünk

kellene az entrópiát valamelyik speciális állapotban.

Sokáig azt hitték, hogy magának az entrópiának nincsen fizikai jelentése és csak az *entrópiakülönbségek* definiálhatók. Később azonban Nernst kimondta az általa *hőtételek* nevezett törvényt, amelyet a termodinamika harmadik főtételeként is szokás nevezni. E rendkívül egyszerű törvényt itt csupán közöljük, de nem magyarázzuk meg, hogy miért igaz. Nernst posztulátuma egyszerűen azt állítja, hogy az abszolút zérus hőmérsékleten minden test entrópiája zérus. A speciális, $T = 0$ hőmérsékletű állapotokra tehát tudjuk, hogy $S = 0$, s ennek alapján az entrópia értékét bármely más állapotra is meghatározhatjuk.

Támasszuk alá az elmondottakat azzal, hogy kiszámítjuk az ideális gáz entrópiáját. Izotermikus (és egyben reverzibilis) kiterjedéskor $\int DQ/T = QT$, hiszen T állandó, ezért (44.4) szerint az entrópiaváltozás

$$S(V_a, T) - S(V_b, T) = Nk \ln \frac{V_a}{V_b},$$

vagyis $S(V, T) = Nk \ln V$ plusz egy csak a hőmérséklettől függő mennyiség. Milyen függvénye S a T hőmérsékletnek? Reverzibilis adiabatikus kiterjedés esetén, mint tudjuk, *hőcsere nincs*. Így az entrópia V változásakor sem változik, feltéve, hogy $TV^{\kappa-1} = \text{konst}$. Ebből viszont, mint könnyen látható, következik, hogy

$$S(V, T) = Nk \left[\ln V - \frac{1}{\kappa-1} \ln T \right] + a,$$

ahol az a állandó már sem V -től, sem T -től nem függ. (a -t kémiai állandónak nevezik, értéke csak a kérdéses gáz mennyiségétől és anyagi minőségétől függ.) Az a állandót – Nernst tétele alapján – a következőképpen lehet kísérletileg meghatározni. A gázt addig hűtjük, míg cseppfolyós, majd szilárd nem lesz, s végül eléri az abszolút zérus hőmérsékletet (kivételek csak a hélium, amely zérus fokon is cseppfolyós); ekközben minden hőmérsékle-

ten mérjük a felszabadult hőt, majd kiszámítjuk az $\int DQ/T$ integrált. (Az a állandó a Planck-állandó és a kvantummechanika felhasználásával elméleti úton is kiszámítható, de ezzel mi nem foglalkozunk.)

Tekintsük most át az entrópia néhány tulajdonságát. Először is, mint emlékszünk, valamely reverzibilis ciklus a és b pontja között a munkavégző közeg entrópiájának megváltozása $S_b - S_a$. Arra is emlékszünk, hogy állapotváltozás közben a közeg entrópiája – vagyis az egységnyi hőmérsékleten leadott hő – a $dS = DQ/T$ összefüggésnek megfelelően változik, ahol DQ a közegből T hőmérsékleten eltávozó elemi hő.

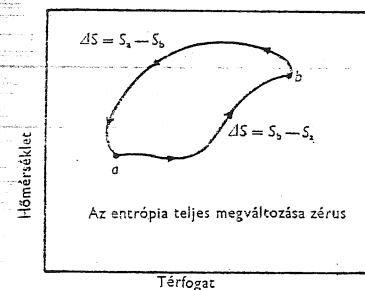
Reverzibilis ciklusban az egész rendszer teljes entrópiája nem változik, hiszen a T_1 hőmérsékleten felvett Q_1 és a T_2 hőmérsékleten leadott Q_2 hő egyenlő nagyságú és ellenkező előjelű entrópiaváltozást jelent. Ez látszólag hasonlít az energiamegmaradás törvényéhez, valójában azonban mégsem megfelelője, mivel csak reverzibilis ciklusokra érvényes. Mivel a valóságos folyamat irreverzibilis, így valójában nem áll fenn semmiféle „entrópiamegmaradási” törvény.

Vizsgáljunk meg két példát. Végezzünk először egy testen irreverzibilis sűrűlódási munkát; a T hőmérsékletű testben létrejövő sűrűlódási hőt jelölje Q . Az entrópia megnövekedése ekkor Q/T . A Q hő egyenlő a végzett munkával, s így ha egy testen W sűrűlódási munkát végzünk, akkor az entrópia növekedése W/T .

Egy másik példa az irreverzibilitásra: ha két különböző, mondjuk T_1 és T_2 hőmérsékletű testet érintkezésbe hozunk, akkor a testek között bizonyos hőcsere megy végbe. Tegyük fel pl., hogy egy forró követ hideg vízbe teszünk. Ha a T_1 -ről T_2 -re transzportálódó hő ΔQ , akkor a kö entrópiája $\Delta Q/T_1$ -gyel csökken, a víz entrópiája pedig $\Delta Q/T_2$ -vel nő. A hő természetesen a magasabb T_1 hőmérsékletről áramlik az alacsonyabb T_2 -re, s így ΔQ pozitív.

Az entrópiaváltozás tehát szintén pozitív:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}. \quad (44.19)$$



44.11 ábra. Az entrópia megváltozása teljes reverzibilis körfolyamatban

Igaz tehát a következő állítás: az entrópiát minden irreverzibilis folyamat növeli. Mivel *reverzibilis folyamat nincs, az entrópia mindig nő*.

Sajnos e könyvben nincs módunk rá, hogy a termodinamika tudományában nagyon elmélyedjünk. Célunk csupán az volt, hogy a fontosabb gondolatokat illusztráljuk.

Az e fejezetben tárgyalt törvényeket a 44.1 táblázatban foglaltuk össze. A következő fejezetben e törvények néhány alkalmazásával foglalkozunk.

44.1. táblázat

A termodinamika törvényeinek összefoglalása

Első főtétel:

A rendszerrel közölt hő + a rendszeren végzett munka = a rendszer belső energiájának megnövekedése:

$$Q + W = \Delta U$$

Második főtétel:

Nem valósítható meg olyan folyamat, amelynek az az *egyedüli* eredménye, hogy egy hőtartálytól hőt vonunk el és azt munkává alakítjuk. Nem lehetséges, hogy egy olyan gép, amely T_1 hőmérsékleten vesz fel Q_1 hőt, és T_2 hőmérsékleten ad le Q_2 hőt, több munkát végezzen, mint a megfelelő reverzibilis gép, amelyre

$$W = Q_1 - Q_2 = Q_1 \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right).$$

Egy rendszer entrópiájának definíciója:

- Ha egy T hőmérsékletű rendszerrel reverzibilisen ΔQ hőt közlünk, akkor a rendszer entrópiájának növekedése $\Delta S = \Delta Q/T$.
 - A $T = 0$ hőmérsékleten $S = 0$ (*harmadik főtétel*).
- Reverzibilis változás* esetén az egész rendszer (a hőtartályokat is beleértve) entrópiája nem változik.
- Irreverzibilis változás* esetén a rendszer teljes entrópiája mindig növekszik.

45 A termodinamika alkalmazása

45.1 A belső energia

Akkor lesz csak igazán nehéz a termodinamika, amikor alkalmazásait kezdjük tárgyalni. Bár a mérnököket és a vegyészeket ez a témakör módfelett érdekelné, könyvünkben csak a fizikai gondolat ismertetésére szorítkozunk. A kérdések iránt részletesebben érdeklődő olvasóinknak a termodinamikával foglalkozó szakkönyvek tanulmányozását ajánljuk*.

A továbbiakban a *hőmérséklet* és a *térfogat* tekintjük független változónak és két függő változót vizsgálunk, a belső energiát és a nyomást. Ezek segítségével bármely más termodinamikai függvény előállítható.

Kezdjük egy kis matematikával. Ha egy mennyiség két változótól függ, akkor differenciálhányadosát nem definiálhatjuk olyan egyszerűen, mint az egyváltozós esetben. Mit értsünk a nyomás hőmérséklet szerinti differenciálhányadosán? A hőmérsékletváltozás okozta nyomásváltozás természetesen attól is függ, hogy a hőmérséklet változása közben hogyan változik a *térfogat*. A hőmérséklet szerinti differenciálhányadosnak csak akkor

* A modern termodinamika magyar nyelvű monográfiája *Fényes I.*: Termosztatika és termodinamika (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.) c. könyve. A témakör népszerű ismertetései *Fényes I.*: Entrópia (Gondolat, 1962.), illetve *Fizika és világnézet* (Kossuth, 1966.) művei.

A termodinamika néhány különleges kérdésével foglalkozik *Gyarmati I.*: Nemegyensúlyi termodinamika. (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.) c. műve.

Újabb összefoglaló mű pl. Harmatha A.: Termodinamika műszakiaknak (Műszaki Könyvkiadó, 1982) c. könyve (Szerkesztő).

lesz pontosan meghatározott értelme, ha megadjuk a térfogat megváltozását. Kérdezhetjük pl. azt, hogy mennyit változik a p nyomás a T hőmérséklet kis megváltozásakor, ha közben a V térfogat nem változik. Az így kapott megváltozások hányadosa éppen a közönséges differenciálhányados, amelynek szokásos jelölése dp/dT . A p nyomás azonban T -n kívül még egy másik változótól, V -től is függ, amelyet azonban állandónak tartunk. Emlékeztetőül ezt a differenciálhányadost általában $\partial p/\partial T$ -vel jelöljük. Mí, amellett, hogy a ∂ szimbólumot használjuk, hangsúlyozva ezzel, hogy valamilyen más változót állandó értéken tartunk, ezt az állandó értéken tartott változót indexben le is írjuk: $(\partial p/\partial T)_p$. Mivel csak két független változónk van, erre tulajdonképpen nem lenne szükség, de ennek segítségével könnyebben tájékozódunk a termodinamika parciális differenciálhányadosai körében.

Tekintsük az x , y független változók $f(x, y)$ függvényét. A $(\partial f/\partial x)_y$ szimbólummal azt a közönséges differenciálhányadost jelöljük, amelyet akkor kapunk, ha y -t állandó értéken tartjuk:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Hasonlóan:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Ha pl. $f(x, y) = x^2 + yx$, akkor $(\partial f/\partial x)_y = 2x + y$ és $(\partial f/\partial y)_x = x$.

E jelölést magasabb differenciálhányadosokra is kiterjeszthetjük: $\partial^2 f/\partial y^2$, $\partial^2 f/\partial y \partial x$, amelyek közül pl. a második azt jelenti, hogy az f függvényt először y -t állandónak tekintve x , majd x -et állandónak tekintve y szerint differenciáljuk. A differenciálások sorrendje

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = \\ &= \underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}_{\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y} + \underbrace{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}_{\Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x} \end{aligned} \quad (45.1)$$

Ezzel megkaptuk a Δf és a Δx , Δy megváltozások közötti alapvető összefüggést.

Példaként számítsuk ki az $U(T, V)$ belső energia megváltozását, ha a hőmérséklet T -ről $T+\Delta T$ -re, a térfogat pedig V -ről $V+\Delta V$ -re változik. A (45.1) egyenlet felhasználásával

$$\Delta U = \Delta T \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \Delta V \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \quad (45.2)$$

Az előző fejezetben a belső energia ΔU megváltozásának egy másik, a Q hőközlést tartalmazó alakjára jutottunk:

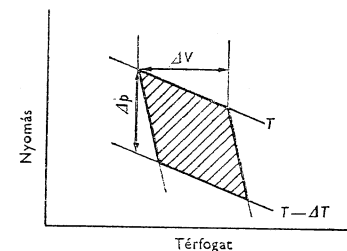
$$\Delta U = Q - p\Delta V \quad (45.3)$$

A (45.2) és (45.3) képletet összehasonlítva első pillanatban azt hihetnénk, hogy $p = (\partial U/\partial V)_T$, ami azonban nem igaz. A helyes összefüggés kiszámításához tegyük fel először, hogy miközben a gázzal Q hőt közlünk, a térfogatot nem változtathatjuk, azaz $\Delta V = 0$. Ekkor (45.3) szerint $\Delta U = Q$, (45.2) alapján pedig $\Delta U = (\partial U/\partial T)_V \Delta T$, s így $(\partial U/\partial T)_V = Q/\Delta T$. A $Q/\Delta T$ hányadost, vagyis azt a hőt, amelyet valamely anyaggal állandó térfogaton közölve, annak hőmérsékletét egy fokkal emeli, *állandó térfogathoz tartozó fajhőnek* nevezzük, és c_V -vel jelöljük. Megmutattuk tehát, hogy

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = c_V \quad (45.4)$$

Közöljünk most a gázzal ismét Q hőt, de ez esetben T legyen állandó, s a térfogat változzék meg ΔV -vel. Ez az eset bonyolultabb az előzőnél, de az előző fejezetben tárgyalt Car-

not-körfolyamat alapján mégis ki tudjuk számítani U megváltozását. A Carnot-körfolyamat p - V diagramja a 45.1 ábrán látható. Mint már bebizonyítottuk, a gáz teljes munkája egy reverzibilis ciklusban $Q(\Delta T/T)$, ahol Q a gázzal T hőmérsékleten közölt hő, miközben a térfogat az izotermikus expanzió során V -ről $V+\Delta V$ térfogatra változik, $T-\Delta T$ pedig a második, adiabatikus szakaszban elért végső hőmérséklet. Azt állítjuk, hogy e munka megegyezik a 45.1 ábra bevonalkázott tartományának területével.



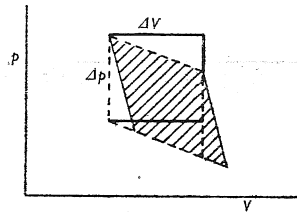
45.1 ábra. Carnot-körfolyamat nyomás - térfogat-diagramja

A T és $T-\Delta T$ jelzésű görbék izotermák, a meredekebb görbék adiabaták; ΔV a térfogat megváltozása, miközben a gázzal állandó T hőmérsékleten Q hőt közlünk; Δp a nyomásváltozása, állandó térfogat esetén, miközben a gáz hőmérséklete T -ről $T-\Delta T$ -re változik

A gáz munkája, mint tudjuk, $\int p dV$, s e munka a gáz kiterjedésekor pozitív, komprimálásakor pedig negatív. A p - V görbe V minden egyes értékéhez megadja a megfelelő p értéket. A gáznak a térfogatváltozás során végzett munkája, $\int p dV$, megegyezik a V tér-

fogat kezdeti és végső értéke közötti görbeszakasz alatti területtel. Ezt a Carnot-körfolyamatra alkalmazva könnyen látható, hogy ha az egész cikluson végigmegyünk, s eközben vigyázunk, hogy a gáz által végzett munkát mindig a helyes előjellel vegyük, akkor a gáz eredő munkájaként valóban a 45.1 ábra vonalkázott területét kapjuk.

Határozzuk meg ezt a területet. A 45.1 ábrán látható ciklus az előző fejezetben szerep-



45.2 ábra. A vonalkázott terület = a szaggatott vonalakkal körülhatárolt terület = a négyzet területe = $\Delta p \Delta V$

$$\left. \begin{aligned} \text{A gáz által végzett munka} &= \text{bevonalkázott terület} = \Delta V \Delta p = Q \left(\frac{\Delta T}{T} \right), \\ \text{vagy} \\ \frac{\Delta T}{T} \cdot (V\text{-nek } \Delta V\text{-vel való megváltoztatásához szükséges hő})_{\text{állandó } T} &= \\ = \Delta V \cdot (p \text{ megváltoztatása } T\text{-nek } \Delta T\text{-vel való megváltozásakor})_{\text{állandó } V}, \\ \text{vagy} \\ \frac{1}{\Delta V} (V\text{-nek } \Delta V\text{-vel való megváltoztatásához szükséges hő})_T &= T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V. \end{aligned} \right\} (45.5)$$

Ez az egyenlet magában foglalja Carnot megfontolásainak legfontosabb eredményét. A (45.5) egyenlet lényegében véve éppen a második főtételt adja, bár ezt Carnot – mivel a hőmérsékletnek nem általunk használt definícióját használta – eredetileg kissé más alakban vezette le.

Ezek után már hozzáláthatunk $(\partial U / \partial V)_T$ meghatározásához. Mennyivel változik az U belső energia, ha állandó hőmérsékleten a térfogatot ΔV -vel megváltoztatjuk? U egyrészt azért változik, mert a gázzal hőt közlünk, másrészt azért, mert a gáz munkát végez. A közölt

lőtől csak annyiban tér el, hogy a ΔT és Q változást most végtelen kicsinynek tekintjük. Mind az adiabatikus, mind az izotermikus vonalak igen közel vannak egymáshoz, s ha a ΔT és Q növekmények zérushoz tartanak, a 45.1 ábrán vastagon kihúzott idom egyre inkább megközelíti a paralelogrammát. E paralelogramma területe éppen $\Delta V \Delta p$, ahol ΔV a gáz térfogatváltozása, ha állandó hőmérsékleten Q hőt vesz fel, Δp pedig a nyomásváltozás, miközben az állandó térfogatú gáz hőmérséklete ΔT -vel változik. Az, hogy a 45.1 ábrán bevonalkázott tartomány valóban $\Delta V \Delta p$, könnyen belátható, ha a 45.2 ábrát szemügyre vesszük. Ezen a bevonalkázott terület megegyezik a szaggatott vonallal körülhatárolt területtel, amely viszont a Δp , ΔV oldalakkal jellemzett téglalapról egybevágó háromszögek hozzáadásával, ill. levonásával nyerhető.

Összegezzük eddigi megfontolásunk eredményeit:

hő (45.5) szerint

$$Q = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V,$$

a gázon végzett munka pedig $-p \Delta V$. A belső energia ΔU megváltozása így a következő két részből tevődik össze:

$$\Delta U = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V - p \Delta V. \quad (45.6)$$

Mindkét oldalt ΔV -vel osztva megkapjuk U -nak V szerinti differenciálhányadosát, ha

T állandó:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p. \quad (45.7)$$

A mi termodinamikánkban, amelyben T és V az egyetlen változó kombináció s ezeknek is csak két függvényével, p -vel és U -val foglalkozunk, (45.3) és (45.7) adja azt a két összefüggést, amelyből minden további eredmény levezethető.

45.2 Alkalmazások

Foglalkozunk most kicsit részletesebben a (45.7) egyenlet jelentésével, s nézzük meg, hogyan ad választ az előző fejezetben felvetett kérdésekre. Problémánk a következő volt. A kinetikus elméletben a hőmérséklet növelésével nyilvánvalóan a nyomás is növekedik, hiszen magasabb hőmérsékleten a molekulák erősebben „bombázzák” a dugattyút. Ugyanez a fizikai oka annak is, hogy a dugattyú visszahúzódsakor a gáz hőmérséklete csökken, és ahhoz, hogy ez ne következzen be, hőt kell a gázzal közölnünk. A gáz kiterjedésekor lehűl, melegítéskor pedig nyomása növekszik. E két jelenség között kell lennie valamilyen összefüggésnek, melyet éppen a (45.7) egyenlet ad meg. Ha az állandó térfogatú gáz hőmérsékletét egy fokkal növeljük, a nyomás megváltozását $(\partial p / \partial T)$ - adja. Ezzel szorosan összefügg a következő: a térfogat növelésekor a gáz lehűl, s hogy hőmérséklete állandó maradjon, hőt kell közölnünk vele, melynek nagyságát éppen $(\partial U / \partial V)_T$ határozza meg. E két effektus között (45.7) adja meg az összefüggést. Éppen ez az az alapvető összefüggés, amelyet a termodinamikai tanulmányaink elején jeleztünk. Így most a gáz belső szerkezetének ismerete nélkül, egyedül annak alapján, hogy másodfajú perpetuum mobile nem készíthető, meg tudjuk adni az összefüggést a gáz kiterjedésekor az állandó hőmérséklet fenntartásához szükséges hő mennyisége, valamint a gáz nyomásának melegítéskor bekövetkező megváltozása között!

Most, hogy a gázokra már megkaptuk a keresett összefüggést, vizsgáljuk meg a gumiszalag problémáját. Ha a gumiszalagot megnyújtjuk, hőmérséklete csökken, ha pedig melegítjük, akkor összehúzódik. Milyen egyenlet adja ugyanazt az eredményt gumiszalagokra, amit a (45.3) adott gázokra? Ha egy gumiszalaggal Q hőt közlünk, belső energiája ΔU -val megváltozik és a szalag bizonyos munkát végez. Ez a munka azonban nem $p \Delta V$, mint gázok esetében, hanem $-F \Delta L$, ahol F a szalagot kifeszítő erő és L a szalag hossza. Az F erő a hőmérsékletnek és a szalag hosszának a függvénye. A (45.3) egyenletben a $p \Delta V$ tagot $-F \Delta L$ -el helyettesítve a következőt kapjuk:

$$\Delta U = Q + F \Delta L. \quad (45.8)$$

Mint (45.3) és (45.8) összehasonlításából látható, a gázra és a gumiszalagra kapott egyenlet között csak annyi a különbség, hogy bennük egy-egy betű helyett más szerepel. Ha nemcsak a képletben, hanem egész levezetésünkben V -t L -l, p -t pedig $-F$ -fel helyettesítjük, akkor éppen a gumiszalagra érvényes analóg levezetést kapjuk. Ebből pl. közvetlenül látható, hogy a szalag hosszának ΔL megváltoztatásához szükséges hőt a (45.5)-tel analóg $Q = -T(\partial F / \partial T)_L \Delta L$ összefüggés adja. Mít jelent ez az egyenlet? Megadja, hogy hogyan számíthatjuk ki egy rögzített hosszúságú, melegített gumiszalag húzóerejének megnövekedését annak a hőnek az ismeretében, amely a szalag kis megnyújtásakor az állandó hőmérséklet fenntartásához szükséges. A gázra és a gumiszalagra tehát ugyanaz az egyenlet érvényes. Még általánosabban, ha egy rendszer belső energiájának megváltozása $\Delta U = Q + A \Delta B$ alakba írható, ahol A és B különböző mennyiségeket, pl. erőt és hosszúságot, nyomást és térfogatot stb. jelölhet, akkor a gázra kapott eredmények p -t és V -t A -val és B -vel helyettesítve, e rendszerre is átvihetők.

Tekintsünk pl. egy T telepet, amelynek feszültsége U_T . A telepen haladjon át ΔZ töltés. Mint tudjuk, a reverzibilis telepben (akkumulátorban) ekkor a munkavégzés $U_T \Delta Z$.

(Hogy a munkában a $p\Delta V$ tag ne lépjen fel, tegyük fel, hogy telepünk térfogata állandó.) Mit mond a termodinamika a telep teljesítményéről? A (45.6) egyenletben p -t U_T -vel, V -t pedig Z -vel helyettesítve a következő összefüggésre jutunk:

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = -T \left(\frac{\partial U_T}{\partial T} \right)_Z - U_T. \quad (45.9)$$

A (45.9) egyenlet megadja, hogyan változik meg a telep U belső energiája, ha a telepen ΔZ töltés halad át. Miért nem egyenlő $\Delta U/\Delta Z$ egyszerűen a telep feszültségével, U_T -vel? Azért, mert a telep — miközben töltés halad át rajta — felmelegszik, s így belső energiája nemcsak a külső áramkörön végzett munka, hanem a melegedés miatt is változik. Igen érdekes az, hogy a telep feszültség hőmérsékletfüggésének segítségével a változásnak ez a másik része is kifejezhető. Miközben a töltés áthalad a telepen, kémiai reakciók mennek végbe, így tehát (45.9) alapján ezek energiaszükségletét mérhetjük. Csupán egy olyan telepet kell szerkesztenünk, amely a bennünket érdeklő reakció alapján működik, s meg kell mérnünk zérus áthaladó áram esetén a telep feszültségét, valamint a feszültség hőmérsékletfüggését.

Az előzőekben feltettük, hogy a telep térfogata állandó értéken tartható, hiszen a munkát egyszerűen $U_T \Delta Z$ -nek vettük és a $p\Delta V$ tagot elhagytuk. Az állandó térfogat azonban technikailag igen nehezen valósítható meg. Sokkal könnyebb a telepet állandó nyomáson tartani. Olyan egyenletekre van szükségünk, amelyek az *állandó nyomáson* vett teljesítményt írják le. Fejezetünk elején független változóul V -t és T -t választottuk. Megmutatjuk, hogyan transzformálhatók át eddigi eredményeink a vegyszerek számára alkalmasabb p és T változókra. Jól át kell gondolnunk az áttérés menetét, mert az egyik változó párról a másikra való „átkapcsoláskor” könnyen tévedtünk!

Kiindulásunk a $\Delta U = Q - p\Delta V$ összefüggés volt; ebben $p\Delta V$ helyett természetesen $U_T \Delta Z$ vagy $A\Delta B$ is állhat. Ha az utolsó, $p\Delta V$ tag helyébe $V\Delta p$ -t tudnánk írni, p és V szerepe fel-

cserélődne, s a vegyszerek boldogok lennének. Nos, az okos ember észreveszi, hogy a pV szorzat differenciálja $d(pV) = p dV + V dp$, s ezt hozzáadva (45.3)-hoz

$$\frac{\Delta(pV) + \Delta U = Q - p\Delta V}{\Delta(U+pV) = Q + V\Delta p}.$$

Hogy (45.3)-hoz hasonló alakra jussunk, tekintjük $U+pV$ -t egyetlen mennyiségnek, jelöljük H -val és nevezzük *entalpiának*; e jelöléssel $\Delta H = Q + V\Delta p$.

Most már át tudjuk transzformálni eredményeinket, hiszen csupán az $U \rightarrow H$, $p \rightarrow -V$, $V \rightarrow p$ helyettesítéseket kell elvégeznünk. Így pl. (45.7) helyett a következő összefüggést használhatjuk:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V.$$

Reméljük, ez mindenki számára világos, és visszatérhetünk eredeti változóinkhoz! A fejezet hátralevő részében ismét T és V lesz a független változó.

Alkalmazzuk eredményeinket különböző fizikai rendszerekre. Kezdjük az ideális gázzal. A kinetikus elméletből tudjuk, hogy a gáz belső energiája csak a molekulák sebességétől és számától függ. A belső energia tehát függ T -től, de független V -től. Ha V -t változtatjuk, de T -t nem, akkor U nem változik. Így tehát $(\partial U/\partial V)_T = 0$, s (45.7) ideális gázra a következő alakba írható:

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p = 0. \quad (45.10)$$

Mint látható, (45.10) p -re nézve differenciál-egyenlet. Az állandó V mellett vett parciális differenciálhányadost helyettesítsük közönséges differenciálhányadossal, s emlékeztetőül írjuk ki külön, hogy $V = \text{konst.}$ Így (45.10)-ből

$$T \left(\frac{dp}{dT} \right) - p = 0; \quad V = \text{konst.} \quad (45.11)$$

Ezt kiintegrálva:

$$\ln p = \ln T + \text{konst.}; \quad V = \text{konst.},$$

vagy

$$p = \text{konst.} \cdot T; \quad V = \text{konst.} \quad (45.12)$$

Az ideális gáz nyomása, mint tudjuk,

$$p = \frac{RT}{V}. \quad (45.13)$$

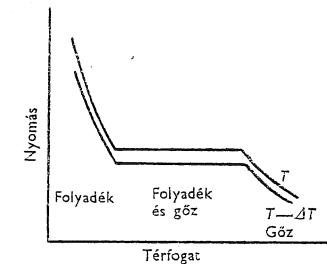
ami összhangban van (45.12)-vel, hiszen V és R állandó.

De miért volt szükség erre a számításra, ha már előre tudtuk az eredményt? Azért, mert a *hőmérsékletre két teljesen független definíció használtunk!* Először feltételeztük, hogy a molekulák kinetikus energiája arányos a hőmérséklettel, s ezzel egy hőmérsékleti skálát definiáltunk, amelyet „ideálisgázkálának” fogunk nevezni. A (45.13)-ban szereplő T az ideálisgázkálán mért hőmérsékletet jelöli. Ezt a hőmérsékletet *kinetikus* hőmérsékletnek is szokták nevezni. A hőmérsékletre később egy másik, minden speciális anyagi tulajdonságtól független definíciót is adtunk: a második főtétel alapján definiáltuk a „*termodinamikai* hőmérsékletet”. E T hőmérséklet jelenik meg (45.12)-ben. Azt bizonyítottuk tehát be, hogy az ideális gáz nyomása (az ideális gázt itt azzal a tulajdonságával definiáljuk, hogy belső energiája a térfogattól független) arányos a termodinamikai hőmérséklettel. Másrészt tudjuk, hogy e nyomás a gázkálán mért hőmérséklettel is arányos. Ebből viszont már következik, hogy a kinetikus hőmérséklet arányos a termodinamikai hőmérséklettel. Ha el akarjuk kerülni a felesleges komplikációkat, akkor a két skálát azonosnak választjuk. *Valóban* ez is történt: a két hőmérsékleti skála között az arányossági tényezőt egynek választották. Az emberek legtöbbször a nehezebb utat választják, itt azonban szerencsére nem ez történt!

45.3 A Clausius—Clapeyron-egyenlet

Alkalmazzuk eredményeinket a párolgó folyadékok jellemzőinek kiszámítására. Vizsgáljuk meg, hogy egy folyadékot tartalmazó, dugattyúval lezárt hengerben hogyan változik a

nyomás a térfogat függvényében állandó hőmérsékleten, vagyis próbáljunk berajzolni egy izotermát a p — V diagramra. A hengerben levő anyag most nem a korábban tárgyalt ideális gáz, hanem folyadék vagy gőz, esetleg mindkettő. Ha a nyomás elég nagy, az egész anyag cseppfolyósodik. A nyomás további növelésekor a térfogat alig változik, és így izotermánk, mint a 45.3 ábra bal oldalán látható, a térfogat csökkenésével meredeken emelkedik.



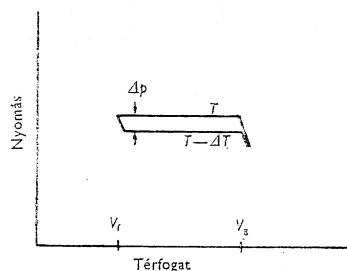
45.3 ábra. Folyadék—telítettség-gőz-rendszer izotermái

A bal oldalon a teljes anyag cseppfolyós, a jobb oldalon gőz halmazállapotú, míg középen mind a folyadék-, mind a gőzfázis jelen van

Ha a dugattyú kihúzásával a térfogatot növeljük, a nyomás mindaddig csökken, amíg a folyadék forrásba nem jön, s meg nem indul a gőzképződés. A dugattyút tovább húzva mindössze annyi történik, hogy több folyadék párolog el. Ha a hengerben folyadék és gőz is van, akkor e két fázis között egyensúlyi állapot alakul ki: a folyadék párolgása és a gőz lecsapódása azonos sebességű lesz. Ha a nyomás állandó értéken tartásához több gőzre van szükség, s így bizonyos folyadékmennyiség elpárolog. A 45.3 ábrán látható görbe vízszintes szakaszán a nyomás állandó marad; e nyomásértéket a *T hőmérséklethez tartozó gőznyomásnak* nevezzük. A térfogatot tovább növelve, a folyadék egyszerűen elfogy és a nyomás a p — V diagram jobb oldalán látható, közönséges gáznak megfelelő görbe szerint csökken. A 45.3 ábrában szereplő alsó görbe

a kissé alacsonyabb, $T - \Delta T$ hőmérsékletre tartozó izoterma. A cseppfolyós fázisban a nyomás az előbbinél valamivel kisebb, mivel a folyadékok a hőmérséklet növelésekor kiterjednek (ami legtöbb folyadékra igaz, de pl. a vízre a fagyponthoz közelében nem), s alacsonyabb hőmérsékleten a gőznyomás természetesen szintén kisebb.

Égészítsük most ki a két izotermát a 45.4 ábrán látható módon körfolyamattá, a vízszintes szakaszok végpontjait pl. adiabatákkal összekötve. Az ábra jobb alsó sarkában látható kis csúcshatásnak nincs lényeges hatása,



45.4 ábra. Folyadék-telítettgőz-rendszerrel végzett Carnot-ciklus nyomás-térfogat-diagramja

Bal oldalon az anyag cseppfolyós halmazállapotú. A folyadék a T hőmérsékleten közzé hatása teljesen elpárolog. A hőmérséklet T -ről $T - \Delta T$ -re csökkenésekor a gáz expanziója adiabatikus

ezért elhanyagolhatjuk. Számításainkban Carnot megmondolására támaszkodhatunk, amely szerint az anyag folyadékból gőzzé alakításához szükséges hő összefügg az anyag teljes ciklusban végzett munkájával. Jelölje L a hengerben levő anyag elpárologtatásához szükséges hőt. A (45.5) egyenletet megelőző megmondolás alapján világos, hogy az anyag által végzett munka $L(\Delta T/T)$. E munkát másrészt az izotermák és adiabaták által közrezárt, közelítőleg $\Delta p(V_g - V_f)$ nagyságú terület adja, ahol Δp a T és $T - \Delta T$ hőmérsékletre tartozó gőznyomások különbsége, s V_g a gáz, V_f pedig a folyadék térfogata (mindkét térfogat az adott gőznyomáson értendő). A két kifejezést egyenlővé téve az $L \Delta T/T = \Delta p(V_g - V_f)$, ill.

az

$$\frac{L}{T(V_g - V_f)} = (\partial p_{g\ddot{o}z} / \partial T) \quad (45.14)$$

egyenletre jutunk. A (45.14) egyenlet megadja az összefüggést a folyadék elpárologtatásához szükséges hő és a gőznyomás hőmérsékletfüggése között. Ezt a kapcsolatot – bár Carnot fedezte fel – Clausius–Clapeyron-egyenletnek nevezzük.

Hasonlítsuk most össze (45.14)-et a kinetikus elmélet eredményeivel. Mivel V -általában sokkal nagyobb V_f -nél, $V_g - V_f \approx V_g = RT/p$ mólonként. Ha emellett feltesszük, hogy L állandó, vagyis független a hőmérséklettől – ami nem nagyon jó közelítés –, akkor azt kapjuk, hogy $\partial p / \partial T = Lp / (RT^2)$. E differenciálegyenlet megoldása

$$p = \text{konst.} \cdot e^{-L/RT}. \quad (45.15)$$

Hasonlítsuk össze ezt a képletet a nyomás kinetikus elméletből kapott hőmérsékletfüggésével. A kinetikus elmélet – legalábbis közvetve – arra utal, hogy a folyadék feletti gőzben a molekulák száma:

$$n = \left(\frac{1}{V_A} \right) e^{-(U_g - U_f) / RT}, \quad (45.16)$$

ahol $U_g - U_f$ a folyadék és a gáz egy molra vonatkoztatott belső energiájának különbsége, vagyis az egy mol folyadék elpárologtatásához szükséges energia. Mivel a nyomás nkT , a termodinamikából kapott (45.15) és a kinetikus elméletből kapott (45.16) egyenlet igen hasonló, de mégsem ugyanaz. Ha viszont $L = \text{állandó}$ helyett azt tételezzük fel, hogy $L - U_g = \text{konst.}$, vagyis független a hőmérséklettől, akkor az a megmondolás, amely az előző feltevéssel (45.15)-re vezetett, most éppen (45.16)-ot adja.

Ez az összehasonlítás megmutatja, hogy milyen előnyei és hátrányai vannak a termodinamikának a kinetikus elmélettel szemben. Először is, a termodinamikából levezetett (45.14) egyenlet pontos, míg (45.16) csak erős közelítéssel érvényes, s még így is csak akkor, ha U közel állandó és a modell jó. Másodszor,

ha nem is tudjuk pontosan, hogyan cseppfolyósodik a gáz, azt mégis tudjuk, hogy (45.14) igaz, míg (45.16) csak közelítés. Harmadszor, bár a levezetés során csak gázok cseppfolyósodására gondoltunk, a végeredmény más halmazállapot-változásokra is igaz: pl. a szilárd–cseppfolyós halmazállapot-változás is a 45.3 és a 45.4 ábrához hasonló görbékkel írható le. Ha a látens olvadáshő molonként M , a (45.14) egyenlet megfelelője a következő: $(\partial p_{olv} / \partial T)_V = M / [T(V_{cs} - V_{sz})]$. Anélkül, hogy az olvadás kinetikus elméletét ismernénk, megkaptuk tehát a helyes összefüggést. Ha viszont ismerjük a kinetikus elméletet, akkor van egy másik előnyünk. A (45.14) egyenlet ugyanis csak a differenciális összefüggést adja meg, az integrálási állandót nem tudjuk belőle meghatározni. Ha viszont modellünk a jelenség teljes leírására jó, akkor a kinetikus elméletből az állandókat is meghatározhatjuk.

Mindkét módszernek van tehát előnye és hátránya is. Ha tudásunk kevésnek bizonyul egy bonyolultabb jelenség vizsgálatához, akkor általában a termodinamikai összefüggéseket ajánlatos alkalmazni. Ha viszont egyszerű, elméletileg könnyen áttekinthető jelenségről van szó, akkor érdemes elvégezni a részletes elemzést, hiszen így több információt kapunk.

Utolsó példaként foglalkozunk a *feketetest sugárzásával*. Korábban már beszéltünk a tisztán sugárzással töltött dobozról, valamint az oszcillátor és a sugárzás közötti egyensúlyról. Megállapítottuk, hogy a doboz falának ütköző fotonok p nyomása a $pV = U/3$ összefüggésnek tesz eleget, ahol U a fotonok összenergiája és V a doboz térfogata. A (45.7) alapegyenletbe az $U = 3pV$ összefüggést behelyettesítve

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 3p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p. \quad (45.17)$$

Mivel dobozunk térfogata állandó, $(\partial p / \partial T)_V$ helyett dp/dT írható, s az így kapott közönséges differenciálegyenlet integrálja

$$\ln p = 4 \ln T + \text{konst.}$$

vagy

$$p = \text{konst.} \cdot T^4.$$

A sugárnyomás tehát a hőmérséklet negyedik hatványával arányos, s mivel $U/V = 3p$, a sugárzás energiasűrűsége is T^4 szerint változik. Ezt az összefüggést $U/V = (4\sigma/c)T^4$ alakban szokták felírni, ahol c a fénysebesség és σ valamilyen állandó, amelynek értéke kizárólag a termodinamika alapján nem határozható meg. Példánk jól mutatja a termodinamika lehetőségeit és korlátait. Nagyon nagy eredmény, ha tudjuk, hogy az U/V hányados T^4 -nel arányos, de ahhoz, hogy értéket bármely hőmérsékleten ki is tudjuk számítani, további részletekre van szükségünk. A feketetest sugárzására van olyan elméletünk, amelynek segítségével a következőkben ki is tudjuk számítani σ értékét.

Jelölje $I(\omega) d\omega$ az intenzitás eloszlását, vagyis az 1 m^2 -en 1 s alatt ω és $\omega + d\omega$ közötti frekvenciával áthaladó energiaáramot. Az energiasűrűség (energia/térfogat) eloszlása = $= I(\omega) d\omega / c$, így

$$\frac{U}{V} = \text{teljes energiasűrűség} = \int_0^\infty \text{energia-sűrűség } \omega \text{ és } (\omega + d\omega) \text{ között} = \int_0^\infty \frac{I(\omega) d\omega}{c}.$$

A korábbiakból tudjuk, hogy

$$I(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar \omega / kT} - 1)}.$$

Helyettesítsük be ezt az $I(\omega)$ kifejezést az U/V -re kapott egyenletünkbe:

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\hbar \omega^3}{e^{\hbar \omega / kT} - 1} d\omega,$$

vagy az $x = \hbar \omega / kT$ helyettesítéssel:

$$\frac{U}{V} = \frac{(kT)^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Ez az integrál egy szám, amelyet közelítőleg úgy határozhatunk meg, hogy görbénket lerajzoljuk egy milliméterpapírra és leszámoljuk a görbe alatt levő kis négyzeteket. Az integrál értéke kb. 6,5-nek adódik, pontos értéke $\pi^4/15^*$. E kifejezést az $U/V = (4\sigma/c)T^4$ összefüggéssel egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\sigma = \frac{k^4 \pi^2}{60 h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

Mennyi energia folyik ki másodpercenként a dobozba vágott egységnyi területű kis lyu-

kon? Az energiaáramra való áttéréskor az U/V energiasűrűséget c -vel kell szoroznunk. Fellép emellett egy $1/4$ -es szorzó is. Egy $1/2$ -es tényező adódik abból, hogy a dobozból csak a *kifelé* folyó energia távozik el, egy másik $1/2$ -es tényező pedig abból, hogy a lyukat derékszögtől eltérő szögben megközelítő áramból kevesebb jut ki, ami egy koszinusz szorzót jelent, s a koszinusz függvény átlaga éppen $1/2$. Most már világos, hogy miért írtuk összefüggésünket $U/V = (4\sigma/c)T^4$ alakba: egy kis lyuk egységnyi területére vonatkozott energiaárama egyszerűen σT^4 .

* Mivel $(e^x - 1)^{-1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots$, az integrál

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^3 dx$$

alakban írható. Felhasználva, hogy $\int_0^{\infty} e^{-nx} dx = 1/n$, s ezt az összefüggést n szerint háromszor differenciálva azt kapjuk, hogy $\int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx = 6/n^4$; az eredeti integrál értéke tehát $6 \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots\right)$,

s ennek az első két tag összege már jó becslését adja. Az 50. fejezetben megismerünk majd egy módszert, amellyel könnyen igazolható, hogy az egész számok negyedik hatványai reciprokának összege valóban $\pi^4/90$.

46 A kilincskerék

46.1 A kilincskerék működése

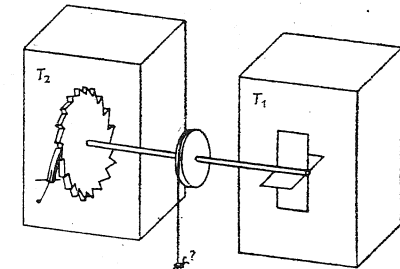
Ebben a fejezetben egy igen egyszerű szerkezettel, a kilincskerékkel foglalkozunk. A kilincskerék feladata az, hogy egy tengely elfordulását csak az egyik irányban engedje meg. Az egyirányú forgás lehetőségének vizsgálata rendkívül gondos, részletes analízist érdemel és néhány érdekes következtetésre nyújt alkalmat.

Az alaposabb elemzés szüksége akkor merült fel, amikor molekuláris vagy kinetikai alapon próbáltuk magyarázni, hogy a hőgép-ből nyerhető munkának van maximuma. Bár Carnot elgondolásának lényegét már láttuk, szeretnénk olyan magyarázatot is találni, amely megmutatná, hogy fizikailag mi megy végbe. Vannak természetesen bonyolult matematikai bizonyítások, amelyek Newton törvényeiből kiindulva megmutatják, hogy adott hőcsere folyamán csak meghatározott mennyiségű munka nyerhető. Ezeket a bizonyításokat azonban igen nehéz elemivé alakítani. Röviden fogalmazva: az egészet nem értjük, bár az egyes matematikai lépéseket követni tudjuk.

Annak bizonyításához, hogy a hőgép két adott hőmérséklet között működtetve egy bizonyos mennyiségű munkánál több nem nyerhető, Carnot egy másik axiómát használt fel: ha minden azonos hőmérsékletű, akkor ciklikus folyamatban a hő nem alakítható munkává. Nézzük meg legalább egyetlen példa kapcsán, hogy miért igaz ez az állítás.

Próbáljunk kitalálni valamilyen egyszerű készüléket, amely megsérti a termodinamika második főtételét, vagyis egyetlen hőtartály felhasználásával munkát végez úgy, hogy min-

den más megtartja eredeti hőmérsékletét. Legyen egy adott T_1 hőmérsékletű gázzal telt dobozban egy szélkerékkel felszerelt tengely (46.1 ábra). Mivel a gázmolekulák állandóan



46.1 ábra. A kilincskerék

bombázzák a szélkerék lapátjait, a szélkerék állandóan rezeg, rázkódi. Nem kell mást tennünk, mint a tengely másik végére egy olyan szerkezetet szerelni, amely csak egyirányú elfordulást enged meg, ennek példája a kilincskerék. Tételezzük fel, hogy a T_2 hőmérséklet T_1 -gyel azonos. Ha a molekulák a lapát egyik oldalának ütköznek, nem fordul el a kerék, ha viszont a másik irányból lökik meg, akkor elfordul. A kerék tehát lassan forogni kezd, s a tengelyre szerelt dobrol lelógó cérnára egy bolhát ráakasztva, a gép még azt is fel tudja emelni! No de lehetséges-e ez? Carnot feltevése szerint *nem!* Pedig ha csak úgy felületesen ránézünk, *első pillantásra* igenis elhíhetőknek tűnik! Vizsgáljuk meg azonban e berendezést kissé alaposabban és ekkor valóban számos probléma merül fel.

Először: bár az idealizált kilinckerek olyan egyszerű, amilyen csak lehet, tartozik hozzá egy kilincs is, és kell lennie egy rugónak is ahhoz, hogy ez minden fog után ismét a kerékhez nyomódjék.

Van még a készüléknek egy másik lényeges tulajdonsága, ami az ábrán nem látható. Mi történne, ha minden alkatrésze tökéletesen rugalmas anyagból készülne? A kilincset a rugó minden fog után a kerékhez lökné, de a kilincs visszapattanna, s ez a pattogás sohasem szűnne meg. A pattogásnak olyan fázisában, amikor a kilincs éppen fent van, a fog, amelyről leugrott, ismét alákerülhetne, tehát a kerék ellenkező irányba is elfordulhatna. Ezt a jelenséget azzal tudjuk elkerülni, ha készülékünkbe egy csillapítómechanizmust iktatunk be, amely megszünteti a rezgést. Csillapításkor a kilincs energiáját természetesen a kerék veszi fel, melyen ez az energia hő alakban jelenik meg. A kerék tehát forgás közben egyre inkább felmelegszik. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a kilinckerek gázban mozog, s ez felveszi a hő egy részét. A lényegen ez nem sokat változtat; a gáz és a kerék ekkor együtt melegszik. De örökké tart ez a melegedés? Nem! A $T_1 = T_2 = T$ hőmérsékletű kerék és kilincs részecskéi is Brown-mozgást végeznek, s a kilincs időnként éppen akkor emelkedik fel, amikor a székerék a környező gáz Brown-mozgása hatására éppen visszafelé igyekszik elfordítani a tengelyt. S minél magasabb lesz a hőmérséklet, annál gyakrabban fordul ez elő.

Beláthatjuk, hogy készülékünk nem működik folyamatosan. Ha a szélkerék lapátjai lökést kapnak, akkor egyszer az történik, hogy a kilincs felcsúszik egy fogra és túljut rajta, egyszer pedig az, hogy a lökés ellenkező irányban igyekszik forgatni a tengelyt, s mivel közben a kilincs éppen felemelkedett, a kilinckerek visszafelé is elfordulhat. A két különböző irányú elfordulás kiegyenlíti egymást. Nem nehéz bebizonyítani, hogy ha a hőmérséklet mindkét oldalon ugyanakkora, akkor a kerék eredő elfordulása valóban zérus lesz. Kis elfordulásokat hol egyik, hol másik irányban természetesen észlelhetünk, de az, amit szeret-

nénk, vagyis, hogy a kerék egyirányú forgást végezzen, nem következik be.

Elemezzük, hogy miért éppen zérus az eredő. Ahhoz, hogy a kilincset egy fog tetejére emeljük, a rugóerő ellen munkát kell végeznünk. Jelölje az ennek megfelelő energiát W , az egyes fogak látószögét a kerék középpontjából nézve pedig θ . Annak valószínűsége, hogy a rendszerben felhalmozódjék W energia — s így a kilincs felcsúszhasson egy fog tetejére $e^{-W/kT}$. No, de annak a valószínűsége is $e^{-W/kT}$, hogy a kilincs véletlenül legalább egy fog magasságába ugorjon fel. Így ugyanolyan gyakran fordul elő az, hogy a kilincs fent van és a kerék szabadon foroghat visszafelé, mint az, hogy elegendő energia gyűlik össze a kerék előreforgatásához, ha a kilincs lenn van. Így „egyensúly” alakul ki, s a kerék nem forog.

46.2 A kilinckerek mint gép

Lépjünk most eggyel tovább. Tegyük fel, hogy a széllapátok hőmérséklete T_1 , a kilinckereké pedig T_2 , és $T_2 < T_1$. Mivel a kilinckerek hidegebb, a kilincs hőmozgása viszonylag kis intenzitású, s így a kilincs ritkábban érheti el a W energiát. Mivel a T_1 hőmérséklet nagyobb, a lapátok energiája gyakrabban eléri a W értéket, s így a készülék eredeti rendeltetésének megfelelően egy irányban forog.

Képes vajon készülékünk súlyok felemelésére is? Erősítsünk középen a dobra egy fonalat (46.1 ábra), s kössünk ennek végére valamilyen súlyt, pl. egy bolhát. Legyen a súly forgatónyomatéka M . Ha M nem túl nagy, akkor készülékünk felemeli a súlyt, hiszen a tengely a Brown-mozgás következtében nagyobb valószínűséggel fordul el az egyik, mint a másik irányban. Számítsuk ki, mekkora súlyt tud a készülék felemelni, milyen gyorsan forog a tengely s. i. t.

Nézzük először azt az esetet, amikor a kilinckerek eredeti rendeltetésének megfelelően előre forog. Mekkora energiát kell felvenniük ekkor a széllapátoknak, hogy a kerék egy foggal tovább fordulhasson? A kilincs felemeléséhez W energiára van szükség. A ke-

rék θ szöggel fordul el M forgatónyomaték ellenében, amihez $M\theta$ energia szükséges. A teljes energiaszükséglet e kettő összege: $W + M\theta$, annak valószínűsége pedig, hogy ekkora energia összegyűlik, $e^{-(W+M\theta)/kT_1}$. Azt is szeretnénk tudni, hogy másodpercenként hányszor lesz ekkora energiája készülékünknek. Ez a szám arányos az $e^{-(W+M\theta)/kT_1}$ kifejezéssel; az arányossági tényezőt jelölje $1/\tau$ (további megfontolásaink szempontjából e tényező számértékének nincs lényeges szerepe). Ha a kerék egy foggal előre fordul, a súlyon végzett munka $M\theta$, a lapátoktól elvont energia viszont $W + M\theta$. A W energia először megfeszíti a rugót, majd amikor a fog után a rugó hirtelen visszaugrik eredeti helyzetébe, hővé alakul. A felhasznált energia részben a súly felemelésére, részben a kilincs működtetésére fordítódik; a kilincs visszaesésekor mindig hő keletkezik a kilinckerek felőli oldalon.

Ahhoz, hogy a kerék ellenkező irányba elfordulhasson, a kilinckerek akkora energiát kell felhalmozni, amely képes őt a fogak magasságába emelni. Ehhez is W energia szükséges. A kilincs másodpercenként átlagosan $(1/\tau)e^{-W/kT_2}$ alkalommal emelkedik ilyen magasra. Az arányossági tényező az előbbihez hasonló alakú, de mivel a két hőmérséklet különböző, a kitevőbe kT_2 -t írunk. Mivel a kerék visszafelé forog, energia szabadul fel, mégpedig minden fognál $M\theta$. A kilinckerek-rendszertől elvont energia W , a lapátok oldalán levő T_1 hőmérsékletű gáznak átadott energia pedig $W + M\theta$. Mi ennek az oka? Tétélezzük fel, hogy a rezgés következtében a kilincs éppen felemelkedett. Amikor visszaesik, a kilincket a rugó az egyik fog „lejtős” felületéhez nyomja, s így fellép egy olyan erő, amely a kereket forgatni igyekszik. Ez az erő a súlyhoz hasonlóan munkát végez. A kettő együttesen adja a teljes erőt, s a teljes felszabaduló energia a lapáton hőként jelentkezik. (Az energiamegmaradás tétele miatt ennek természetesen így is kell lennie, de azért nem árt, ha az egészet alaposan át is gondoljuk!)

A felvett és leadott energia a két esetben pontosan azonos nagyságú és ellenkező előjelű. Attól függően, hogy az előre vagy a

hátraforgás sebessége nagyobb-e, a súly lassan emelkedik vagy süllyed. Nyilvánvaló, hogy közben a súly állandóan fel-le mozog, de mi itt csak eredő viselkedésével foglalkozunk.

Tegyük fel, hogy egy meghatározott súly esetén a két sebesség éppen egyenlő. Ha most a fonál végére még egy végtelenül kicsi súlyt akasztunk, a súly süllyedni kezd és munkát végez a gépen. Ekkor a kilinckerek energiát vesz fel a környező gázból, a lapátokon pedig energia szabadul fel. Ha viszont az eredeti súlyt végtelen kis értékkel csökkentjük, a súly felemelkedik, a lapátok energiát vesznek fel a gázból, s a kilinckereken energia szabadul fel. Ha tehát a súly éppen akkora, hogy a két sebesség megegyezzen, akkor elvégezhető egy Carnot-féle ciklus. Ennek feltétele nyilvánvalóan: $(W + M\theta)/T_1 = W/T_2$. Tegyük fel pl., hogy a súly lassan felfelé mozog. Ekkor a lapátoktól elvont energia Q_1 , a keréknek leadott energia pedig Q_2 , s arányuk $(W + M\theta)/W$. Ha a súly süllyed, akkor is fennáll a $Q_1/Q_2 = (W + M\theta)/W$ összefüggés (vö. 46.1 táblázat):

$$Q_1/Q_2 = T_1/T_2.$$

A nyert munka és a lapátoktól elvont hő aránya éppen $M\theta$ és $M\theta + W$ aránya, vagyis $(T_1 - T_2)/T_1$. Mint látjuk, reverzibilis működés esetén készülékünk ennél több munkát nem végezhet. Ez az a következtetés, amelyet Carnot megfontolása alapján vártunk. Készülékünk segítségével megérthetünk azonban néhány más, nem egyensúlyi jelenséget is, amelyek nem a termodinamika tárgykörébe tartoznak.

Számítsuk ki először, hogy milyen gyorsan forogna a kilinckerek, ha a tengely két végén a hőmérséklet megegyezne és a dobra valamilyen súlyt akasztanánk. Ha a súly nagyon nehéz, akkor mindenféle bonyodalom lép fel: a kilincs megcsúszik a keréken vagy a rugó elszakad stb. Tétélezzük fel, hogy a húzóerő elég kicsi ahhoz, hogy minden normálisan működjön. Ekkor felhasználhatók a kerék előre-, ill. hátrafordulásának valószínűségére az előbbiekben kapott eredmények, figyelembe véve, hogy a két hőmérséklet egyenlő.

46.1. táblázat

A kilinckerek működésének összefoglalása

Előre	
energiaszükséglet	$\varepsilon + M\theta$ lapátoktól
lapátoktól felvesz munkavégzés	$M\theta + \varepsilon$
kilinckereknek lead	$M\theta$
valószínűség	$\frac{1}{\tau} e^{-(L\theta + \varepsilon)/kT_1}$
Hátra	
energiaszükséglet	ε kilincknek
kilinckerektől felvesz a rendszeren végzett munka	ε ugyanakkora, mint fenn, de ellenkező
lapátoknak lead	$M\theta$ de ellenkező
valószínűség	$\frac{1}{\tau} e^{-\varepsilon/kT_2}$

Ha a rendszer reverzibilis, akkor a két sebesség

$$\text{megegyezik, s így } \frac{\varepsilon + M\theta}{T_1} = \frac{\varepsilon}{T_2};$$

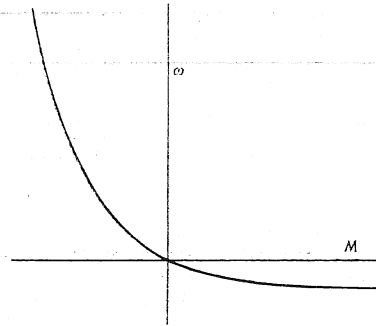
$$\frac{\text{kilinckereknek leadott hő}}{\text{lapátoktól felvett hő}} = \frac{\varepsilon}{M\theta + \varepsilon}.$$

Tehát $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$.

Az elfordulás minden lépésben θ , tehát az adott irányú forgás szögsebessége: $\dot{\theta}$ szorozva a megfelelő irányú lépések 1 s alatti számának várható értékével. Az előrehaladás valószínűsége $(1/\tau)e^{-(W+M\theta)/kT}$, a hátrahaladásé pedig $(1/\tau)e^{-W/kT}$. Ebből az eredő szögsebesség

$$\omega = (\dot{\theta}/\tau) (e^{-(W+M\theta)/kT} - e^{-W/kT}) = (\dot{\theta}/\tau) e^{-W/kT} (e^{-M\theta/kT} - 1). \quad (46.1)$$

Az ω -t M függvényében ábrázolja a 46.2 ábra. Mint látható, a kapott függvény M pozitív és negatív értékeire egészen másképp viselkedik. Ha M -et a pozitív tartományban növeljük, ami a kerék visszafelé forgatásának felel meg, a forgás sebessége állandóhoz tart. Amint viszont M negatívvá válik és a kerék előre kezd forgani, az ω szögsebesség igen gyorsan növekszik, hiszen ha ε hatványkitevője nagy, rendkívül nagy számot kapunk.



46.2 ábra. A kilinckerek szögsebessége a forgatónyomaték függvényében

A szögsebesség mint az erő függvénye így igen erős aszimmetriát mutat. Egyik irányban már kis erő hatására is nagy szögsebességet kapunk; a másik irányban bármekkora erőt is alkalmazzunk, a kerék alig-alig akar forogni.

Ugyanezt tapasztaljuk az *elektromos egyenirányítónál* is. Az erő helyébe itt az elektromos tér, a szögsebesség helyébe pedig az áramerősség lép. Az egyenirányítón eső feszültség nem arányos az ellenállással, tehát aszimmetria lép fel. Valóban az egyenirányítók áramátéresztő képessége a feszültség függvényében az előzőhöz hasonló képlettel írható le.

Vegyük most le a súlyt, és nézzük ismét az eredeti gépet. Ha T_2 kisebb, mint T_1 , akkor a kilinckerek előre forog, mint ahogy az várható is. Amit az első pillanatban nehéz elhinni, az ennek a fordítottja. Ha T_2 nagyobb T_1 -nél, akkor a kilinckerek visszafelé forog! Egy dinamikus, nagy energiájú kilinckerek azért forog a megszokottal ellentétes irányban, mert a kilinck rezeg. Ha egy adott pillanatban a kilinck az egyik fog „lejtős” felületéhez nyomódik, akkor a kerékre visszafelé forgató erőt fejt ki. De *mindig* ez történik, hiszen ha elég magasra emelkedik ahhoz, hogy egy fog csúcsán túljusson, akkor ismét egy „lejtős” felületre érkezik!

Bármilyen ügyesen is próbáltuk készülékünket aszimmetrikussá tenni, a hőmérsékletek pontos egyezése esetén az egy cseppet sem forog „szívesebben” az egyik irányban, mint

a másikban. Ha egy pillanatban ránézünk, akkor lehet, hogy a kerék éppen erre vagy arra mozdul, de hosszú ideig nézve azt látjuk, hogy tulajdonképpen semerre sem fordul el. Ha a kérdést le akarnánk egyszerűsíteni, azt mondhatnánk: ezen az elven — vagyis a kerék mozgásának „iránytalanságán” — alapul az egész termodinamika.

46.3 Reverzibilitás a mechanikában

Milyen mechanikai elven alapszik az, hogy egyenletes hőmérséklet-eloszlású készülékünk végső soron sem jobbra, sem balra nem forog? Nyilvánvalóan egy alapvető fizikai törvényről van szó, amely lehetetlenné teszi, hogy olyan gépet építsünk, amely elég hosszú ideig magára hagyva nagyobb valószínűséggel fordul el az egyik irányban, mint a másikban. Vizsgáljuk meg, hogyan következik ez a mechanika törvényeiből.

A mechanika törvényei hozzátétőlegesen a következőket mondják ki: a tömeg és a gyorsulás szorzata az erő; az egyes részecskékre ható erő az összes többi részecske helyzetének valamilyen bonyolult függvénye. Vannak olyan esetek is, amikor az erők a sebességtől is függenek (pl. a mágnesség), de ezekkel most nem foglalkozunk. Válasszunk egy egyszerű esetet, pl. a gravitációs teret, amelyben az erők csak a helytől függenek. Tegyük most fel, hogy az egyenleteket már megoldottuk, s minden részecske mozgásának leírására kaptunk egy-egy $x(t)$ függvényt. Ha a rendszer elég összetett, a megoldások igen bonyolultak. A rendszer időbeli változását vizsgálva, ekkor igen meglepő eredményre jutunk: a részecskéknél bármilyen elrendezését írjuk is fel, ha elég sokáig várunk, ez az elrendezés megvalósul. Ha a megoldást elég hosszú időn át követjük, azt látjuk, hogy a rendszer úgy szól, mint mindent „kipróbál”, amit csak tud. (A legegyszerűbb készülékekre ez nem feltétlenül érvényes, de ha a rendszer elég bonyolult, elég sok atomot tartalmaz, akkor a fenti állítás igaz.)

Van a megoldásoknak egy másik érdekes

tulajdonsága is. A mozgásegyenletek megoldásaként valamilyen függvényt kapunk; válasszuk példaként a $t + t^2 + t^3$ függvényt. Azt állítjuk, hogy ekkor egyenleteinknek $-t + t^2 - t^3$ is megoldása. Más szavakkal, ha $-t$ -t az egész számításban mindenhol $-t$ -vel helyettesítjük, egyenleteink egy másik megoldását kapjuk. Ennek az az oka, hogy az eredeti egyenletekben csak a t szerinti második differenciálhányadosok szerepelnek, s így t helyébe $-t$ -t írva, semmi sem változik. Valamely mozgással együtt tehát mindig lehetséges fordítottja is. A bizonyos idő elteltével beálló rendezetlenségben hol egyik, hol másik irányban végez a rendszer egy adott mozgást, s így semmi sem tünteti ki az egyik irányt a másikhoz képest. Ez az oka annak, hogy nem lehet olyan gépet építeni, amely hosszú idő eltelte után is nagyobb valószínűséggel mozog valamilyen irányban, mint az ellenkezőben.

Könnyen kitalálhatnánk olyan példát, amelyre ez nem igaz. Ha pl. egy ideális kereket légtüres térben megforgatunk, akkor az örökké ugyanúgy fog forogni. Vannak tehát bizonyos feltételek, mint pl. az impulzusmomentum megmaradása, amelyek mellett fenti megfontolásunk nem érvényes. Az ilyen eseteket kissé körültekintőbben kell végiggondolni, de végül kiderül, hogy ha a rendszer elég bonyolult, megfontolásunk helytálló.

Történelmi érdekessége miatt szeretnénk még megemlíteni egy gondolat kísérletet, amely Maxwelltől, a dinamikus gázelmélet megalapozójától származik. Van két azonos hőmérsékletű gázzal telt dobozunk, melyeknek közös falán van egy kis lyuk. A lyuk mellett egy kis démon ül („aki” természetesen gép is lehet!). A lyukon ajtó van, melyet a démon nyitni és csukni tud. A démon figyel a balról jövő molekulákat; ha gyors molekulát lát, kinyitja az ajtót, ha lassút, zárva hagyja. Hogy démonunk még külföldesebb legyen, tegyük fel, hogy hátul is van szeme, s a jobbról jövő molekulákkal az előbbinek a fordítottját csinálja. A lassú molekulákat így a bal oldalra, a gyorsakat pedig a jobb oldalra engedti át. Nem kell sokáig várni, s a bal oldal lehűl, a

jobb pedig felmelegszik. Megsérti-e démonunk a termodinamika törvényeit?

Kiderül, hogy ha egy véges méretű demont építünk, az úgy felmelegszik, hogy bizonyos idő elteltével már „nem lát egészen jól”. A leg-egyszerűbb démon pl. egy csapóajtó lenne, amelyet egy rugó tart a lyuk fölött. A gyors molekulák keresztülmennek rajta, mert fel tudják emelni a csapóajtót, a lassú molekulák viszont nem jutnak át, hanem visszapattannak. De ez nem más, mint kilinckerekünknek egy másik alakja, s mint tudjuk, végül az egész szerkezet felmelegszik. Ha feltesszük, hogy a démon fajhője nem végtelen nagy, feltétlenül fel kell hogy melegedjék, és mivel csak véges számú alkotórészből áll, nem tud megszabadulni a molekulák megfigyelése során szerzett hőfőlségtől. Démonunk rövid idő múltán úgy elkezd rázkódnni a Brown-mozgástól, hogy már azt sem tudja a molekulák közelednek-e vagy távolodnak.

46.4 Irreverzibilitás

Vajon a fizika valamennyi törvénye reverzibilis? Nyilvánvalóan nem! Próbáljunk csak a rántótáblából tojást csinálni! Játsszunk le egy filmet fordítva, s percekben belül mindenki a hasát fogja a nevetéstől! Az összes jelenség legtermészetesebb tulajdonsága: a szembe-ötölő irreverzibilitás.

De miből ered az irreverzibilitás?

Newton törvényeiből nem! Ha elfogadjuk, hogy végső soron minden megérthető a fizika törvényei alapján, s kiderül, hogy a fizika valamennyi egyenletének megvan az a különös tulajdonsága, hogy t helyett $-t$ -t írva, ismét megoldásra jutunk, akkor minden jelenségnek reverzibilisnek kellene lennie. Honnan ered akkor az, hogy a természetben minden irreverzibilis? Kell lennie valamilyen törvénynek, valamilyen ismeretlen, de alapvető egyenletnek, talán az elektromosságban, talán a neutrínofizikában, amelyben igenis számítt, hogy milyen irányban telik az idő!

Ha két különböző hőmérsékletű testet egy-

más mellé teszünk, mindig a meleg test ad át hőt a hidegnek. Az entrópiatörvény, amely szerint az entrópia a természeti folyamatok során mindig nő, tehát tényleg eleget tesz fenti követelményünknek. Úgy tűnik azonban, hogy e törvény megérthető a mechanika alapján is. Valóban, sikerült levezetnünk mechanikai megfontolások alapján is valamennyi következményét annak, hogy hő nem áramolhat önmagától visszafelé, s tulajdonképpen ezáltal értettük meg a második főtételt. No de *kizárólag* mechanikai érvelést használtunk? Nézzük csak meg kissé közelebbről!

Mivel kérdéstünk az entrópiával kapcsolatos, első feladatunk az, hogy megadjuk az entrópia mikrofizikai leírását. Amikor azt mondjuk, hogy valaminek, pl. egy gáznak bizonyos mennyiségű energiája van, akkor erről van mikrofizikai képünk, vagyis meg tudjuk mondani, hogy az egyes atomoknak mekkora energiájuk van. Ezeknek az energiáknak az összege adja a teljes energiát. Ehhez hasonlóan talán minden atomnak van valamekkora entrópiája is, s vajon ha ezeket az entrópiákat összeadjuk, a teljes entrópiát kapjuk meg? A dolog nem ilyen egyszerű! Vizsgáljuk meg inkább néhány példán, hogy mi a helyzet a valóságban.

Számítsuk ki először, hogy mennyit változik egy állandó hőmérsékletű gáz entrópiája, ha térfogata megváltozik. Visszagondolva a 44. fejezetre tudjuk, hogy az entrópia változása

$$\Delta S = \int \frac{DQ}{T}$$

Mivel a hőmérséklet nem változik, a gáz energiája az expanzió előtt és után ugyanakkora. A gázzal így ugyanannyi hőt kell közölnünk, amennyi munkát az a térfogatváltozása során végez, vagyis a hőközlés minden kis térfogatváltozásakor

$$DQ = p dV$$

Ezt a kifejezést az előző képletben DQ he-

lyébe írva:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{V_1}^{V_2} p \frac{dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V} \frac{dV}{T} = \\ &= Nk \ln \frac{V_2}{V_1}, \end{aligned}$$

amint ezt már a 44. fejezetben is kiszámítottuk. Ha pl. a térfogatot kétszeresére növeljük, az entrópia növekedése $Nk \ln 2$.

Következő példaként képzeljünk el egy közepén válaszfallal ellátott dobozt, amelyben az egyik oldalon neon („fekete” molekulák), másik oldalán pedig argon („fehér” molekulák) van. Vegyük ki a válaszfalat, s engedjük, hogy a két gáz összekeveredjen. Mennyivel változik meg az entrópia? A kísérletet úgy is elképzelhetjük, hogy a válaszfalat két, lyukakkal ellátott dugattyúval helyettesítjük. Az egyik dugattyú csak a fehér, a másik csak a fekete molekulákat engedi át. Ha a dugattyúkat a gáztartály két végére toljuk, mindkét gáz pontosan úgy terjed ki, mint előzőleg az egyfajta gáz. Az entrópiaváltozásuk tehát $Nk \ln 2$, vagyis az egy molekulára jutó entrópia növekedése $k \ln 2$. Az itt szereplő 2-es szám a molekulára jutó térfogat növekedésével kapcsolatos. Ez igen különös, hiszen nem a molekulát jellemzi, hanem azt, hogy mekkora térfogatban mozoghat szabadon a molekula. Furcsa helyzet: az entrópia nő, de mindennek ugyanakkora marad a hőmérséklete és az energiája! A változás csak annyi, hogy más lett a molekulák térbeli megoszlása.

Láttuk, hogy ha egyszerűen kihúzzuk a válaszfalat, akkor elegendően hosszú idő múlva az ütközések, rezgések stb. következtében a gázok teljesen összekeverednek. Világos, hogy ez a folyamat a valóságban irreverzibilis, ezért nem meglepő, hogy entrópiánövekedéssel jár.

Találtunk tehát egy egyszerű példát az olyan irreverzibilis folyamatra, amely teljes egészében reverzibilis eseményekből tevődik össze. Ha a molekulák egy-egy ütközéséről filmet készítenénk, majd pedig fordítva játszsanánk le, semmi rendelleneset nem észlelünk. A keveredés részfolyamatai tehát telje-

sen reverzibilisek és az egész mégis irreverzibilis!

Mindenki tudja, hogy a különválasztott fehér és fekete molekulák percek alatt összekeverednek, a kapott keveréket hiába figyeljük tovább, azt látjuk, hogy az mindig keverék marad. Most már ennek okát is látjuk. A rendszer állapota kezdetben bizonyos értelemben rendezett volt, de az ütközések véletlenszerűsége miatt rendezetlenné válik. Az állapot rendezetlenné válása az, amiből az irreverzibilitás fakad.

Természetesen, ha az egészről filmet készítenénk, s azt visszafelé játszsanánk le, azt látnánk, hogy a rendszer fokozatosan rendezetté válik. Valaki azt mondhatná, hogy ez ellentmond a fizika törvényeinek. Ekkor a filmet még egyszer lejátszanánk visszafelé, s minden ütközést külön-külön megvizsgálunk. Azt találnánk, hogy mindegyik ütközés tökéletes összhangban van a fizika törvényeivel. A magyarázat az, hogy itt minden molekulának éppen olyan a sebessége, hogyha pályájukat visszafelé követjük, pontosan a kiindulási állapothoz jutunk.

A valóságban azonban ez a situáció rendkívül valószínűtlen. Ha a gáznak amellelt, hogy kezdetben külön voltak a fehér és fekete molekulák, nem volt semmi speciális rendezettsége, akkor sohasem tér vissza eredeti állapotába.

46.5 Rend és entrópia

Most pedig beszéljünk arról, hogy mit értünk rendezettségén és rendezetlenségén. Nem arról van szó ugyanis, hogy a rend kellemes, a rendezetlenség pedig kellemetlen!

Osszuk a teret kis térfogatelemekre! Hányféle módon tudjuk szétosztani a fehér és fekete molekulákat a térfogatelemek között úgy, hogy a fehérek csak az egyik, a feketék csak a másik oldalon legyenek? Hányféleképpen tudjuk szétosztani őket ezen kikötés nélkül? Az utóbbi esetben természetesen sokkal többféleképpen. A „rendezetlenség” tehát azon belső elrendezések számával mérhető, amely

esetekben a rendszer kívülről ugyanolyannak látszik. *E szám logaritmus a entrópia.* Amikor a molekulák külön vannak választva, e szám kisebb, s így az entrópia, a „rendezetlenség” is kisebb. A rendezetlenség e technikai definíciójának ismeretében tételünk már érthetővé válik.

A „rendezettség” szót tehát úgy értjük, hogy viszonylag korlátozott a rendszer azon átrendezéseinek száma, amely mellett kívülről ugyanúgy néz ki.

Amikor a gáz keveredéséről készített filmünket fordítva játszottuk le, valójában nem volt olyan nagy a rendezetlenség, mint gondoltuk. Minden atom sebessége és iránya pontosan olyan volt, hogy a végén minden jól jöjjön ki. Az entrópia tehát tulajdonképpen nem volt olyan nagy, még ha ezt nem is lehetett észrevenni.

Mit mondhatunk a többi fizikai törvény reverzibilitásáról? A gyorsuló töltés elektromos terének tárgyalásakor (3. kötet 28. fejezet) azt mondtuk, hogy az elmaradó (retardált) teret kell vennünk. A t időpontban a töltéstől r távolságban a töltés $t - (r/c)$ időpontbeli gyorsulásának megfelelő teret veszünk. Első pillanatban tehát úgy tűnik, mintha az elektromosság törvényei nem lennének reverzibilisek. Csakhogy a számításban alkalmazott törvények mind levezethetők a Maxwell-egyenletekből, amelyek pedig reverzibilisek! Megmutathatjuk azt is, hogy ha csak az előrehaladó (avanzsált) vagyis a $t + (r/c)$ időpontbeli állapotnak megfelelő térrel számolnánk, és e számolást egy zárt térre következetesen végigvezetnénk, akkor minden ugyanúgy menne végbe, mint a retardált tér esetén! Az elektromosságnak ez a látszólagos irreverzibilitása tehát — legalábbis akkor, ha a tér zárt — valójában nem irreverzibilitás. Ezt már kissé érzékelnünk is tudjuk, hiszen ismeretes, hogyha egy zárt dobozban rezgő töltés sugárzása mindig visszaverődik a falról, végül is egyensúlyi állapot alakul ki, amely már időben szimmetrikus. Az, hogy mi retardált térrel számolunk csak egyszerűsíti a számításunkat.

Jelenlegi tudásunk szerint a fizika vala-

mennyi alapvető törvénye — Newton törvényeihez hasonlóan — reverzibilis. Akkor miből ered az irreverzibilitás? Abból, hogy a rend rendezetlenségbe megy át!

Az irreverzibilitást azonban mindaddig nem értjük meg, amíg nem tudjuk, hogy honnan ered a rend. Mi annak az oka, hogy napról napra mindig újból és újból az egyensúlytól távol eső állapotokkal találkozunk? Ennek egyik lehetséges magyarázata a következő. Ha elég sokáig várunk, előfordulhat, hogy valamilyen rendkívül valószínűtlen, de mégis lehetséges véletlen folytán a fehér és fekete molekulák keverékét tartalmazó dobozban az egyik oldalon túlnyomóan fehér, a másikon túlnyomóan fekete molekulák sűrűsödnek össze. Ezután, ahogy az idő múlik és a véletlenek folytatódnak, a molekulák ismét összekeverednek.

A mai világ nagymérvű rendezettségének egyik lehetséges magyarázata az, hogy egyszerűen véletlenről van szó. Talán a múltban világmindenségünk valamilyen véletlen fluktuációja következtében a különböző dolgok kissé szétváltak, s most éppen ismét összekeveredőben vannak. Az ilyen típusú elmélet nem aszimmetrikus: akár azt vizsgáljuk ugyanis, hogy a jelenleg szétválasztott állapotban levő gáz milyen volt kevéssel ezelőtt, akár azt, hogy milyen lesz kevéssel ezután, azt kapjuk, hogy összekeveredik. Mindegy merre halad az idő, a gáz összekeveredik. Így eszerint az elmélet szerint az irreverzibilitás csupán egyike a véletleneknek.

Szeretnénk azonban meggyőzni az Olvasót, hogy ez nem így van.

Nézzük most az egész doboz helyett csak egy kis részét, s tegyük fel, hogy ebben egy adott pillanatban bizonyos rendezettséget tapasztalunk; e kis részben a fekete és fehér molekulák különváltak. Milyen következtetést vonhatunk le ebből azokra a helyekre, amelyeket még nem láttunk? Ha elfogadjuk, hogy a rend a teljes rendezetlenségéből jött létre egy fluktuáció következtében, akkor nyilvánvalóan a legvalószínűbb fluktuációt kell feltételeznünk a többi helyeken, s ez *nem* az, amelyben a fehér és fekete különválnak.

Abból a feltevésből tehát, hogy ismert világunk egy fluktuáció következménye, arra következtethetünk, hogy ha megnézzük a világnak egy eddig még sohasem látott részét, azt rendezetlenségben találjuk, s így nem fog hasonlítani az általunk ismert részhez. Ha tehát a Világban észlelt rend fluktuáció következménye lenne, akkor sehol másutt nem számíthatnánk rendre, mint ahol azt már észlelték.

Tegyük fel viszont, hogy a fehér és fekete molekulákat azért találjuk bizonyos mértékig elkülönítve, mert a múltban teljesen külön voltak. Eszerint az elmélet szerint máshol is van rend, és ez nem fluktuáció, hanem az idők kezdetén fennálló sokkal magasabb fokú rendezettség következménye. Azt várnánk tehát, hogy rendet találunk olyan helyeken is, amelyeket eddig még sohasem láttunk. Tudjuk viszont, hogy a csillagászok napról napra új csillagok felé fordítják távcsöveiket, s ezek az új csillagok ugyanúgy viselkednek, mint azok, amelyeket már ismertek. Ebből arra következtethetünk, hogy a világ nem fluktuáció és a rend a kezdeti állapot emléke.

Ezzel nem azt akarjuk mondani, hogy most már értjük az egészet a logikáját. Valamikor, valamilyen oknál fogva a világmindenség entrópiája igen kicsi volt energiatartalmához képest, s az entrópia azóta állandóan növekszik. Ez tehát az út a jövő felé. Ez az eredete minden irreverzibilitásnak, ez irányítja a növekedés és pusztulás folyamatát, és ezért van az, hogy emlékszünk azokra a dolgokra, amelyek a világmindenség mainál rendezet-

tebb állapotában történtek, de nem vagyunk képesek „emlékezni” olyan eseményekre, amelyek a világ mainál rendezetlenebb állapotában — vagyis a jövőben — következnek be. Úgy vagyunk ezzel a problémával, mint egy pohár borral: ha elég alaposan megvizsgáljuk észrevesszük, hogy milyen rendkívül összetett és bonyolult. Van benne üveg, víz, fény, és még ezen kívül megszámlálhatatlan sok minden.

A fizika szépsége részben abból ered, hogy még az egyszerű és az idealizált dolgok — mint pl. a kilinckkerék — is csak azért működnek, mert részei a világmindenségnek. A kilinckkerék azért működik csak az egyik irányban, mert kapcsolata van a világmindenség többi részével. Ha a kilinckeket elég hosszú időre elszigetelnénk a túlvilágtól, akkor mindkét irányban ugyanolyan valószínűséggel működne. De mivel részei vagyunk a világnak, a kilinckkerékek, amelyeket készítenek, egy irányban működnek. Ez az egyirányúság pedig abból származik, hogy a kilinckkerék is része a világmindenségnek, méghozzá nem csak abban a világmindenségnek, méghozzá nem csak abban az értelemben, hogy törvényeinek engedelmeskedik, hanem olyan értelemben is, hogy egyirányú viselkedése is a világmindenség egyirányú viselkedésének része.

Az egészet azonban mindaddig nem érthetjük meg teljesen, amíg a világ kialakulásával kapcsolatos elképzelések helyett egyre jobban át nem veszi a tudományos megismerés.

47 A hang és a hullámegyenlet

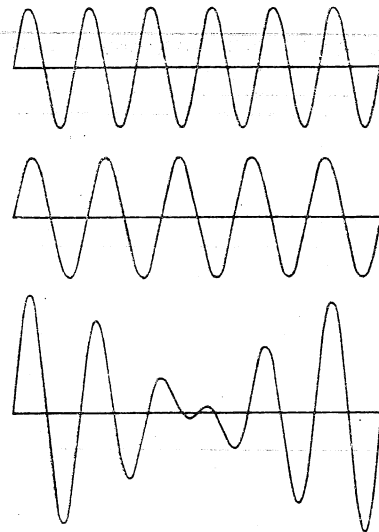
47.1 Hullámok

A továbbiakban a *hullámjelenségekkel* foglalkozunk. Mivel hullámokkal nemcsak az itt tárgyalt hangtannal kapcsolatban, hanem a fizika legkülönbözőbb területein is találkozunk, érdemes általánosságban is tanulmányozni őket.

A hullámok és a rezgőrendszerek között szoros kapcsolat van, a hullámok azonban nem csupán időtől függő, lokalizált rezgések, hanem a térben is tovaterjednek.

Tulajdonképpen már volt dolgunk a hullámokkal! Amikor a fény tulajdonságait elemeztük, igen alaposan megvizsgáltuk a különböző helyeken levő, azonos frekvenciájú forrásokból eredő hullámok térbeli interferenciáját. Nem tértünk ki azonban két fontos jelenségre, pedig ezek fényre, vagyis elektromágneses hullámokra éppúgy jellemzők, mint bármilyen más hullámra. Az egyik az *időbeli interferencia*. Ha két, kissé eltérő frekvenciájú hangforrásból származó hangot egyidejűleg hallgatunk, akkor fülünkhöz az egyik hullám hullámhegyeivel egyidőben a másik hullámnak vagy a hullámhegye vagy a hullámvölgye érkezik (47.1 ábra). Az eredő hullám periodikus erősödése és gyengülése a *lebegés*, vagy más szavakkal az időbeli interferencia. A másik jelenségkör: a hullámok terjedése zárt térben, vagyis a hullámok visszaverődése a falakról és az így kialakult eredő hullámkép.

Mindezeket természetesen az elektromágneses hullámoknál is tárgyalhattuk volna, de ha mindent ugyanazon a példán mutatunk meg, akkor kevésbé látja meg az Olvasó, hogy a fizika különböző jelenségeiben milyen sok a közös tulajdonság!



47.1 ábra. Időbeli interferencia két kissé különböző frekvenciájú hangforrás között és a létrejövő lebegés

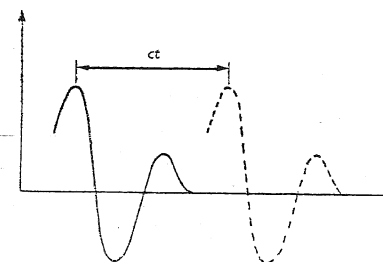
A hullámjelenségekre további példaként megemlíjtjük a vízben létrejövő nagy hullámhosszú hullámokat, valamint a felületi feszültség hatására kialakuló kis fodrozódásokat. Szilárd testekben kétféle hullám alakulhat ki: *kompressziós* (longitudinális) hullám, amelyben a szilárd test részecskéi a hullámterjedés irányában végzik rezgéseiket (gázokban a hanghullámok is ilyen típusúak), és *transzverzális* hullám, amelyben a részecskék a terjedés irányára merőlegesen rezegnek. (A földren-

géhullámokban pl., amelyeket a földkéreg hirtelen elmozdulása vált ki, mindkét típusú hullám megtalálható.)

A modern fizika köréből említettük már az anyaghullámokat. Egy részecske adott helyen való megtalálási valószínűségének amplitúdóját is hullámfüggvény írja le. Az anyaghullámok frekvenciája az energiával, hullámhossza pedig az impulzussal arányos. E hullámokkal a kvantummechanika foglalkozik.

E fejezetben csak a hullámhossztól független sebességű hullámokkal foglalkozunk. Ilyen pl. a fény vákuumbeli terjedése. A fény terjedési sebessége ugyanakkora, akár a rádióhullámokról, akár kék, zöld fényről vagy bármilyen más hullámhosszú fényről van szó.

A sebességnek a hullámhossztól való független volta az oka annak, hogy először észre sem vettük, hogy hullámterjedésről van szó. Ehelyett azt mondtuk: ha valahol egy elektromos töltés mozog, akkor tőle x távolságban az elektromos tér a töltésnek nem a t időpontbeli, hanem a korábbi, $t - x/c$ időpontbeli gyorsulásával arányos. Ha tehát valamely pillanatban megadjuk a télerősség térbeli eloszlását, akkor abból a t idővel későbbi eloszlást úgy kaphatjuk meg, hogy az egészet ct -vel eltoljuk (47.2 ábra). Matematikailag ez azt jelenti, hogy (egydimenziós esetben) az elektromos télerősséget $x - ct$ függvényének tekintjük. $t = 0$ esetén a télerősség az x változó valamilyen függvénye. Egy későbbi időpontban x -et kissé meg kell növelnünk, hogy visszakapjuk a télerősség $t = 0$ időpontbeli értékét. Ha pl. a



47.2 ábra. Az elektromos tér egy adott időpillanatban (folytonos görbe) és t idővel később (szaggatott görbe)

$t = 0$ pillanatban a télerősség maximuma az $x = 3$ helyen volt, akkor a t időpillanatban a maximum helyét a következőképp határozhatjuk meg:

$$x - ct = 3, \quad \text{vagyis} \quad x = 3 + ct.$$

Függvényünk valóban egy hullám terjedését írja le.

Összefoglalva, az $f(x - ct)$ függvénnyel leírt hullámra

$$f(x - ct) = f[x + \Delta x - c(t + \Delta t)],$$

ahol $\Delta x = c \Delta t$.

Van persze egy másik lehetőség is, hiszen a hullámmozgás forrása nemcsak a bal oldalon lehet, mint a 47.2 ábrán, hanem a jobb oldalon is. Ekkor a hullám a negatív x értékek irányába terjed, s valamilyen $g(x + ct)$ függvénnyel írható le.

A térben egyszerre több hullám is terjedhet, s ekkor az elektromos télerősség az egymástól függetlenül terjedő hullámok télerősségeinek összege. A hullámok e tulajdonsága úgy is megfogalmazható, hogy ha $f_1(x - ct)$ és $f_2(x - ct)$ egy-egy hullámnak felel meg, akkor összegük is hullámot ír le. Ez a szuperpozíció elve. Ugyanez az elv érvényes a hanghullámokra is.

Mint mindenki tudja, a hangokat pontosan keletkezésük sorrendjében halljuk. Ha pl. a nagyfrekvenciájú hangok gyorsabban terjednének, mint a kisfrekvenciájúak, akkor a zenei hangokat rövid, éles zörejek sorozatának hallanánk. Hasonlóan: ha a vörös fény gyorsabban terjedne a kéknél, akkor egy fehér fény felvillanását először vörösnek, majd fehérnek, végül pedig kéknél látnánk. A valóságban — mint jól tudjuk — nem ez történik. A levegőben mind a fény; mind pedig a hang sebessége — nagyon jó közelítésben — független a frekvenciától. Olyan hullámok terjedésére, amelyekre ez a függetlenség nem áll fenn, a 48. fejezetben látunk majd példákat.

A fény (elektromágneses hullámok) esetére megadtunk egy szabályt, amelynek segítségével tetszőleges pontban kiszámíthatjuk valamely gyorsuló töltés elektromos terét. Azt gondolhatnánk, hogy célunk most is hasonló

szabály levezetése lesz: meghatározni a forrástól adott távolságra a levegő valamilyen tulajdonságának, pl. a nyomásnak az értékét, a forrásnak a hangterjedés idejével retardált mozgása függvényében. A fény esetében ez kielégítő volt számunkra, hiszen nem tudtunk mást, mint hogy egy mozgó töltés erőt fejt ki egy másik, tőle bizonyos távolságra levő töltésre. Az, hogy az elektromos tér pontosan hogyan jut el az egyik töltéstől a másikig, nem volt lényeges. A hangról viszont tudjuk, hogy a levegő közvetítésével jut el a hangforrástól az érzékelőig, s így természetes az a kérdés: mi a levegő nyomása tetszőleges időpillanatban. Szeretnénk azonban emellett pontosan megismerni a levegő mozgását is. A fény esetében azért elégedtünk meg egy szabállyal, mert az elektromos tér törvényeit még nem ismerjük. A hangra viszont nem mondhatjuk ugyanezt, hiszen a mechanika törvényei alapján az egész jelenségnek részleteiben is érthetőnek kell lennie. Röviden: a hangtan a mechanika egyik fejezete, s így Newton törvénye alapján — ismerve a közeg tulajdonságait — a hang terjedését megérthetjük. Később a fény tulajdonságait és a fényhullámok terjedését is hasonló módon fogjuk levezetni az elektrodinamika törvényeiből.

47.2 A hang terjedése

A következőkben Newton törvényeiből kiindulva meghatározzuk a hang hangforrás és érzékelő közötti terjedésének jellemzőit, nem foglalkozunk azonban a hang és a hangforrás, ill. érzékelő között fennálló kölcsönhatással.

Általában nem tekintjük lényegesnek, hogy milyen úton jutunk a végeredményhez. E fejezetben azonban magát a levezetés módszerét is fontosnak tartjuk. A matematikai fizika segítségével a régi jelenségek törvényszerűségének ismeretében új jelenségekre kaphatunk magyarázatot. A matematikai fizika feladata egyrészt adott egyenletek megoldásainak megkeresése, másrészt újabbak keresése új jelenségek leírására. Itt következő levezetésünk jó példa a második feladatra.

Foglalkozunk a lehető legegyszerűbb példával, a hang egydimenziós térben való terjedésével. Mielőtt hozzánk kezdenénk a levezetéshez, vizsgáljuk meg a jelenséget. Ha a levegőben valahol egy testet mozgatunk, valamilyen zavar keletkezik. Milyen természetű ez a zavar? A test mozgatása nyomásváltozást idéz elő. Ha elég óvatosan mozgatjuk, a levegő csak áramlik körülötte. Minket azonban most az olyan gyors mozgások érdekelnek, amelyek ilyen áramlásra nem hagynak időt. Ekkor a mozgó test összenyomja a levegőnek azt a részét, amellyel érintkezik, az összenyomott levegő nagyobb nyomást fejt ki a környező levegőre stb., vagyis a levegőben hullám terjed.

Szeretnénk ezt a folyamatot matematikailag is leírni. Első feladatunk annak eldöntése, hogy milyen változókkal dolgozzunk. Az említett példában ismernünk kell, hogy mennyire mozdult el a levegő, így egyik fontos változónk feltétlenül a levegő *elmozdulása* a hanghullám-ban. Azt is szeretnénk tudni, hogy az elmozdulás közben hogyan változik a levegő *sűrűsége*. Változik a levegő *nyomása* is és ez is érdekel minket. A levegőnek nyilván *sebessége* is van, és azt is le akarjuk írni. A levegő részecskéinek van bizonyos *gyorsulása* is — de e sok változó felsorolása közben nem nehéz rájönni, hogy ha ismernénk a levegő elmozdulását az idő függvényében, akkor abból már ki tudnánk számítani pl. a sebességet és a gyorsulást is.

Mint mondtuk, csak az egydimenziós hullámokkal foglalkozunk. Ez akkor jó közelítés, ha elegendően távol vagyunk a forrástól, vagyis ott, ahol az ún. *hullámfrontok* már igen jó közelítésben síkok. Ez esetben a χ elmozdulás csak x -től és t -től függ, y -tól és z -tól nem. A levegő állapotváltozásait tehát a $\chi(x, t)$ függvénnyel írjuk le.

Teljes ez a leírás? Úgy tűnik, hogy egyáltalán nem az, hiszen semmi információt sem nyújt a levegőmolekulák mozgásának részleteiről. A molekulák minden irányban mozognak, s ezt a $\chi(x, t)$ függvény nem tükrözi. A kinetikus elmélet szerint ha egyik helyen nagyobb a sűrűség, mint a vele szomszédos másik helyen, akkor annyi molekula megy át

a nagyobb sűrűségű helyről a kisebb sűrűségűre, amennyi a kiegyenlítéshez szükséges. Hanghullám keletkezéséhez az szükséges, hogy a nagyobb sűrűségű, nagyobb nyomású tartományból kiáramló molekulák impulzust adjanak át a szomszédos, kisebb nyomású tartomány molekuláinak. Hang tehát csak akkor keletkezhet, ha az a távolság, amelyen a sűrűség és nyomás észrevehetően megváltozik, sokkal nagyobb a molekulák átlagos szabad úthosszánál.

Világos tehát, hogy a gáznak csak a szabad úthosszhoz képest nagy léptékű viselkedését akarjuk leírni, s így a gáz tulajdonságainak leírásakor nem az egyes molekulákból indulunk ki. Elmozduláson pl. a gázból vett térfogatelem tömegközéppontjának elmozdulását értjük, s a nyomás és a sűrűség is az e térfogatelemre vonatkozó értékeket jelent. A nyomást p -vel, a sűrűséget ρ -val jelöljük, s mindkettőt x és t függvényének tekintjük. Nem szabad azonban elfelejtenünk, hogy ez a leírás közelítés, ami csak akkor engedhető meg, ha a gáz tulajdonságai a távolságnak nem nagyon gyorsan változó függvényei.

47.3 A hullámeqyenlet

A hanghullámok fizikája a következő három jelenségen alapul:

I. A gáz mozog és közben sűrűsége változik.

II. A sűrűségváltozás nyomásváltozáshoz vezet.

III. A nyomáskülönbségek mozgásba hozzák a gázt. Foglalkozunk először II.-vel. Bármely gáz, folyadék vagy szilárd anyag esetében, a nyomás valamilyen függvénye a sűrűségnek. A hanghullám megérkezése előtt a közeg egyensúlyi állapotban van. Jelölje az ennek megfelelő nyomást p_0 , a sűrűséget pedig ρ_0 . A közeg p nyomása és ρ sűrűsége között álljon fenn valamilyen a közegre jellemző $p = f(\rho)$ összefüggés. Speciálisan a p_0 egyensúlyi nyomásra: $p_0 = f(\rho_0)$. A hanghullám-ban a nyomás egyensúlyi értéktől való eltérése (p_e) igen kicsi.

A nyomás mérésére alkalmas egység a *bar*: 1 bar = 10^5 N/m². A normális légnyomás közelítőleg 1 bar-nak felel meg. Mivel a fül érzékenysége logaritmikus, a hangtanban az intenzitáskálát logaritmikusra választjuk. Ez a decibelskála. A p nyomásamplitúdójú hanghullám I akusztikus nyomásszintje:

$$I = 20 \lg(p/p_{\text{ref}}) \text{ dB}, \quad (47.1)$$

ahol a referencianyomás $p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-10}$ bar. Egy 60 dB erősségű, mérsékelten erős hangnak megfelelő nyomásamplitúdó így $p = 10^3 p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-7}$ bar*. Mint látjuk tehát, a hanghullám nyomásváltozásai valóban igen kicsinyek az egyensúlyi vagy átlagos 1 atm nyomáshoz képest. Ennek megfelelően az elmozdulások és a sűrűségváltozások is igen kicsik. Robbanás esetén már nem ilyen kis változásokkal van dolgunk: az átlagnyomástól való eltérés jelentősen meghaladhatja az 1 atm-t is. A nagy nyomásváltozások során új jelenségek lépnek fel. Olyan hangokkal már ritkán találkozunk, amelyeknek akusztikus intenzitás-szintje 100 dB-nél nagyobb; 120 dB az a határ, amely fölött a hang már fájdalmat okoz. Ha tehát a hanghullám leírásakor a nyomást és a sűrűséget

$$p = p_0 + p_e, \quad \rho = \rho_0 + \rho_e \quad (47.2)$$

alakban fejezzük ki, mindig feltételezhetjük, hogy a p -eltérés igen kicsi p_0 -hoz képest. E feltevéssel

$$p_0 + p_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0), \quad (47.3)$$

ahol $p_0 = f(\rho_0)$ és $f'(\rho_0)$ az $f(\rho)$ függvény $\rho = \rho_0$ helyen vett deriváltja. (47.3)-ban csak azért írhattuk le a második egyenlőségjelet is, mert ρ_0 igen kicsiny. Azt kaptuk tehát, hogy a nyomás és a sűrűség egyensúlyi értéktől való eltérése, p_e és ρ_e arányos egymással, vagyis az

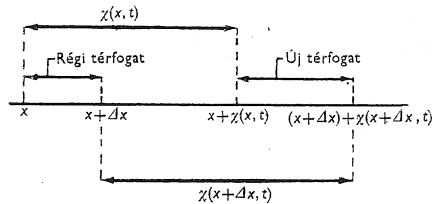
* Ha a p_{ref} nyomást így választjuk meg, p nem a hanghullám nyomásának legnagyobb értékét, hanem a „nyomások négyzetes középértékének négyzetgyökét” jelenti, amely a nyomás csúcserősségének $1/\sqrt{2}$ -szöröse.

arányossági tényezőt κ -val jelölve

$$p_e = \kappa \rho_e, \quad \text{ahol } \kappa = f'(\rho_0) = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0. \quad (47.4)$$

A II. részfolyamat tehát ezzel a rendkívül egyszerű egyenlettel írható le.

Foglalkozunk most az I. részfolyamattal. Tegyük fel, hogy a levegő egy elemi térfogata a hanghullám megérkezése előtt az x helyen volt, a hang hatására t idő alatt $\chi(x, t)$ -vel elmozdult, vagyis az elmozdulás utáni helyzete $x + \chi(x, t)$ (47.3 ábra). Legyen egy közeli tér-



47.3 ábra. A levegő elmozdulása az x helyen $\chi(x, t)$, az $x + \Delta x$ helyen pedig $\chi(x + \Delta x, t)$

A síkhullám egységnyi keresztmetszetére eső térfogat eredetileg Δx , az elmozdulás után pedig $\Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t)$

fogatelem helye nyugalmi állapotban $x + \Delta x$, új helye pedig $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$. A sűrűség megváltozását ekkor a következőképpen számíthatjuk ki. Mivel csupán síkhullámokat vizsgálunk, az x -tengelyre, vagyis a hang terjedési irányára merőleges keresztmetszetet egységnyinek választhatjuk. Az x és $x + \Delta x$ közötti levegő tömege $\rho_0 \Delta x$, ahol ρ_0 a levegő zavartalan, vagyis egyensúlyi sűrűsége. A hanghullám hatására e levegő $x + \chi(x, t)$ és $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ közé kerül, s így most e tartományban ugyanannyi lesz a levegő tömege, mint az egyensúlyi állapotban Δx -ben volt. Az új sűrűséget ρ -val jelölve:

$$\rho_0 \Delta x = \rho [x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)]. \quad (47.5)$$

Mivel Δx kicsi:

$$\chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t) = (\partial \chi / \partial x) \Delta x.$$

(Azért számolunk parciális differenciálhányadosokkal, mert χ nemcsak x -től, hanem t -től is függ.) E helyettesítéssel egyenletünk:

$$\rho_0 \Delta x = \rho \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \Delta x + \Delta x \right), \quad (47.6)$$

vagyis

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_e) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \rho_0 + \rho_e. \quad (47.7)$$

Mint tudjuk, a hanghullámban minden változás, így ρ_e , χ és $\chi \partial / \partial x$ változása is kicsi, ezért az utolsó egyenletben — vagy az azzal ekvivalens

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} - \rho_e \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (47.8)$$

egyenletben $-\rho_e (\partial \chi / \partial x)$ elhanyagolható $\rho_0 (\partial \chi / \partial x)$ -hez képest. Ezzel megkaptuk az I. részfolyamatra vonatkozó összefüggést:

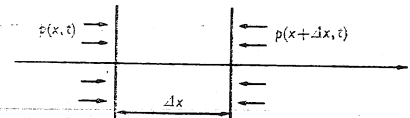
$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (47.9)$$

Ez a képlet megfelel elképzeléseinknek. Ha az elmozdulás x függvényében változik, sűrűségváltozások lépnek fel. Az előjel is helyes: ha a χ elmozdulás x függvényében nő, a levegő kitágul, s így sűrűségének csökkennie kell.

Vezessük most le a III.-nak megfelelő egyenletet, amely a nyomásnövekedés hatására kialakuló mozgást írja le. Ha ismernénk az erő és a nyomás közötti összefüggést, a mozgásegyenletet máris fel tudnánk írni. Tekintsünk egy vékony, Δx vastagságú, az x -tengelyre merőlegesen egységnyi keresztmetszetű levegőréteget; a rétegben levő levegő tömege $\rho_0 \Delta x$. Mivel e réteg gyorsulása $\partial^2 \chi / \partial t^2$, tömegének és gyorsulásának szorzata $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$. (Ha Δx elég kicsi, akkor nem lényeges, hogy a $\partial^2 \chi / \partial t^2$ gyorsulásnak a réteg szélén vagy valamilyen közbenső helyen felvett értékével számolunk-e.) Az x -tengelyre merőleges réteg egységnyi keresztmetszetére ható erő egyenlő a $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$ kifejezéssel. A $+x$ irányban ható erő az x helyen felületegységenként $p(x, t)$, az ellenkező irányban ható erő az

$x + \Delta x$ helyen pedig $p(x + \Delta x, t)$ (47.4. ábra), s így

$$p(x, t) - p(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial p_e}{\partial x} \Delta x. \quad (47.10)$$



47.4 ábra. Az x -tengelyre merőlegesen egységnyi keresztmetszetű, Δx vastagságú rétegre ható nyomóerők pozitív x -ek irányába vett eredője $-(\partial p_e / \partial x) \Delta x$

Itt felhasználtuk, hogy Δx kicsi, és p két része közül csak p változik. A III. jelenségnek megfelelő egyenlet tehát a következő:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_e}{\partial x}. \quad (47.11)$$

Most már elég egyenletünk van ahhoz, hogy az egyik függő változó, mondjuk x kivételével sorra kiküszöböljük valamennyi függő változót. A (47.11)-ből (47.4) felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial \rho_e}{\partial x}. \quad (47.12)$$

Ezután (47.9) segítségével ρ_e -t is kiküszöböljük. Ekkor ρ_0 is kiesik, s így

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (47.13)$$

vagy $c_h^2 = \kappa$ jelöléssel:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_h^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (47.14)$$

Ez a hullámgörbe írja le a hang viselkedését az anyagban.

47.4 A hullámgörbe megoldásai

Nézzük most meg, hogy valóban leírja-e a hullámgörbe az anyagban terjedő hanghullámok lényeges tulajdonságait. Levezethető-e belőle, hogy a hang állandó sebességgel terjed? Szeretnénk bizonyítani, hogy két hanghullám szabadon áthaladhat egymáson — vagyis fennáll a szuperpozíció elve. Azt várjuk, hogy ez az egyetlen egyenlet mindezeket a tulajdonságokat magában foglalja.

Mint megjegyeztük, minden olyan síkhullámszerű zavar, amelyik állandó v sebességgel terjed, leírható egy $f(x - vt)$ függvénnyel. Nézzük meg tehát, hogy megoldása-e a hullámgörbe a $\chi(x, t) = f(x - vt)$ függvény. A $\partial \chi / \partial x$ parciális differenciálhányados éppen f deriváltját adja: $\partial \chi / \partial x = f'(x - vt)$. Ezt még egyszer differenciálva:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = f''(x - vt). \quad (47.15)$$

Ha ugyanezt a függvényt t szerint differenciáljuk, a függvény deriváltjának $-v$ -szeresét kapjuk, vagyis $\partial \chi / \partial t = -vf'(x - vt)$, s az idő szerinti második differenciálhányados

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt). \quad (47.16)$$

Nyilvánvaló tehát, hogy ha $v = c_h$, akkor $f(x - vt)$ kielégíti a hullámgörbe egyenletét.

A mechanika törvényeiből tehát azt kapjuk, hogy minden hang c_h sebességgel terjed, ahol

$$c_h = \kappa^{1/2} = (dp/d\rho)^{1/2}.$$

Ezzel megtaláltuk a hullám sebessége és a közeg tulajdonságai közötti kapcsolatot.

Könnyű belátni, hogy az ellenkező irányban haladó $(x, t) = g(x + vt)$ zavar is kielégíti a hullámgörbe egyenletét. Ez az eset csak v előjelében tér el az előzötől, mivel azonban $\partial^2 \chi / \partial t^2$ csak v^2 -től függ, teljesen mindegy, hogy függvényünk argumentuma $x - vt$ vagy $x + vt$.

Rendkívül érdekes a megoldások szuperpozíciójának kérdése. Tegyük fel, hogy χ_1 megoldása a hullámgörbe egyenletnek. Ez azt jelenti, hogy χ_1 -nek x szerinti második parciális

differenciálhányadosa egyenlő t szerinti második parciális differenciálhányadosának $1/cn^2$ -szeresével. Bármely másik χ_2 megoldásnak is megvan ugyanez a tulajdonsága. Szuperponáljuk (adjuk össze) a két megoldást:

$$\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t). \quad (47.17)$$

Igazoljuk, hogy (x, t) is hullám, vagyis kielégíti a hullámmegyenletet. Ezt nem nehéz bizonyítani, hiszen

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} \quad (47.18)$$

és

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2}. \quad (47.19)$$

Így $\partial^2 \chi / \partial x^2 = (1/c_h^2) \partial^2 \chi / \partial t^2$, amivel igazoltuk a szuperpozíció elvét. A bizonyítás azon alapult, hogy a hullámmegyenlet χ -ben *lineáris*.

A fentiek alapján azt várjuk, hogy egy x irányban terjedő elektromágneses síkhullám, amelynek polarizációja olyan, hogy az elektromos tér mindig y irányú, a következő hullámmegyenletnek tesz eleget:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (47.20)$$

ahol c a fénysebesség. Ez a hullámmegyenlet valóban következménye is a Maxwell-egyenleteknek. Ahogy a mechanika egyenleteiből megkaptuk a hang hullámmegyenletét, az elektrodinamika egyenleteiből is levezethető a fény hullámmegyenlete.

47.5 A hangsebesség

A hang hullámmegyenletének levezetése során kaptunk egy *képletet*, amely összefüggést ad a hullám sebessége és nyomás sűrűség szerinti deriváltjának egyensúlyi nyomáson vett értéke között:

$$c_h^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0. \quad (47.21)$$

E derivált kiszámításához ismernünk kell a hőmérséklet változását a hanghullámban. Azt

várjuk, hogy ahol a levegő összenyomódik, a hőmérséklet nő, ahol pedig kitágul, ott a hőmérséklet csökken.

A nyomásnak a sűrűség szerinti deriváltját Newton számította ki először, abból a feltevésből kiindulva, hogy a *hőmérséklet állandó*. Feltételezését azzal indokolta, hogy a kisebb és nagyobb nyomású helyek között olyan gyors a hővezetés, hogy a hőmérséklet nem változhat. Ebből Newton elgondolását követve kapjuk az izotermikus hangsebességet, amely a valóságtól eltér. A helyes összefüggést később Laplace vezette le, aki az előbbinek pont az ellenkezőjét feltételezte, vagyis azt, hogy a hanghullámban a nyomás és a hőmérséklet *adiabatikusan* változik. A nagyobb nyomású tartományból a kisebb nyomásúba átáramló hő mindaddig elhanyagolható, amíg a hullámhossz a szabad úthosszhoz képest nagy. Ha ez fennáll, a hanghullámban végmenő kis hőáram nem befolyásolja lényegesen a sebességet, csupán a hangenergia kis elnyelődésére vezet. Ha a hullámhossz és az átlagos szabad úthossz közti különbség csökken, ez a hangenergiaelnyelődés erősödik, a hullámhossz azonban ekkor mintegy milliószorta kisebb a hallható hangokénál.

A hanghullámban tehát a sűrűség függvényében való nyomásváltozás adiabatikus, tehát a $pV^\kappa = \text{konst}$ összefüggéssel írjuk le. Mivel a ρ sűrűség a V térfogattal fordítva arányos, a p és ρ közötti adiabatikus összefüggés:

$$p = \text{konst } \rho^\kappa, \quad (47.22)$$

ahonnan $dp/d\rho = \kappa p/\rho$. A hangsebességre tehát (47.21)-ből a következőt kapjuk:

$$c_h^2 = \frac{\kappa p}{\rho}. \quad (47.23)$$

Írjuk át egyenletünket $c_h^2 = \kappa pV/\rho V$ alakba. Ha felhasználjuk a $pV = NkT$ összefüggést, és észrevesszük, hogy ρV éppen a gáz tömege, amely Nm vagy μ alakban is felírható, akkor

$$c_h^2 = \frac{\kappa kT}{m} = \frac{\kappa RT}{\mu}, \quad (47.24)$$

ahol m egy molekula súlya és μ a molsúly. Ebből nyilvánvaló, hogy a hangsebesség a gáz-

nak csak a hőmérsékletétől függ, nyomásától és sűrűségétől nem. Mint tudjuk,

$$kT = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle, \quad (47.25)$$

ahol $\langle v^2 \rangle$ a molekulák sebességének négyzetes középértéke. Ezt felhasználva $c_h^2 = (\kappa/3) \langle v^2 \rangle$, vagyis

$$c_h = \left(\frac{\kappa^{1/2}}{3^{1/2}} \right) v_{\text{átl}}. \quad (47.26)$$

E szerint az egyenlet szerint a hangsebesség durván $1/(3)^{1/2}$ -szerese a molekulák valamilyen értelemben vett átlagsebességének (a sebesség

négyzetes középértéke négyzetgyökének). Más szavakkal, a hang sebessége a molekula sebességével azonos nagyságrendű, s a fenti módon definiált átlagsebességüknél valamivel kisebb.

Természetesen várható is volt, hogy valami hasonló eredményt kapunk, hiszen a zavaró jelenséget (pi. a nyomásváltozást) végső soron a molekulák mozgása közvetíti. Ebből azonban még nem következik a pontos terjedési sebesség, hiszen azt is el tudnánk képzelni, hogy a hangot elsősorban a leggyorsabb vagy hogy a leglassúbb molekulák továbbítják. Ésszerűnek és kielégítőnek tűnik, hogy a hang sebessége körülbelül a molekulák $v_{\text{átl}}$ átlagsebességének fele.

48.1 Két hullám összege

A 3. kötet 4. fejezetben már eléggé részletesen foglalkoztunk a fényhullámok tulajdonságaival, valamint a két különböző forrásból kiinduló hullámok szuperpozíciójával: a fényhullámok interferenciájával. Akkor azt tételeztük fel, hogy a két forrás frekvenciája megegyezik, most viszont áttekintjük a különböző frekvenciájú források interferencia-jelenségeit.

Tegyük fel először, hogy — a korábbiakhoz hasonlóan — két teljesen egyforma, azonos amplitúdójú és frekvenciájú oszcillátorunk van, ahonnan a hullámok egy adott P pontba éppen azonos fázisban érkeznek. Ebben a pontban a fény igen erős, a hang igen hangos lesz, az elektronok pedig igen nagy számban érkeznek. Olyan P pontban, ahová a két hullám 180° fáziskülönbséggel érkeznek, nem kapunk jelet, hiszen az eredő amplitúdó itt zérus. Tegyük fel, hogy valaki elkezdte csavargatni az egyik forrás „fázisállító gombját”, s így P -ben a fáziskülönbség $0^\circ \dots 180^\circ$ változik. Ennek következményeként a P pontban a jelerősség is változik. Mít észlelünk P -ben, ha az egyik forrás fázisa a másikéhoz képest lassan, egyenletesen változik? Az erős és gyenge jelek periodikus váltakozása jön létre, hiszen minden 360° -os fáziseltolás után ismét maximálissá válik az amplitúdó. Az egyik forrás fázisának egyenletes eltérése a másikéhoz képest természetesen éppen azt jelenti, hogy a két forrás frekvenciája különböző.

Ha tehát két, eltérő frekvenciájú forrásunk van, eredőként változó intenzitású rezgést kapunk. Ezzel tulajdonképpen mindent el is mondtunk, ami e jelenségkörben lényeges!

Igen könnyen megfogalmazható ez az ered-

mény matematikailag is. Legyen két hullámunk, s pillanatnyilag ne törődünk a hullámok térbeli változásaival, csak azzal, ami a P pontban történik. Írja le az egyik forrásból a P -be jövő hullámot $\cos \omega_1 t$, a másik forrásból jövőt $\cos \omega_2 t$, ahol a két ω csak kissé különbözik egymástól. (Természetesen a két amplitúdónak sem kell azonosnak lennie! Később ezt az általánosabb esetet is levezetjük, de most egyszerűbb a dolgunk, ha feltesszük, hogy az amplitúdók megegyeznek.) A P -ben mért teljes amplitúdó ekkor a két koszinuszfüggvény összege. Rajzoljuk fel a hullámok amplitúdóit az idő függvényében (48.1 ábra). Azt látjuk, hogy a hullámhegyek találkozásakor erős hullám keletkezik, ha pedig a hullámhegyek hullámvölgyekkel találkoznak, az amplitúdó zérussá válik.

Matematikailag a feladat csupán két koszinuszfüggvény összeadásából és az eredmény valamilyen átrendezéséből áll. Tudjuk (2. kötet 22.6 szakasz), hogy

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}, \quad (48.1)$$

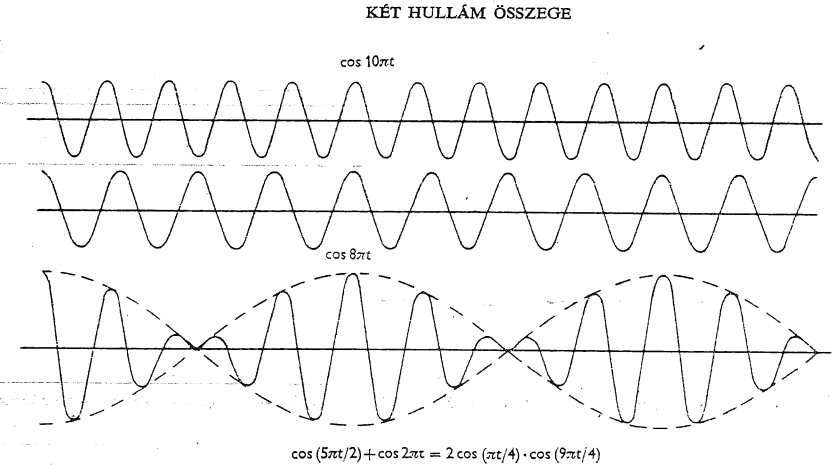
és hogy e^{ix} valós része $\cos x$, képzetes része pedig $\sin x$. Így $e^{i(a+b)}$ valós része $\cos(a+b)$. Az

$$e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i \sin a) (\cos b + i \sin b)$$

szorzás eredménye $\cos a \cos b - \sin a \sin b$ plusz valamilyen képzetes rész, amellyel azonban most nem törődünk, mert csak a valós részre van szükségünk. Tehát

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (48.2)$$

Változtassuk most meg b előjelét. Ekkor csak



48.1 ábra. 8 : 10 frekvenciaarányú koszinusz hullámok szuperpozíciója
Általános esetben az egyes „lebegéseken” belüli szerkezet nem ismétlődik meg pontosan

a szinuszfüggvény vált előjelet, a koszinusz nem, és így

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \quad (48.3)$$

A (48.2) és (48.3) egyenletet összeadva a szinuszos tagok kiesnek, és a

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad (48.4)$$

összefüggést kapjuk. Ebből $\alpha = a+b$, $\beta = a-b$ helyettesítéssel könnyen kifejezhetjük

a $\cos \alpha + \cos \beta$ összeget is. Mivel ekkor $a = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ és $b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, a következőt kapjuk:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta). \quad (48.5)$$

Térjünk most vissza eredeti feladatunkhoz. A $\cos \omega_1 t$ és a $\cos \omega_2 t$ függvény összege

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t &= \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t. \end{aligned} \quad (48.6)$$

Tegyük most fel, hogy a két frekvencia majdnem egyenlő, s így mindkettő közelítőleg

megegyezik az $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ átlagfrekvenciával. Ekkor azonban $\omega_1 - \omega_2$ sokkal kisebb ω_1 -nél és ω_2 -nél. Az eredő rezgést tehát egy, az eredetihez többé-kevésbé hasonló frekvenciájú koszinusz hullámként foghatjuk fel, amelynek amplitúdója lassan változik. E változás

frekvenciája $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$. De vajon ez az a frekvencia, amellyel a lebegést halljuk? Bár (48.6)-ban azt kapjuk, hogy az amplitúdó $\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ -vel arányos, tulajdonképpen arról van szó, hogy a nagyfrekvenciájú rezgések burkolója két, ellenkező előjelű koszinuszgörbe (amelyeket a 48.1 ábrán szaggatott vonallal jelöltünk). Ennek alapján azt mondhatjuk, hogy az amplitúdó valóban $\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$

frekvenciával változik, de ha a hullámin-tenzitásról van szó, akkor e frekvencia kétszeresét kell vennünk. Így tehát az intenzitást moduláló hullám frekvenciája $\omega_1 - \omega_2$, bár képletünkben feleakkora frekvenciájú szorzó szerepel.

Azt kapjuk, hogy ha egy ω_1 és egy ω_2 frek-

venciájú hullámot összeadunk, eredményük $\omega_1 - \omega_2$ frekvenciával ingadozó amplitúdójú $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ frekvenciájú hullám lesz.

Ha a két amplitúdó különböző, az előző gondolatmenetet követve $A_1 \cos \omega_1 t$ -vel, ill. $A_2 \cos \omega_2 t$ -vel elvégezhetjük a számítást. Tudjuk azonban, hogy exponenciális kifejezésekkel sokkal kényelmesebb a számolás. Az $A_1 \cos \omega_1 t$ úgy is felfogható, mint $A_1 e^{i\omega_1 t}$ valós része. A másik hullám legyen hasonlóan $A_2 e^{i\omega_2 t}$ valós része, és a kettő összege $A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}$. Az átlagos frekvenciának megfelelő részt kiemelve, a következőt kapjuk:

$$A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} = e^{\frac{i}{2}(\omega_1 + \omega_2)t} \left[A_1 e^{\frac{i}{2}(\omega_1 - \omega_2)t} + A_2 e^{-\frac{i}{2}(\omega_1 - \omega_2)t} \right]. \quad (48.7)$$

Ismét egy hullámot kaptunk tehát, amelyet egy kisebb frekvenciájú hullám modulál.

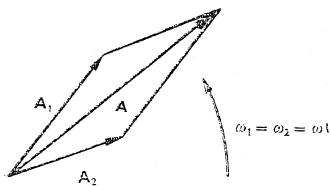
48.2 Lebegés és moduláció

A (48.7) hullám intenzitását kiszámíthatjuk, ha a jobb vagy bal oldal abszolút értékének négyzetét vesszük. A bal oldalt választva:

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \quad (48.8)$$

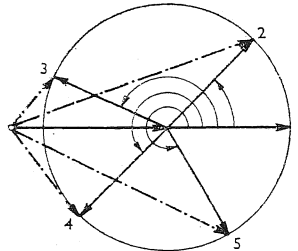
Mint látható, az intenzitás $\omega_1 - \omega_2$ frekvenciával változik az $(A_1 + A_2)^2$ és $(A_1 - A_2)^2$ határok között. Ha $A_1 \neq A_2$, a minimális intenzitás zérustól különböző.

Ugyanezt szemlélteti a 48.2 ábra. A komplex síkon az egyik hullámnak egy ω_1 szög-



48.2 ábra. Két azonos frekvenciájú komplex vektor eredője

sebességgel forgó A_1 hosszúságú vektor, a másik hullámnak pedig egy ω_2 szögsebességgel forgó A_2 hosszúságú vektor felel meg. Ha a két frekvencia pontosan egyenlő, a két vektor eredője forgás közben hosszát nem változtatja, vagyis az intenzitás ebben az esetben állandó. Ha viszont a frekvenciák kissé különböznek, a két komplex vektor különböző sebességgel forog. A 48.3 ábra az $A_1 e^{i\omega_1 t}$ vektor „szempontjából” mutatja a helyzetet. Miközben A_2 lassan elfordul A_1 -től, a két vektor eredője, amely kezdetben nagy volt, egyre kisebbé válik, majd a 180° -os szögnél eléri minimumát... Miközben tehát a vektorok forognak, összegük amplitúdója hol kisebb, hol nagyobb lesz, s ennek megfelelően az intenzitás változik.



48.3 ábra. Két különböző frekvenciájú komplex vektor eredője az egyik vektor végpontjához rögzített forgó koordináta-rendszerből nézve

Ábránk a lassan elforduló vektor öt egymás utáni helyzetét mutatja

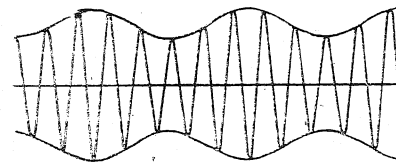
Igen könnyen megfigyelhető ez a jelenség kísérletileg is. Kapcsoljunk rá két hangszóróra két független oszcillátort. A két hullámforrás által kibocsátott jel különböző. Ha a két frekvenciát pontosan azonosra tesszük, az eredő hangerő a tér minden pontján állandó lesz. Ha ez egyik frekvenciát kissé megváltoztatjuk, azt halljuk, hogy az intenzitás változik: annál gyorsabban, minél nagyobb a frekvencia-különbség. (Másodpercenként tíznél több változást a fül már nehezen érzékel.)

Jelenségünket láthatóvá is tehetjük, ha a két hangszóró áramát egy oszcilloszkópra kapcsoljuk, amely az áramok összegét mutatja.

Attól függően, hogy a két frekvencia közti különbség mekkora, vagy egy lassan változó amplitúdójú hullámot látunk, vagy a 48.1 ábrához hasonló „lúktetést”. Minél nagyobb a különbség, a csúcsok annál közelebb húzódnak egymáshoz. Ha az amplitúdók nem egyenlőek, az egyik jel gyengébb, mint a másik, az eredő hullám amplitúdója — mint várható is — sohasem válik zérussá.

Ez a jelenség játszódik le az *amplitúdó-moduláción* (AM) alapuló rádióadás esetében is. A rádióadóban igen nagy frekvenciájú elektromos rezgést keltenek; legyen e rezgés frekvenciája pl. 300 kHz. Ha ezt a *vivőjelet* bekapcsoljuk, a rádióadó állandó amplitúdójú, s-onként 800 000 rezgést tartalmazó hullámvonulatot bocsát ki. Az „információt” az adó úgy továbbítja, hogy a mikrofonba jutó hanghullámokat hozzáadja a vivőjelhez, azaz a vivőjel amplitúdóját a hanghullámoknak megfelelően modulálja.

Tételezzük fel, hogy egy énekesnő hangszálainak pontosan szinuszos rezgetésével tökéletes zenei hangot ad ki. A rádióadó által kibocsátott jel erőssége ekkor a 48.4 ábrán láthatóan változik.



48.4 ábra. Modulált vivőhullám

Ábránkon $\omega_v/\omega_m = 5$, míg a valódi rádióhullámoknál $\omega_v/\omega_m \approx 100$

A vevőkészülék e jelből visszaállítja az eredeti hangfrekvenciás rezgést; a vivőhullámtól különválasztja annak burkolóját, amely az énekesnő hangszálai által kibocsátott rezgéseknek, vagyis a hangjának felel meg. A hangszóró ugyanilyen frekvenciájú hangot kelt a levegőben, s a hallgató — mint mondani szokás — meg sem tudja különböztetni ezt a hangot az eredetitől. A valóságban persze a különböző torzítások és egyéb finom effektu-

sok miatt mégis érzékeljük a különbséget a rádió- és a valódi énekhang között, ez azonban az elmondottakon semmit sem változtat.

48.3 Oldalsávok

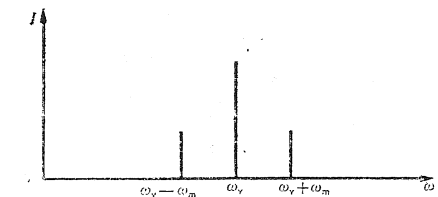
A modulált hullám matematikailag az

$$S = (1 + b \cos \omega_m t) \cos \omega_v t \quad (48.9)$$

képlettel írható le, ahol ω_v a vivőhullám, ω_m pedig a hang frekvenciája. Használjuk fel ismét a koszinuszokra kapott összefüggéseket, vagy végezzük el a számítást $e^{i\theta}$ tulajdonságainak felhasználásával. (Az utóbbi könnyebb, de egyébként teljesen mindegy, hogy melyik utat választjuk.) A következőt kapjuk:

$$S = \cos \omega_v t + \frac{1}{2} b \cos(\omega_v + \omega_m)t + \frac{1}{2} b \cos(\omega_v - \omega_m)t. \quad (48.10)$$

A kimenő hullám úgy is felfogható, mint a három hullám szuperpozíciójaként keletkezett eredő, melyek közül az egyik ω_v , vagyis a vivőhullámmal megegyező frekvenciájú, a másik két hullám frekvenciája pedig a vivőhullám és a moduláló hullám frekvenciájának összege, ill. különbsége. A generátor által kibocsátott jel intenzitását a frekvencia függvényében ábrázolva azt kapjuk, hogy az intenzitás túlnyomó része természetesen mindig a vivőhullám frekvenciájához tartozik, amint azonban egy énekes elkezd énekelni, az $\omega_v + \omega_m$ és $\omega_v - \omega_m$ frekvenciákon is megjelenik bizonyos, az énekes b^2 hangerejével arányos inten-



48.5 ábra. Egyetlen, ω_m frekvenciájú koszinusz-hullámmal modulált ω_v frekvenciájú vivőhullám frekvenciaspektruma

zítás (48.5 ábra). Ezek az *oldalsávok*, amelyek akkor jelennek meg, amikor az adó modulált jelet sugároz. Ha a mikrofonba jutó hang két különböző ω_m és ω'_m frekvenciájú hangot tartalmaz (pl. ha egyszerre két hangszere hangja hallható), akkor könnyű belátni, hogy $\omega_v \pm \omega_m$ mellett két új hullám is megjelenik: $\omega_v \pm \omega_m$ frekvencián.

Valamilyen bonyolult, sok koszinuszos tag összegeként előállítható* modulációnál az adó egy egész frekvenciatartományban sugároz, melynek határait a vivőhullám frekvenciájának és a modulációban részt vevő legmagasabb frekvenciának az összege, ill. különbsége adja.

Bár első pillantásra azt hihetnénk, hogy a rádióadó csak a vivőhullám névleges frekvenciáján sugároz — hiszen a rádióadóban nagy, rendkívül stabil kristályoszillátorok vannak, s mindent úgy állítottak be, hogy a frekvencia pontosan 800 kHz legyen —, amint valaki pl. *bejelenti*, hogy „az adás frekvenciája 800 kHz”, ezt modulálja a jellel, vagyis a valódi frekvencia ekkor már nem pontosan 800 kHz! Tegyük fel, hogy a berendezés erősítői a fül érzékenységi tartományának jelentős részében jól működnek (a fül 20 kHz-ig hallja a hangokat, a rádióadók és -vevők azonban általában csak 10 kHz-ig működnek, s így a legmagasabb hangokat rádióon nem halljuk). A bemozdó hangjában tehát 10 000 Hz-ig minden frekvencia előfordulhat, vagyis a rádióadó 790 és 810 kHz között sugároz. Képzeljük el, mennyi zavart okozna, ha a 795 kHz frekvencián egy másik adó működne! Az sem segítene ekkor, ha a vevő

* Mikor állítható elő egy görbe koszinuszok összegeként? Válasz: általában mindig, kivéve néhány, csak a matematikusok számára érdekes esetet. Természetesen fel kell tennünk, hogy görbénk egy pontban csak egy értéket vesz fel, s nem ugrál olyan értelmetlenül, hogy pl. egy végtelen kis szakaszon végtelen sok ugrása legyen. Ilyen megszorításoktól eltekintve, minden normális görbe (pl. minden olyan hangnak megfelelő görbe, amelyet egy énekes hangszárainak rezgetésével ki tud adni) előállítható koszinusz hullámok összegeként.

olyan érzékennyé tennék, hogy csak a 800 kHz-es frekvenciát vegye, de ne vegye az e frekvencia két oldalán elhelyezkedő 10 kHz szélességű oldalsávokat. Ekkor ugyanis — mivel az információt éppen az oldalsávok tartalmazzák — nem hallanánk a bemozdó hangját! Ezért feltétlenül szükséges, hogy az állomások ne legyenek egymáshoz olyan közel, hogy oldalsávjaik átfedjék egymást, a vevőberendezés pedig csak annyira legyen szelektív, hogy a névleges frekvencia mellett még az oldalsávokat is tudja fogni. A rádióadásban ez a megszorítás nem okoz nagy problémát. Mintegy ± 20 kHz frekvenciatartományban hallunk, a rádióadások szokásos frekvenciája viszont 500 és 1500 kHz közé esik, így bőségesen van hely a rádióadók számára.

Nehezebben megoldható a probléma a televízió esetében. Az elektronsugár nyomán a képcső felületén világos és sötét pontok jelennek meg. Ez a „világos” és „sötét” a „jel”. A sugár az egész 500 sorból álló képet általában 1/30-ad s alatt tapogatja le. Tegyük fel, hogy a kép vízszintes és függőleges felbontása körülbelül megegyezik, vagyis egy cm-re vízszintesen és függőlegesen is ugyanannyi pont esik. Az 500 sor minden pontjában meg kell adni, hogy az illető pont világos vagy sötét legyen. Ha ezt koszinusz hullámokkal akarjuk elérni, a legkisebb hullámhossz, amire szükségünk van, a képernyő méretének 1/250 része. Másodpercenként $250 \times 500 \times 30$ információt kell tehát továbbítanunk. A legnagyobb frekvencia, amelyet át akarunk vinni, így majdnem 4 MHz. A valóságban ahhoz, hogy a televíziós állomások műsorszórását jól lehessen választani (ne zavarják egymást), ennél még valamivel többre, mintegy 6 MHz-re van szükség, a hang és egyéb információk átvitele miatt. Így 800 kHz frekvenciájú vivőhullámmal természetesen nem képzelhető el tévéadás, hiszen a moduláló frekvencia nem lehet nagyobb, mint a vivőhullám frekvenciája.

A televíziós adások frekvenciatartománya 54 MHz-nél kezdődik. Az USA-ban az első átviteli csatorna (amelyet 2-es csatornának neveznek) 54-től 60 MHz-ig terjed, vagyis

6 MHz szélességű. „De hiszen éppen most bizonyítottuk be, hogy mindkét oldalon felép egy oldalsáv, s így kétszerakkora sávzélességet kellene vennünk” — mondhatja valaki. Kiderül azonban, hogy a rádiómérnökök meglehetősen ravasz emberek. Ha a modulált jelben a fáziskülönbségek figyelembevétele miatt koszinuszok mellett szinuszos tagokat is megengedünk, egy meghatározott összefüggést kapunk a nagy és a kis frekvenciák felé eső oldalsáv között. Ez azt jelenti, hogy az egyik oldalsáv a másikhoz képest nem tartalmaz új információt, ezért az egyik oldalsávot nem is továbbítják, viszont a vevőkészülékét úgy szerkesztik meg, hogy az az egyik oldalsáv és a vivőhullám ismeretében rekonstruálja az eredeti információt. Az egyoldalsávot adás igen ügyes módszer az információátvitelhez szükséges hullámszár leszűkítésére.

48.4 Lokalizált hullámcsomagok

Vizsgáljuk most együtt a térbeli és időbeli interferenciát. Tegyük fel, hogy a térben két hullám terjed. Természetesen már tudjuk, hogy a térben terjedő hullámokat — pl. az elmozdulást egy hanghullámban — az $e^{i(\omega t - kx)}$ függvénnyel írhatjuk le. E függvény akkor megoldása a hullámegyenletnek, ha $\omega^2 = k^2 c^2$, ahol c a hullám terjedési sebessége. Ha ez az összefüggés fennáll, függvényünk $e^{ik(x-ct)}$ alakba írható, vagyis az általános $f(x-ct)$ függvény speciális esetére jutunk. Így e függvény $\omega/k = c$ sebességű hullámot ír le és minden rendben van.

Összegezzünk két ilyen hullámot! Tegyük fel, hogy a két hullám eltérő frekvenciájú. (Annak az esetnek a vizsgálatát, amikor az amplitúdók sem egyenlők, az Olvasóra bízjuk; lényeges különbséget ez sem jelent.) Számítsuk ki tehát az $e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}$ összeget. Felhasználhatjuk a két jel összegének kiszámításához korábban levezetett matemati-

* Magyarországon a tv-adás 625 sorral dolgozik és a csatornaszélesség is nagyobb (Szerkesztő).

kai képleteket. Természetesen, ha mindkét hullám terjedési sebessége c , akkor feladatunk igen egyszerűvé válik, hiszen

$$e^{i\omega_1(t-x/c)} + e^{i\omega_2(t-x/c)} = e^{i\omega_1 t'} + e^{i\omega_2 t'} \quad (48.11)$$

vagyis ugyanúgy számolhatunk, mint eddig, az eltérés csak annyi, hogy t változó helyébe $t' = t - x/c$ lép. Ugyanolyan modulációkat kapunk, mint korábban, de — mint látható — ezek a modulációk a hullámmal együtt mozognak. Más szavakkal, ha két olyan hullámot adunk össze, amely nemcsak rezeg, hanem a térben is terjed, akkor az *eredő hullám szintén mozog*, mégpedig az összetevőkkel azonos sebességgel.

Általánosítsuk most e megfontolást olyan hullámokra, amelyeknek frekvenciája és k hullámszáma közötti összefüggés nem ilyen egyszerű — ez a helyzet pl., ha a közeg törésmutatója frekvenciafüggő. A 31. fejezetben (3. kötet) már foglalkoztunk a törésmutatóval és megállapítottuk, hogy a hullámszám: $k = n\omega/c$, ahol n a törésmutató. Egy érdekes speciális esetre, a röntgensugarakra azt kaptuk, hogy

$$n = 1 - \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m \omega^2} \quad (48.12)$$

Tudjuk, hogy ha ω és k nem is arányos egymással, az adott frekvenciájú és hullámszámú hullám terjedési sebessége mindig ω/k . E hányadost *fázissebességnek* nevezzük; ekkora sebességgel mozognak az egyes hullámok adott fázisú pontjai, ill. csomópontjai:

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad (48.13)$$

A fázissebesség — pl. röntgensugarak üvegben való terjedése esetén — nagyobb a vákuumbeli fénysebességnél [n (48.12)-ből kapott értéke 1-nél kisebb]. Ez kissé meglepő, hiszen tudjuk, hogy a fénysebességnél nagyobb sebességgel nem lehet jeleket továbbítani!

Nézzük meg, mit mondhatunk két hullám interferenciájáról, ha ω és k között van vala-

milyen összefüggés. Az n -re adott (48.12) képletből speciális esetünkre k a következőképpen fejezhető ki ω függvényeként:

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{a}{\omega c}, \quad (48.14)$$

ahol $a = Nq^2/2\epsilon_0 m$ állandó. Minden frekvenciához tartozik egy meghatározott hullámszám, s célunk két ilyen hullám összegének kiszámítása.

A (48.7) egyenlethez hasonlóan:

$$\begin{aligned} & e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} = \\ & = e^{i/2[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x]} \times \\ & \times \left\{ e^{i/2[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} + \right. \\ & \left. + e^{-i/2[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} \right\}. \quad (48.15) \end{aligned}$$

Ismét modulált hullámot kaptunk tehát, amelynek frekvenciája és hullámszáma az átlagos frekvencia és az átlagos hullámszám, amplitúdója pedig a frekvenciák és a hullámszámok különbségétől függ.

Tegyük most fel, hogy a két hullám frekvenciája között viszonylag kicsi az eltérés. Ha két olyan hullámot összegzünk, amelyek frekvenciája és hullámszáma közel egyenlő, akkor $(\omega_1 + \omega_2)/2$ helyett gyakorlatilag akármelyik eredeti frekvenciát is vehetjük, s hasonló mondhatunk $(k_1 + k_2)/2$ -re is. Így a hullámok, a gyors rezgések és a csomópontok sebessége lényegében továbbra is ω/k . De vigyázat, a moduláció sebessége már nem ugyanaz! Mennyivel kell megváltoztatni x -et, hogy kiegyenlítsük t adott megváltozását? A moduláló hullám sebessége e megfontolás alapján:

$$v_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \quad (48.16)$$

A moduláció sebességét *csoportssebességnek* is szokták nevezni. Ha feltesszük, hogy a frekvenciák, s így a hullámszámok különbsége is elég kicsi, akkor kapott képletünk a

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk} \quad (48.17)$$

határértékhez tart. Más szavakkal: az igen lassú modulációknak, az igen lassú lebegések-

nek van egy meghatározott terjedési sebessége, s ez — bármilyen különösnek is tűnik — nem egyenlő a hullámok fázissebességével.

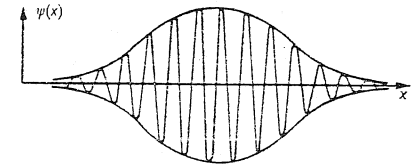
A *csoportssebesség* ω -nak k szerinti deriváltja, a *fázissebesség* pedig ω/k .

Mi ennek az oka? Nézzünk ismét két kissé különböző hullámhosszú, a 48.1 ábrán látható hullámot. Feltesszük, hogy a két hullám fázisa egyszer különböző, másszor egymással megegyező stb. E hullámoknak kissé a frekvenciája is különbözik, ezért fázissebességük, vagyis a csomópontok sebessége sem pontosan azonos, ami egy teljesen új jelenségre vezet. Tegyük fel, hogy az egyik hullámmal együtt haladunk, s így figyeljük a másikat. Ha a két hullám ugyanakkora sebességgel mozogna, hozzánk képest a másik hullám helyzete nem változna. (Ha tehát egy hullámhegyen lovagolnánk és közvetlenül előttünk egy másik hullámhegyet látnánk, akkor ugyanezt tapasztalnánk a későbbiek során is.) A valóságban azonban nem egyenlő a két sebesség. A frekvenciakülönbség, s így a sebességkülönbség is kicsi, de emiatt a sebességkülönbség miatt az egyik hullámhegyen utazva azt látjuk, hogy a másik hullám lassan elmozdul előre vagy hátra. Hogyan mozognak a csomópontok? Ha az egyik hullámvonulatot egy icipicit előre tojzuk, a csomópontok sokkal inkább tolnak előre (vagy hátra). A hullám-burkoló tehát más sebességgel mozog, mint maguk az összetevő hullámok. A modulált jelek terjedési sebessége a *csoportssebesség*. Így ha leadunk valamilyen jelet, vagyis a hullámot megváltoztatjuk — azaz moduláljuk —, akkor a jel a csoportssebességgel terjed, feltéve, hogy a moduláció viszonylag lassú (ha a moduláció gyors, az analízis sokkal nehezebb).

Végre be tudjuk bizonyítani, hogy a röntgensugarak grafitban *sem* terjednek gyorsabban, mint a fény, bár fázissebességük *nagyobb* a fénysebességnél. Számítsuk ki ehhez $d\omega/dk$ -t. A (48.14) differenciálásával: $dk/d\omega = 1/c + a/\omega^2 c$. A csoportssebesség ennek reciproka:

$$v_{cs} = \frac{c}{1 + a/\omega^2}, \quad (48.18)$$

amely valóban kisebb c -nél! Így, annak ellenére, hogy a fázis a fénysebességnél gyorsabban mozoghat, a hullámokra modulált jelek sebessége kisebb a fénysebességnél. Ezzel látszólagos paradoxonunkat megoldottuk. Az egyszerű $\omega = kc$ esetben nyilvánvalóan $d\omega/dk$ is c . Ily módon, ha a fázissebesség minden frekvenciára megegyezik, akkor a csoportssebesség is ugyanez.



48.6 ábra. A hullámcsomag

48.5 Részecskék valószínűség-amplitúdói

Vizsgáljunk most meg egy másik igen érdekes példát a fázissebesség viselkedésére, amely a kvantummechanikával kapcsolatos. Tudjuk, hogy egy részecske adott helyen való megtalálásának valószínűség-amplitúdóját mint a hely és az idő függvényét, egydimenziós esetben, bizonyos körülmények között a

$$\psi = Ae^{i(\omega t - kx)} \quad (48.19)$$

függvénnyel írhatjuk le. Ebből ω a frekvencia, amelynek segítségével a klasszikus értelemben vett energia $\mathcal{W} = \hbar\omega$ alakban fejezhető ki, a k hullámszám az impulzussal kapcsolatos: $p = \hbar k$. Ha a hullámszám pontosan k , vagyis hullámunk ideális (mindenhol azonos amplitúdójú) hullám, akkor azt mondjuk, hogy a részecskének meghatározott — impulzusa van. A (48.19) amplitúdó abszolút értékének négyzete adja meg a részecske relatív megtalálási valószínűségét, a hely és idő függvényeként. Ez esetünkben *állandó*, vagyis a részecske mindenhol ugyanolyan valószínűséggel található meg. Tekintsünk most egy olyan esetet, amikor tudjuk, hogy a részecske bizonyos helyeken nagyobb valószínűséggel tartózkodik, mint a tér többi részén. Jó példa erre a hullámcsomag (48.6 ábra), amelynek valahol van egy maximuma, s ettől távolodva a valószínűség-amplitúdó mindkét irányban zérushoz tart. [Ez nem teljesen felel meg a (48.1) hullám viselkedésének, hiszen annak sok maximuma volt. Sok, majdnem egyenlő ω és k értékekhez tartozó hullámot összegezve azonban elérhetjük, hogy csak egy maximum maradjon.]

Mivel annak valószínűsége, hogy egy adott helyen a részecskét megtaláljuk, a (48.19) valószínűségi amplitúdó abszolút értékének négyzetével arányos, egy adott pillanatban a részecske legnagyobb valószínűséggel hullámcsomagunk közepe táján tartózkodik, hiszen itt a legnagyobb az amplitúdó. Várjunk most pár percet; ezalatt a hullámok mozognak, s így a hullámcsomag is elmozdul. Ha tudnánk, hogy részecskénk eredetileg hol volt, a klasszikus fizika alapján természetesen *azt várnánk*, hogy később valahol máshol találjuk, hiszen a részecskének van valamilyen *sebessége* és impulzusa. A kvantummechanika tehát csak akkor adhatja vissza az energia, impulzus és sebesség közötti helyes klasszikus összefüggést, ha a csoportssebesség, vagyis a moduláció sebessége megegyezik azzal, amit egy ugyanolyan impulzusú részecskére klasszikusan várnánk.

Nézzük meg, hogy igaz-e ez. A klasszikus elmélet szerint az energia és a sebesség kapcsolata:

$$\mathcal{W} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (48.20)$$

Az impulzus pedig

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (48.21)$$

E két egyenletből v kiküszöbölésével az energia és impulzus közötti összefüggésre jutunk:

$$\mathcal{W}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Erről az igen fontos négydimenziós eredményről — amely $p_\mu p_\mu = m^2$ alakban is felírható — már sokat beszéltünk. Vezessük be \mathcal{W} és p

helyett a $W = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ összefüggésekkel ω -t és k -t. Így az m tömegű részecskét leíró kvantummechanikai hullám frekvenciája és hullámszáma között a

$$\frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} - \hbar^2k^2 = m^2c^2 \quad (48.22)$$

összefüggést kapjuk. Fejezzük ki (48.22)-ből ω -t:

$$\omega = c \sqrt{k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}}$$

Az ω/k fázissebesség tehát mindig nagyobb a fénysebességnél!

Foglalkozunk most a csoportsebességgel! A csoportsebesség, amellyel a modulációk mozognak, $d\omega/dk$. Egy négyzetgyökös kifejezést kell differenciálnunk, ami könnyű dolog:

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2 + m^2c^2/\hbar^2}}$$

A nevező értéke azonban ω/c , s így $d\omega/dk = c^2k/\omega$. Mivel továbbá $k/\omega = p/W$,

$$v_{cs} = \frac{c^2p}{W}$$

Másrészt (48.20)-ből és (48.21)-ből $c^2p/W = v$, vagyis a részecske sebessége a klasszikus mechanika szerint. Látható tehát, hogy az ω , k és a klasszikus W , p mennyiségek között fennálló alapvető $W = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ kvantummechanikai összefüggésből csak az $\omega^2 - k^2c^2 = m^2c^4/\hbar^2$ összefüggés kapható meg. Újabb összefüggésünk segítségével viszont már W és p sebességfüggését, vagyis a (48.20) és (48.21) egyenletet is megérthetjük.

A csoportsebességnek meg kell egyeznie a részecske sebességével, ha ennek a leírásnak egyáltalán van értelme. Más szavakkal, ha egy adott pillanatban a részecske nagy valószínűséggel az egyik hely környezetében, tíz perccel később pedig hasonló valószínűséggel egy másik hely környezetében tartózkodik, mint ahogy azt a kvantummechanika feltételezi, akkor a „hullámhegy” által megtett utat az időkülönbséggel osztva, a részecske klasszikus sebességét kell kapnunk.

48.6 Háromdimenziós hullámok

Mielőtt befejeznék a hullámok tárgyalását, néhány általános megjegyzést teszünk a hullámegyenlettel kapcsolatban. Ezek az elmékedések már előre mutatnak, bepillantást nyújtva abba, amit a hullámok további tanulmányozása során látunk majd. A hang egydimenziós hullámegyenlete a következő volt:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}$$

ahol c a hullám sebessége (hanghullámnál a hangé, fényhullámnál a fényé). A nyomás- és sűrűségkülönbségek terjedésének szintén van valamilyen meghatározott sebessége, s így azt várjuk, hogy pl. a nyomáskülönbségek terjedése is a fenti egyenlettel írható le. Ez valóban igaz, igazolását az Olvasóra bizzuk. Útbaigazítás: ρ_e a χ függvény x szerinti differenciáhányadosával arányos. Ha azonban a hullámegyenletet x szerint differenciáljuk, mindjárt láthatjuk, hogy $d\chi/dx$, s így ρ_e is kielégíti az eredeti hullámegyenletet. Másrészt p_e arányos ρ_e -vel, ezért p_e is megoldása ennek az egyenletnek. Látjuk tehát, hogy a nyomás, az elmozdulás stb. mind ugyanazt az egyenletet elégíti ki.

A hang hullámegyenletét általában nem az elmozdulásra, hanem a nyomásra írják fel. Az elmozdulás ugyanis vektor, vagyis iránya és nagysága is van, a nyomás pedig skalár. Nyilvánvaló tehát, hogy a nyomás vizsgálata egyszerűbb.

Foglalkozunk most a háromdimenziós hullámegyenlettel. Az egydimenziós hullámegyenletnek, mint tudjuk, megoldása az $e^{i(\omega t - kx)}$ függvény, ahol $\omega = kc$. Azt is tudjuk, hogy egy háromdimenziós síkhullám az $e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ függvénnyel írható le, amelyben $\omega^2 = k^2 c^2$ [rövidített formája a $(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)c^2$ kifejezésnek].

Szeretnénk kitalálni, hogy mi a helyes hullámegyenlet három dimenzióban. Ha a hangra egy dimenzióban már elvégzett dinamikai megfontolás három dimenzióra általánosítanánk, természetesen megkaphatnánk a keresett

egyenletet. Ezt azonban nem tesszük, csupán felírjuk az eredményt, vagyis a nyomásra (vagy az elmozdulásra, vagy bármilyen másra) kapott hullámegyenletet:

$$\frac{\partial^2 p_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_e}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_e}{\partial t^2} \quad (48.23)$$

Igazoljuk ennek az egyenletnek a helyességét $e^{i(\omega t - k \cdot r)}$ behelyettesítésével. Mint látható, minden x szerinti differenciálás $-ik_x$ -szel való szorzásnak felel meg. A kétszeri differenciálás tehát $-k_x^2$ -tel való szorzást jelent, s így első tagunk $-k_x^2 p_e$ lesz. Hasonlóan, a második tag $-k_y^2 p_e$, a harmadik pedig $-k_z^2 p_e$ lesz. A jobb oldal: $-(\omega^2/c^2) p_e$. A kapott egyenletet $-p_e$ -vel elosztva k és ω összefüggésére éppen azt kapjuk, amit vártunk.

Nem tudjuk megállni, hogy fel ne írjuk azt az alapvető egyenletet, amely a kvantummechanikai hullámok (48.22) diszperziós relációjának felel meg. A részecske x , y , z helyen t időben való megtalálásának valószínűségi amplitúdóját φ -vel jelölve, a kvantummechanika alapegyenlete szabad részecskékre a következő:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi \quad (48.24)$$

Az egyenlet relativisztikus jellegű, ami már abból látható, hogy benne x , y , z és t éppen a relativitáselméletben megszokott kombinációban lép fel.

Egyenletünk hullámegyenlet, amelyből egy síkhullám formulájának behelyettesítésével éppen a helyes $-k^2 + \omega^2/c^2 = m^2c^2/\hbar^2$ kvantummechanikai összefüggést kapjuk.

Van ennek a hullámegyenletnek még egy igen fontos tulajdonsága is: következik belőle, hogy a hullámok tetszőleges szuperpozíciója is megoldás. Így ez a (48.24) képlet mindazt magában foglalja, amit a kvantummechanikából és a relativitáselméletből eddig tanultunk, legalábbis egy olyan egyedülálló, szabad részecske esetén, amelyre semmilyen külső potenciál vagy erő sem hat.

48.7 Sajátrezgések

Foglalkozunk végül egy különös, az előbbiektől kissé eltérő lebegési jelenséggel. Képzeljünk el két egyforma ingát, amelyeket egy eléggé gyenge rugó köt össze. Az ingák hossza legyen a lehető legpontosabban egyenlő. Ha az egyik ingát kissé kiterítjük, majd elengedjük, lengéseket végez, s eközben a rugó közvetítésével a másik ingára annak sajátfrekvenciájával egyező ütemben váltakozó erőt gyakorol. A rezonanciaelmélet szerint, ha egy rendszerre éppen a megfelelő frekvenciájú erővel hatunk, akkor a rendszer mozgásba jön. Így az egyik inga lengései a másikat is mozgásba hozzák. Ilyen feltételek mellett azonban, mivel a rendszer energiája véges, egy új jelenséget tapasztalunk: miközben az első inga energiát ad át a másodiknak, ő maga fokozatosan elveszti energiáját s mikor minden energiája elfogy, megáll. Ekkor viszont a másik inga leng maximális energiával. Ezután ugyanaz történik, mint előbb, csak a két inga szerepe cserélődik fel. Ez a kísérlet igen érdekes és szórakoztató, mivel azonban azt mondtuk, hogy lebegési jelenségről beszélünk, meg kell magyaráznunk, hogy hogyan írható le a mozgás a lebegésemélet segítségével.

Mindkét mozgás ciklikusan váltakozó amplitúdójú rezgőmozgás. Ebből azt sejtjük, hogy az egyik inga mozgását — az előbbtől eltérően — egyidejűleg jelenlevő, de kissé eltérő frekvenciájú két rezgőmozgás összegeként is felfoghatjuk. Mivel rendszerünk lineáris, azt várjuk, hogy a megfigyelt mozgás a rendszer két más mozgásának szuperpozíciójaként is előállítható. Valóban, könnyen találhatunk két olyan kezdőfeltételt, amely teljesen periodikus rezgőmozgásra vezet. Az előzőekben tárgyalt mozgás nem volt tökéletes rezgőmozgás, hiszen valamelyik inga mindig energiát adott át a másiknak, s eközben amplitúdója változott. Úgy is elindíthatjuk azonban a mozgást, hogy az amplitúdók ne változzanak. Ha pl. a két ingát ugyanolyan kezdőfeltételekkel indítjuk el, akkor mindig ugyanúgy lengenek, mivel hosszuk azonos, s a rugónak ebben az esetben nincs semmiféle szerepe (feltéve, hogy

nincs sűrűlódás vagy egyéb zavaró tényező). Lehetséges egy másik meghatározott frekvenciájú mozgás is: ha a két ingát pontosan azonos távolságra, de ellenkező irányban térítjük ki, a mozgás szintén pontosan periodikus lesz. A rugó hatása ekkor csak abban nyilvánul meg, hogy kissé megnöveli a gravitáció okozta visszatérítő erőt, s ezért a rendszer rezgőmozgásának frekvenciája az előbbinél valamivel nagyobb lesz. Hogy miért nagyobb? Azért, mert a rugó húzóereje a gravitációs visszatérítő erővel egy irányban hat, ami a rendszert kissé „merevebbé” teszi, s így a mozgás frekvenciáját kissé megnöveli.

Rendszerünk tehát kétféle állandó amplitúdójú rezgést végezhet: lehet a két inga kitérése mindig egyirányú, ennek egy bizonyos frekvencia felel meg, vagy ellenkező irányú, aminek egy kissé nagyobb frekvencia felel meg.

Mivel a rendszer lineáris, az előbbi két mozgás szuperpozíciójaként tetszőleges mozgását előállíthatjuk. (Emlékezzünk csak vissza, fejezetünk éppen a két különböző mozgás összegezésakor fellépő jelenségekkel foglal-

kozik!) Mi történik, ha kombináljuk a kapott két megoldást? Ha a $t = 0$ időpillanatban a két mozgást egyszerre, azonos amplitúddal és azonos fázissal indítjuk el, azt kapjuk, hogy kezdetben az egyik inga, amelynek kitérése az első és a második mozgásban ellenkező, éppen nyugalomban van, a másik ingának pedig, melynek kitérése mindkét mozgásban azonos irányú, igen nagy a kitérése. Miközben az idő múlik, a rendszer e két alapvető mozgást egymástól függetlenül végzi, s eközben egyiknek a fázisa a másikéhoz képest fokozatosan eltolódik. Elegendően hosszú idő múlva, vagyis ha pl. az egyik csak 90°, míg a másik már 90,5° rezgést végzett, a relatív fázis az eredetinek pont az ellenkezőjére változik. Az eredetileg nagy amplitúdójú rezgés amplitúdója tehát zérusra csökken, a kezdetben mozdulatlan ingáé pedig maximális lesz!

E bonyolult mozgást tehát leírhatjuk egyrészt a rezonancia és energiaátadás fogalmának felhasználásával, másrészt két állandó amplitúdójú, különböző frekvenciájú mozgás szuperpozíciójaként is.

49.1 Hullámok visszaverődése

Ebben a fejezetben néhány figyelemre méltó jelenséggel foglalkozunk, amelyek a hullámok valamilyen véges térrészre korlátozódása miatt lépnek fel. Megismerünk pl. néhány, a rezgő húrokkal kapcsolatos sajátosságot, amelyek általánosításából kapott összefüggés a matematikai fizikának talán a leglényegesebb alapelve.

A hullámok adott térrészre korlátozását először az egyik oldalon lezárt hullámokon, pl. a húron kialakuló egydimenziós hullámon vizsgáljuk. Ugyanílyen alapon falba ütköző egydimenziós hanghullámot, vagy bármilyen hasonló hullámot is elképzelhetnénk, de céljainknak most a húr is megfelel. Tételizzük fel, hogy a húr egyik végén be van fogva; például egy „végtelenül szilárd” falhoz van erősítve. Ez úgy fejezhető ki, hogy a húr y elmozdulása az $x = 0$ pontban zérus. Tudjuk, hogy ha nem lenne fal, akkor a mozgás általános megoldása két függvény, $F(x - ct)$ és $G(x + ct)$ összege volna. Az első függvény a húron az egyik irányba, a második függvény pedig az ellenkező irányba haladó hullámot jelenti. Vagyis bármely húrra az általános megoldás:

$$y = F(x - ct) + G(x + ct). \quad (49.1)$$

Térjünk vissza azonban eredeti feltételünkhöz, hogy a húr egyik vége nem mozog. Ha a (49.1) egyenletbe $x = 0$ -t helyettesítünk, és bármely t értékre nézve megvizsgáljuk y -t, akkor azt kapjuk, hogy $y = F(-ct) + G(+ct)$. Ha ez mindig zérus, az azt jelenti, hogy a $G(ct)$ függvénynek $-F(-ct)$ -vel kell egyenlőnek lennie, vagyis hogy valamely változó G függvénye egyenlő ugyanazon változó nega-

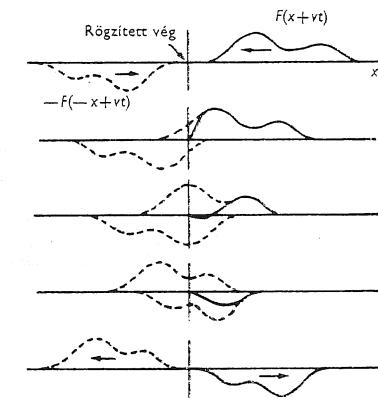
49 Sajátrezgések

tív értékének $-F$ függvényével. Ezt az eredményt (49.1)-be helyettesítve, a probléma megoldásaként a következőt kapjuk:

$$y = F(x - ct) - F(-x - ct). \quad (49.2)$$

Könnyű ellenőrizni, hogy (49.2)-ből $x = 0$ mellett valóban $y = 0$ adódik.

A 49.1 ábrán az $x = 0$ ponthoz közel, negatív x irányban haladó hullám s az origó másik oldalán ellenkező irányban haladó, ellenkező előjelelű feltételezett hullám látható. Feltételezett hullámról beszélünk, hiszen az origó másik oldalán nincs húr, ami rezegjen. A húr eredő mozgását a pozitív x tartományban levő két hullám összegének tekintjük. Amint elérik az origót (az $x = 0$ pontban), mindig kioltják egymást, és pozitív x értékeknél csak az ere-



49.1 ábra. A hullám visszaverődése két haladó hullám szuperpozíciójaként fogható fel

detivel természetesen ellentétes irányban haladó visszavert hullám létezik majd. Ez egyenértékű a következő állítással: amikor a hullám eléri a húr rögzített végét, előjelét megváltoztatva visszaverődik (úgy képzelhetjük el, hogy ami a húr rögzített végéhez érkezik, az a faltól „fejjel lefelé” jön vissza). Röviden, ha feltételezzük, hogy a húr végtelen hosszú, és minden, egyik irányban haladó hullámhoz – a már említett szimmetriával – egy ellenkező irányban haladó hullám is tartozik, akkor az $x = 0$ pontban a kitérés mindig zérus lesz, s nem okoz semmilyen különbséget, ha ebben a pontban a húrt rögzítjük.

Rátérünk a periodikus hullámok visszaverődésének tárgyalására. Tételezzük fel, hogy $F(x-ct)$ szinuszhullámot ír le, s hogy a hullám visszaverődik. A visszavert hullám $-F(-x-ct)$, ugyancsak szinuszhullám, mégpedig az előzővel azonos frekvenciájú, de ellentétes irányú. A teljes folyamat legegyszerűbben a komplex függvények segítségével fejezhető ki:

$$F(-ct) = e^{i\omega(t-x/c)} \text{ és}$$

$$F(-x-ct) = e^{i\omega(t+x/c)}.$$

Ha ezeket a kifejezéseket (49.2)-be helyettesítjük, s ha x helyébe 0 -t írunk, akkor t minden értékére $y = 0$, vagyis a szükséges feltétel teljesül. Az exponenciális függvények tulajdonságait felhasználva, y egyszerűbb formája:

$$y = e^{i\omega t}(e^{-i\omega x/c} - e^{i\omega x/c}) = -2ie^{i\omega t} \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (49.3)$$

Valami érdekes, új dologra bukkanunk! A (49.3) megoldás ugyanis azt mondja ki, hogy a húr minden x pontja ω frekvenciával rezeg. Függetlenül attól, hogy hol választjuk ezt az x pontot, a frekvencia mindig ugyanakkora! Van azonban a húrnak néhány pontja (azok, ahol $\sin \frac{\omega x}{c} = 0$), ahol a húr nem mozdul el. Továbbá, ha tetszőleges t időpontban pillanatfelvételt készítenénk a rezgő húrról, a kép szinuszhullámot mutatna, amelynek amplitúdója azonban a t időtől függ. A (49.3)

egyenletet vizsgálva kitűnik, hogy a szinuszhullám egy periódusának hossza a szuperponálódó hullámok egyikének hullámhosszával egyenlő:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (49.4)$$

Azokat a pontokat, amelyek kielégítik a $\sin \frac{\omega x}{c} = 0$ feltételt, vagyis ahol $\frac{\omega x}{c} = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$ csomópontoknak nevezzük. Két szomszédos csomópont között minden pont szinuszmozgást végezve mozog fel-le, de a mozgás képe nem változik. Ez a sajátrezgés alapvető jellegzetessége. Ha a mozgás olyan, hogy a tárgy minden pontja tökéletes szinuszmozgást végez, s minden pont azonos frekvenciával mozog (noha egyes pontok többet mozognak a többinél), akkor sajátrezgésről beszélünk.

49.2 Hullámok véges térben. Sajátfrekvenciák

Ismét egy érdekes problémát vetünk föl: mi történik, ha a húrt mindkét végénél, mondjuk ($x=0$)-nál és ($x=L$)-nél rögzítjük. Induljunk ki a hullámvisszaverődés gondolatából, s tegyük fel először, hogy valamilyen dombocskára a húron az egyik irányban halad. Az idő múlásával megközelíti a húr egyik végét, majd később kis „csomóvá” alakul át, mert összeadódik a másik oldalról jövő megfordított képével. Végülis az eredeti domb eltűnik, és képe az ellenkező irányban mozog, majd a folyamat a húr másik végén megismétlődik. A problémának – mint láttuk – egyszerű megoldása van, de vajon lehet-e ez szinuszmozgás (az ismertetett megoldás *periodikus*, de természetesen nem *szinuszos*). Próbáljunk a húron szinuszhullámot végigküldeni. Ha a húr egyik vége rögzített, akkor tudjuk, hogy a megoldás a (49.3)-hoz hasonló lesz. Ugyanezt kell kapnunk a húr másik vége felől, mivel az is rögzített. Vagyis periodikus szinuszmozgást egyetlen módon kapunk, ha a

szinuszhullám pontosan illeszkedik a húr hosszára. Ellenkező esetben nem lehet szó sajátfrekvenciáról, amellyel a húr tovább tud rezegni. Összefoglalva, ha a húron egy a hosszához éppen illeszkedő szinuszhullámot indítunk, akkor a húr további rezgése során a hullám megtartja tökéletes szinusz alakját, s a húr valamilyen frekvenciájú harmonikus rezgést végez.

Matematikailag a hullám alakját a $\sin kx$ függvénnyel írhatjuk le [ahol k a (49.3) és (49.4) egyenletekben szereplő ω/c -vel egyenlő], s $x = 0$ esetén ennek értéke zérus. A függvénynek azonban a húr másik végénél is zérusnak kell lenni, ami azt jelenti, hogy k értéke nem tetszőleges, mint akkor, amikor a húr csak egyik oldalán volt rögzítve. Esetünkben az egyetlen lehetőség az, hogy $\sin kL = 0$ legyen, mert ez a feltétel biztosítja azt, hogy a húr mindkét vége állandóan nyugalomban maradjon. Tudjuk, hogy egy szinuszfüggvény akkor zérus, ha argumentuma $0, \pi, 2\pi$ vagy π más egész számú többszöröse. Vagyis a

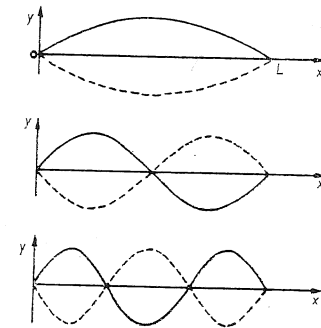
$$kL = n\pi \quad (49.5)$$

egyenlet attól függően, hogy milyen egész számot írunk n helyére, megadja k bármelyik lehetséges értékét. Minden k -hoz tartozik egy bizonyos ω frekvencia, ami a (49.3) egyenlet értelmében egyszerűen:

$$\omega = kc = \frac{n\pi c}{L}. \quad (49.6)$$

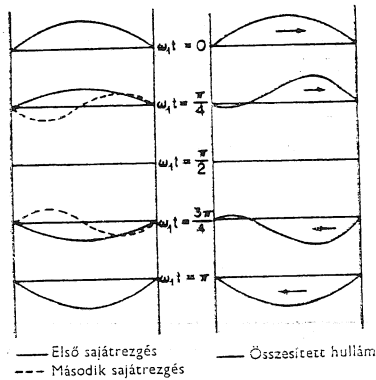
Eredményünket úgy is fogalmazhatjuk, hogy a húr csak bizonyos frekvenciák esetén végezhet szinuszmozgást. Ez a véges térrészre korlátozott hullámok legfontosabb jellemző vonása. Függetlenül attól, hogy milyen bonyolult rendszerről is legyen szó, mindig kiderül, hogy van néhány mozgásforma, amelynek időfüggése szinuszos, de frekvenciáját az adott rendszer és a rá vonatkozó határfeltételek természete határozza meg. Húr esetén sok, egymástól különböző frekvencia lehetséges s mindegyikük – definíció szerint – megfelel egy sajátrezgésnek, egy önmagát szinuszosan ismétlő mozgásformá-

nak. A 49.2 ábra a húr első három sajátrezgését mutatja. Az első sajátrezgés esetén a λ hullámhossz $2L$ -vel egyenlő. Ez abból látható, hogy ha folytatnánk a hullámot az $x = 2L$ távolságig, akkor a szinuszhullám egy teljes ciklusát kapnánk meg. Az ω körfrekvencia általában $2\pi c/\lambda$, de mivel ebben az esetben $\lambda = 2L$, azért a frekvencia most $\pi c/L$ -vel egyenlő. Ez az eredmény megegyezik (49.6)-tal, ha $n = 1$. Jelöljük ω_1 -gyel az első sajátrezgés frekvenciáját. A következő sajátrezgés képe: két hurok, középen egyetlen csomóponttal. A sajátrezgés hullámhossza L . A k megfelelő értéke kétszerese az előzőnek, s így a frekvencia is kétszerese: $2\omega_1$, a harmadik sajátrezgésre $3\omega_1$ stb. Vagyis a húr összes különböző frekvenciái a legalacsonyabb frekvenciának, ω_1 -nek egész számú többszörösei.



49.2 ábra. Rezgő húr első három sajátrezgése

Visszatérve a húr általános mozgásának vizsgálatához, belátható, hogy bármely lehetséges mozgás egyénél több, egyidejű sajátrezgés együttes hatásának tekinthető. Valójában az általános mozgás esetén végtelen sok sajátrezgésnek kell egyidejűleg gerjesztődni. Hogy valamilyen elképzelésünk lehessen az elmondottakról, nézzük meg pl. azt az esetet, amikor egyidejűleg két sajátrezgés lép fel. Tegyük fel, hogy a húr, a 49.3 ábrának megfelelően első sajátrezgését végzi. Az ábra a húr kitérését mutatja egyenlő időközökben a legalacsonyabb frekvenciához tartozó fél cikluson keresztül.



49.3 ábra. Két sajátrezgés összeadása haladó hullámot eredményez

Tételezzük azonban fel, hogy az első sajátrezgéssel egyidejűleg második is fellép. A 49.3 ábra a húr második sajátrezgéséhez tartozó kitérésorozatot is mutatja. A második sajátrezgés az indulás pillanatában az elsőhöz képest 90° -os fáziskésésben van. Ez azt jelenti, hogy az indulás pillanatában még nincs kitérés, de a húr két felének sebessége ellentétes irányú. Emlékezzünk a lineáris rendszerekre vonatkozó általános elvre: ha van két megoldás, akkor összegük szintén megoldás. Ezért a húr egy lehetséges harmadik mozgásra vonatkozó megoldás a 49.3 ábrán látható két megoldás összeadásából származik. Az eredő kitérés — ami az ábra jobb oldalán látható — olyan benyomást kelt, mintha egy kis domb szaladgálna oda-vissza a húr két vége között. Csupán két sajátrezgéssel nem kapunk erről a mozgásról teljes képet, ehhez ugyanis több sajátrezgésre van szükségünk. Valójában a most kapott eredmény speciális esete a lineáris rendszerekre vonatkozó következő fontos alapelvnek:

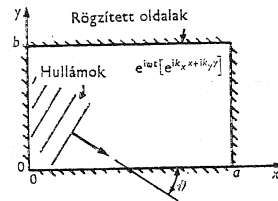
Bármilyen mozgás úgy vizsgálható, mint az összes sajátrezgésből származó mozgások meghatározott amplitúdókkal és fázisokkal vett összege.

Ez az alapelv azért olyan fontos, mert az egyes sajátrezgések nagyon egyszerűek — időben

lefolyló szinuszmozgások. Igaz, hogy tulajdonképpen a húr általános mozgása sem valami bonyolult, de vannak más, sokkal bonyolultabb rendszerek is, mint például egy repülőgép szárnyainak berezgése. Még a repülőgép szárnymozgására is fennáll az, hogy bizonyos rezgéseinek azonos frekvenciája van, más rezgései pedig más frekvenciájúak. Ha meg tudjuk találni ezeket a sajátrezgéseket, akkor a teljes mozgás mindig harmonikus rezgések szuperpozíciójaként tekinthető (kivéve, ha a rezgés olyan nagy, hogy a rendszer már nem tekinthető lineárisnak).

49.3 Kétdimenziós sajátrezgések

Mostanáig csak egydimenziós hullámokról beszéltünk — kifeszített húrról vagy csőben haladó hanghullámokról. Végső soron a háromdimenziós problémákhoz szeretnénk eljutni, egyszerűbb lesz a dolgunk azonban, ha először a kétdimenziósokra térünk át. Egy a és b oldalú, téglalap alakú gumimembránt (49.4 ábra) úgy rögzítünk, hogy az élek men-



49.4 ábra. Téglalap alakú lemez rezgése

tén sehol se mozdulhasson el. Kérdésünk: hogyan mozoghat a membrán és melyek lehetséges mozgásának jellemzői. Ugyanabból indulhatunk ki, mint a húr vizsgálatakor. Ha a lemez egyáltalán nem lenne rögzítve, akkor valamilyen haladó hullámmozgást várnánk, amit pl. az $e^{iωt} e^{-ik_x x + ik_y y}$ függvény ír le. Ez valamilyen k_x és k_y egymáshoz viszonyított értékeiktől függő irányban haladó szinuszhullámot jelent. Hogyan tehetjük az x -tengelyt azaz az $y = 0$ vonalat csomóvonalá? Követve előző gondolatmenetünket, elképzelhetünk

egy $e^{iωt} e^{-ik_x x - ik_y y}$ komplex függvényellelír másik hullámot is. A két hullám szuperpozíciója az $y = 0$ helyen zérus kitérést ad, tekintet nélkül x és t értékeire. (Ezek a függvények y negatív értékeire is értelmezve vannak — ahol nincs membrán, s így rezgés sem —, ettől azonban eltekintünk, mert célunk csak az, hogy a kitérés az $y = 0$ helyen zérus legyen.) A második függvényt visszavert hullámnak tekintjük.

Nekünk azonban nemcsak az $y = 0$, hanem az $y = b$ egyenesek mentén is csomóvonalat kell kapni. Hogyan érjük ezt el? Emlékezzünk vissza a kristályok fényvisszaveréséről tanultakra. A megoldás ezzel lesz kapcsolatban. Az $y = 0$ vonal mentén egymást kioltó hullámok csak akkor fogják egymást az $y = b$ vonal mentén is kioltani, ha $2b \sin \theta$ (ahol θ a 49.4 ábrán látható szög) egész számú többszöröse λ -nak:

$$m\lambda = 2b \sin \theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (49.7)$$

Ugyanúgy az y -tengelyt is csomóvonalá tehetjük, ha az eddigiekhez további két, $-e^{iωt} e^{ik_x x + ik_y y}$ és $e^{iωt} e^{ik_x x - ik_y y}$ függvényt adunk hozzá. Mindegyikük a másik két hullám közül valamelyiknek az $x = 0$ vonalról visszatükrözött képét írja le. Annak a feltétele, hogy $x = a$ csomóvonal legyen, hasonló az $y = b$ vonalra vonatkozó feltételhez: $2a \cos \theta$ -nak szintén λ egész számú többszörösével kell egyenlőnek lennie:

$$n\lambda = 2a \cos \theta. \quad (49.8)$$

A végeredmény tehát az, hogy „dobozba” zárt hullámok állóhullámot, vagyis meghatározott sajátrezgést hoznak létre.

Ez azt jelenti, hogy ha sajátrezgést akarunk létrehozni, ki kell elégíteni a fenti két feltételt. Számítsuk ki először a hullámhosszt; (49.7)-ből és (49.8)-ból kiszöböljük ki a θ szöveget. Ennek legegyszerűbb módja, ha az egyenletek mindkét oldalát $2b$ -vel, ill. $2a$ -val osztjuk, négyzetre emeljük és aztán a két egyenletet összeadjuk. Az eredmény:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = (n\lambda/2a)^2 + (m\lambda/2b)^2,$$

ami λ -ra megoldható:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4b^2}. \quad (49.9)$$

Ily módon két egész számtól függő kifejezésként meghatároztuk a hullámhosszat. Ebből azonnal megkapjuk az ω frekvenciát, mert — mint tudjuk — a frekvencia $2\pi c/\lambda$ -val egyenlő.

Elég érdekes és lényeges eredményt kaptunk, s így érdemes a visszaverődésekre vonatkozó megfontolások helyett szigorú matematikai analízis segítségével is levezetni. Írjuk le tehát a membrán rezgését négy hullám segítségével oly módon, hogy az $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ és $y = b$ vonalak csomóvonalak legyenek. Még azt is megköveteljük, hogy az összes hullám frekvenciája azonos legyen, és így az eredő mozgás éppen egy sajátrezgés. A fényvisszaverődésre vonatkozó korábbi tárgyalásainkból tudjuk, hogy $e^{iωt} e^{-ik_x x + ik_y y}$ egy, a 49.4 ábrán jelzett irányban haladó hullámot jelent. A (49.6) egyenlet, vagyis a $k = \omega/c$ egyenlőség most is érvényes, feltéve, hogy

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (49.10)$$

Az ábrából világos, hogy $k_x = k \cos \theta$ és $k_y = k \sin \theta$.

A téglalap alakú membrán φ elmozdulására vonatkozó egyenlet alakja:

$$\varphi = e^{iωt} (e^{-ik_x x + ik_y y} - e^{ik_x x + ik_y y} - e^{-ik_x x - ik_y y} + e^{ik_x x - ik_y y}). \quad (49.11a)$$

Bár ez elég áttekinthetetlennek látszik, valójában az ilyen exponenciálisok összege nem is nagyon bonyolult. Az exponenciálisok bizonyos kombinációja szinuszfüggvényekre vezet, úgyhogy az elmozdulás kifejezése egyszerű alakra hozható:

$$\varphi = (-4 \sin k_x x \sin k_y y) [e^{iωt}]. \quad (49.11b)$$

Ez olyan szinuszrezgés, ami x és y irányban is szinuszos. $x = 0$ -nál és $y = 0$ -nál a peremfeltételek természetesen kielégülnek. Mi azonban azt akarjuk, hogy φ az $x = a$ és $y = b$ vonalak mentén is zérus legyen, ezért még

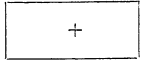
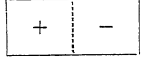
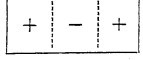

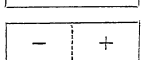
további két feltételt kell kikötnünk: $k_x a$ és $k_x b \pi$ -nek különböző egész számú többszörösei legyenek. Mivel már láttuk, hogy $k_x = k \cos \vartheta$ és $k_y = k \sin \vartheta$, azért a (49.7) és (49.8) egyenleteket, s ezekből a (49.9) végeredményt azonnal megkapjuk.

Példaként tekintünk most egy olyan téglalapot, amelynek szélessége kétszer akkora, mint magassága. Ha tehát $a = 2b$, a (49.4) és a (49.9) egyenletekből kiszámíthatjuk az összes sajátrezgés frekvenciáját:

$$\omega^2 = \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2 \frac{4m^2 + n^2}{4} \quad (49.12)$$

A 491. táblázatban néhány egyszerű sajátrezgés adatait foglaltuk össze.

49.1 táblázat

A sajátrezgés alakja	m	n	$(\omega/\omega_0)^2$	ω/ω_0
	1	1	1,25	1,12
	1	2	2,00	1,41
	1	3	3,25	1,80
	2	1	4,25	2,06
	2	2	5,00	2,24

A legfontosabb, amit ezzel a speciális esettel kapcsolatban hangsúlyoznunk kell az, hogy a frekvenciák sem egymásnak, sem valamilyen más számnak nem többszörösei. Általában tehát nem igaz, hogy a sajátfrekvenciák harmonikus kapcsolatban állnak egymással. Nem igaz sem az egyenlő dimenziós esetre,

sem az olyan egydimenziós rendszerekre, amelyek az egyenletes sűrűségű és egyenletesen kifeszített húrnál bonyolultabbak. Egyszerű példa ez utóbbira a két végén felfüggesztett lánc, amelyben a feszültség a lánc két rögzített pontja felé nagyobb, mint a lánc középső, belógó részén. Ha egy ilyen láncot harmonikus rezgésbe hozunk, akkor különböző sajátrezgések és frekvenciák lépnek fel, de sem a frekvenciák nem egyszerű többszöröseik valamilyen számnak, sem pedig a sajátrezgések nem szinuszos alakúak.

Az ennél összetettebb rendszerek sajátrezgéseit még nehezebb áttekinteni. Például a szájban a hangszalagok fölött van egy üreg. A nyelv és az ajak mozgásával különböző átmérőjű és alakú zárt vagy nyitott végű „csövet” hozhatunk létre, amely bonyolult rezonátorként viselkedik. Amikor beszélünk, hangszalagjaink valamilyen hangszínű hangot állítanak elő. A hangszín a hang összetettségét jellemzi. A szájüregben tovább módosul a hangszín az üreg különböző rezonanciafrekvenciái folytán. Egy énekes például azonos hangmagasságban különböző magánhangzókat — a -t, vagy o -t, vagy u -t stb. — tud énekelni. Ezek a hangok azért hallatszanak különbözőképpen, mert más-más harmonikusokra a szájüreg egymástól eltérően rezonál. Az üreg rezonanciafrekvenciái a beszédhangok módosításában nagyon fontos szerepet játszanak, amelyet egy egyszerű kísérleten mutathatunk be. Mivel a hangsebesség a sűrűség négyzetgyökével fordítottan arányos, a különböző gázokban a hangsebesség is más. Ha levegő helyett a kisebb sűrűségű héliumot használjuk, akkor a hangsebesség sokkal nagyobb lesz, s így egy héliummal töltött üreg összes frekvenciája megemelkedik. Következésképpen, ha valakinek a tüdejét héliummal töltenék meg (!) mielőtt beszélne, akkor hangjának jellege (hangszíne) teljesen megváltozna, annak ellenére, hogy a hangszalagok változatlan frekvenciával rezegnek.

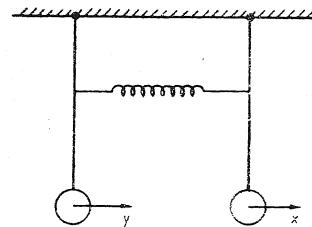
49.4 Csatolt ingák

Végezetül hangsúlyozzuk, hogy sajátrezgések nem csupán bonyolult folytonos rendszerek, hanem nagyon egyszerű mechanikai rendszerek esetén is fellépnek. Ilyen rendszerekre jó példa az előző fejezetben tárgyalt két csatolt inga. Ott kimutattuk, hogy a rendszer mozgása két különböző frekvenciájú harmonikus mozgás szuperpozíciójaként tekinthető, tehát harmonikus mozgások vagy sajátrezgések segítségével analizálható. A húrhoz és a kétdimenziós felülethez is végtelen sok sajátrezgés tartozik. Bizonyos értelemben ez utóbbihoz tartozó sajátrezgések száma kétszeresen végtelen — legalábbid ha meg tudnánk számolni egy végtelen sokaságot. Egy egyszerű mechanikai rendszer azonban, aminek csak két szabadságfoka van, s csak két változó szükséges a leírásához, csupán két sajátrezgéssel rendelkezik.

Végezzük el a két sajátrezgés matematikai analizését, feltételezve, hogy a két inga egyenlő hosszú. Legyen az egyik elmozdulása x , a másiké y — mint az a 49.5 ábrán látható. Amikor nincs ott a rugó, akkor az első tömeg elmozdulásával arányos. Ennek az ingának egyedül (a rugó nélkül) ω_0 sajátfrekvenciája lenne. A mozgásegyenlet ez esetben így alakulna:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x. \quad (49.13)$$

A másik inga ugyanúgy lengene, ha nem volna a két inga között rugó. Rugóval összekötve azonban a gravitációtól származó visszahúzó



49.5 ábra. Két csatolt inga

erőn kívül fellép még egy másik, az első tömeget húzó erő is. Ez az erő függ az $x-y$ távolságkülönbségtől: az erő tehát $x-y$ egy geometriától függő állandó szorzatával egyenlő. Ugyanez az erő hat fordított értelemben a második tömegre. A megoldandó mozgásegyenlet rendszer

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -m\omega_0^2 x - k(x-y), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= -m\omega_0^2 y - k(y-x). \end{aligned} \quad (49.14)$$

Azt a mozgást keressük tehát, amelynek során a két tömeg azonos frekvenciával leng. Először meg kell határozni, hogy mennyire térnek ki az egyes tömegek. Az ingák azonos frekvenciával lengenek, de amplitúdójuknak valamilyen A , ill. B értéket kell felvenniük, s ezek aránya állandó. Próbálkozzunk meg a következő megoldással:

$$x = A e^{i\omega t}, \quad y = B e^{i\omega t} \quad (49.15)$$

Ha ezeket behelyettesítjük a (49.14) egyenletbe, összegyűjtjük a hasonló tagokat, a közös $e^{i\omega t}$ szorzóval egyszerűsítünk és m -mel osztunk, akkor

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right) A &= -\frac{k}{m} B, \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right) B &= -\frac{k}{m} A. \end{aligned} \quad (49.16)$$

Azt látjuk tehát, hogy két egyenletünk van, — legalábbis úgy tűnik, hogy — két ismeretlenre. Valójában azonban nem két ismeretlen van, mert a mozgás mértékét nem tudjuk ezekből az egyenletekből meghatározni. Az egyenletekből csak A -nak B -hez való arányát tudjuk meghatározni, és mindkét egyenletnek ugyanazt az arányt kell adnia. Szükséges, hogy a két egyenlet ne legyen egymásnak ellentmondó, s ez a frekvenciára valami nagyon speciális követelménynek felel meg.

Ezt a követelményt — a most tárgyalt esetben — elég könnyen megfogalmazhatjuk.

Ha a két egyenletet összeszorozzuk, akkor

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)^2 AB = \left(\frac{k}{m}\right)^2 AB. \quad (49.17)$$

Ha A vagy B nem zérus (ha ugyanis zérus lenne, akkor egyáltalában nem lenne mozgás), akkor az AB szorzattal mindkét oldalon egyszerűsíthetünk. Ha tehát van mozgás, akkor a másik két tagnak kell egymással egyenlőnek lenni, vagyis másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Eredményül két lehetséges frekvenciát kapunk:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}. \quad (49.18)$$

Ha a frekvenciára kapott ezen értékeket visszahelyettesítjük (49.16)-ba, azt kapjuk, hogy az első frekvencián $A = B$, a második frekvencián pedig $A = -B$.

Nyilvánvaló, hogy az első esetben, ha $A = B$, a rugó sohasem feszül meg, s mindkét tömeg ω_0 frekvenciával leng, mintha nem is lenne rugó. A másik megoldásban, ha $A = -B$, a rugó hozzájárul a visszahúzó erőhöz, s megnöveli a frekvenciát.

Érdekes eredmény adódik különböző hosszú ingák esetén. Ennek analízise a most bemutatotthoz nagyon hasonló, elvégzését gyakorlatképpen az Olvasóra bízunk.

49.5 Lineáris rendszerek

Összegezzük tehát eddigi gondolatainkat. Olyan lineáris rendszer mozgása, amelynek jellemzői függetlenek az időtől, nagyon bonyolult is lehet. Vannak azonban nagyon speciális mozgások — általában a speciális mozgásoknak egy egész sorozata —, ahol a mozgás képe az idővel exponenciálisan változik. Rezgő rendszerek esetén — s mi most ilyenekről beszélünk — a kitevő képzetes, s az időtől való „exponenciális” függés helyett szívesebben használjuk a „szinuszos” függés kifejezését. Általánosabb esetben azonban

nagyon speciális formájú mozgások sajátrezgése az idővel exponenciálisan változik. Egy rendszer legáltalánosabb mozgása mindig különböző exponenciálisokat tartalmazó mozgások szuperpozíciójaként képzelhető el.

Ismét ki kell emelnünk a szinuszmozgásokra vonatkozó következő állítást. Nem szükséges, hogy egy lineáris rendszer tiszta — azaz meghatározott egyetlen frekvenciájú — szinuszmozgást végezzen, de függetlenül attól, hogyan mozog, a mozgás tiszta szinuszmozgások szuperpozíciójaként képzelhető el. Az egyes mozgások frekvenciája a rendszerre jellemző, s ugyanúgy a hozzájuk tartozó mozgásképp vagy hullámforma is. Bármely ilyen rendszer általános mozgása jellemezhető, ha megadjuk a sajátrezgések amplitúdóját és fázisát, majd pedig összegezzük őket. Ugyanezt más módon kifejezve: bármely lineáris rezgőrendszer egyenértékű a sajátrezgéseknek megfelelő sajátfrekvenciájú, egymástól független harmonikus oszcillátorok egy sorozatával.

E fejezet lezárásaként a sajátrezgések és a kvantummechanika közti kapcsolatról teszünk néhány megjegyzést. A kvantummechanikában a rezgő tárgynak, vagy a térben változó valamilyen mennyiségeknek egy valószínűségfüggvény amplitúdója felel meg, mégpedig egy elektron vagy elektronrendszer adott elrendezésben való megtalálásának valószínűségét megadó függvény amplitúdója. Ez az amplitúdófüggvény térben és időben változhat, s valójában lineáris egyenletet elégít ki. A kvantummechanikában azonban fellép egy transzformáció: amit mi a valószínűségi amplitúdó frekvenciájának nevezünk, az a klasszikus elképzelések szerint az energiával egyenlő. A most megismert alapelvet tehát úgy fordíthatjuk le a kvantummechanika nyelvére, hogy a *frekvencia* szót az *energia* szóval helyettesítjük. Ezzel a helyettesítéssel az alapelv valahogy így fogalmazható meg: valamilyen kvantummechanikai rendszernek, például egy atomnak, nincs szükségyszerűen meghatározott energiája, éppúgy, mint ahogy egy egyszerű mechanikai rendszernek sem kell meghatározott frekvenciával rendelkeznie.

Tekintet nélkül arra, hogy a rendszernek milyen a viselkedése, az mindig meghatározott energiájú állapotok szuperpozíciójának tekinthető. Az egyes állapotok energiája jellemző az atomra, s így a részecskék különböző helyeken való megtalálásának valószínűségét meghatározó amplitúdó alakja is az. Az általános mozgás leírható, ha rendre megadjuk e különböző energiájú állapotok amplitúdóját. Ez az oka az energiaszintek megjelenésének a kvantummechanikában. Mivel a kvantummechanika hullámokkal dolgozik, olyan körülmények között, ha az elektronnak nincs elég

energiája ahhoz, hogy véglegesen elszabaduljon a protontól, *korlátozott hullámokról* beszélünk. A rögzített húron fellépő korlátozott hullámokhoz hasonlóan a kvantummechanikában is a hullámegyenleteknek meghatározott frekvenciákra vannak megoldásai. A kvantummechanika értelmezése szerint ezek meghatározott *energiák*. Egy kvantummechanikai rendszernek tehát, mivel hullámokkal írható le, rögzített energiája, meghatározott állapotai lehetnek. Ennek példái a különböző atomok energiaszintjei.

50 Harmonikus rezgések

50.1 Zenei hangok

Úgy tartják, Püthagorasz fedezte fel azt a jelenséget, hogy ha két azonos, csupán hosszukban különböző húrt egyformán megfeszítünk, és azután egyszerre megpendítünk, az emberi fül számára nagyon kellemes hanghatás keletkezik — feltéve, hogy a két húr hossza úgy aránylik egymáshoz, mint két kis egész szám. Ha az egyik húr kétszer olyan hosszú, mint a másik, akkor éppen egy zenei oktáv két alaphangját halljuk. Ha viszont az egyik húr hossza kétharmada a másikénak, akkor a C és G hangok közötti hangközt halljuk, amelyet kvintnek nevezünk. Ezek a hangközök az általános vélemény szerint „kellemesen” hangzó akkordok.

Püthagorasz annyira hitt saját felfedezésében, hogy erre alapozta iskoláját; tanítványai — a püthagoreusok — misztikusan hittek a számok nagy hatalmában. Meg voltak győződve arról, hogy valami hasonlót találnak majd a bolygókkal — vagy ahogy ők nevezték — „szférákkal” kapcsolatban is. Néha ma is hallani a kifejezést: „A szférák zenéje”. Elgondolásuk szerint számszerű összefüggések vannak a bolygópályák, valamint a természet más jelenségei között. Az átlagember azt hihetné, hogy ez csupán valamilyen babona, amiben a régi görögök hittek. (De vajon mennyiben tér el ez a vélemény a mi modern tudományos felfogásunktól, amely szintén mennyiségi összefüggést kíván megállapítani?)

Püthagorasz felfedezése az első példa volt arra, hogy a természetben a geometrián kívül is léteznek számszerű összefüggések. Egyszerű hosszúságmérésekből következtetni tudott va-

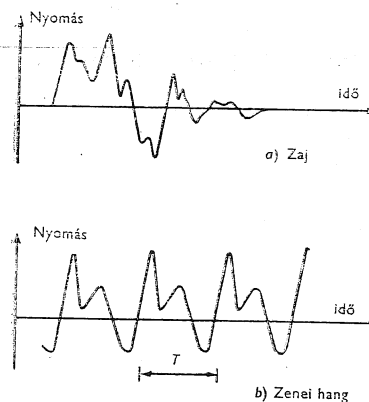
lamire — aminek már látszólag semmi köze sem volt a geometriához —, a kellemes hanghatásra. Felfedezése vezetett arra az általánosabb gondolatra, hogy a matematikai analízis és az aritmetika használható eszköze lehet a természet megismerésének. A modern tudomány eredményei igazolták ezt az elgondolást.

Püthagorasz csak kísérleti megfigyelés alapján jutott el felfedezéséhez és nem ismerte fel, hogy ez a módszer általánosítható. Ha e felismerésekre támaszkodhatott volna, esetleg a fizika fejlődése sokkal hamarabb indul meg. (Persze könnyű utólag bírálni azt, amit valaki már megcsinált, amikor már tudjuk, mit *kellett volna* csinálnia!)

Még egy érdekességre kell felhívniuk a figyelmet: a felfedezés két *kellemes hatású* hanggal áll kapcsolatban. Feltehetjük a kérdést: vajon mi bármivel is jobban értjük-e Püthagorasznál, hogy *miért* csak meghatározott hangok *kellemesek* fülünknek? Az esztétika általános elmélete alig fejlettebb ma, mint Püthagorasz idejében. A görögök ezen felfedezésének három oldala van: a kísérlet, a matematikai összefüggések és az esztétika. A fizika csak az első két problémakörben ért el számottevő fejlődést. Ebben a fejezetben Püthagorasz felfedezésének mai értelmezéséről lesz szó.

A hallható hangok egyik csoportját *zajoknak* hívjuk. Zaj, amelyet néhány, a környezetünkben levő, szabálytalanul rezgő test okozhat, dobhátyánkat rendszertelen rezgésbe hozza. Ha a dobhátyára nehezedő légnymást (és ezzel természetesen a dobhátya mozgását) az idő függvényében ábrázoljuk,

zaj esetén az 50.1a ábrán láthatóhoz hasonló görbét kapunk. (Ilyen zajt kapunk, ha például lábunkkal dobantunk.) A *zenei* hang más tulajdonságú. A zenét a többé-kevésbé *hosszantartó tónusok* — vagy zenei „hangjegyek” jellemzik. (A hangszereken zajokat is elő lehet állítani!) A tónus tarthat viszonylag rövid ideig, mint például a megütött zongorahúr hangja, vagy határozatlanul sokáig — mint amikor a zenész a fuvoán hosszan kitart egy hangot.



50.1 ábra. Nyomás mint az idő függvénye
a) zaj és b) zenei hang esetén

A zenei hang abban különbözik a zajtól, hogy a légnymás—idő grafikonja periodikus. A légnymásváltozás görbéje, még ha szabálytalan is, újból és újból megismétlődik. A zenei hang nyomás—idő grafikonjának egyik példáját az 50.1b ábrán láthatjuk.

A zenészek általában a zenei hangokat három szempontból: a hangerősség, a hangmagasság és a hangszín szempontjából osztályozzák. A hangerősség a nyomásváltozások nagyságának felel meg. A hangmagasságot az alaphang nyomásfüggvényének egyszeri megismétlődéséhez szükséges idő, a periódusidő határozza meg. (A mély hangok periódusideje nagyobb, mint a magas hangoké.) A hangszín a két teljesen egyforma erősségű és magasságú hang közötti különbséggel kapcsolatos. Egy oboa, egy hegedű és egy szoprán-

énekesnő hangját meg tudjuk egymástól különböztetni, pedig ugyanolyan magas hangot adnak. A színezet az ismétlődő függvény szerkezetétől függ.

Vizsgáljuk meg alaposabban a rezgő húr hangját. Ha megpendítünk egy húrt, az így keltett hangot a húrnak mint hullámforrásnak a mozgása határozza meg. Tudjuk, hogy ezek a hullámok mindkét irányban terjednek, és a húr végeiről visszaverődnek, így hosszú időn keresztül ide-oda lengenek. Akármennyire komplikált is a hullám, újra és újra megismétlődik. Az ismétlődés periódusa éppen az az idő, amely ahhoz szükséges, hogy a hullám kétszer befussa a húr teljes hosszát. Azért éppen ennyi idő, mert bármely hullám esetén — ha már elindult — ennyi idő szükséges, hogy a végekről visszaverődjék, visszatérjen kiinduló helyzetébe, és újra meginduljon az eredeti irányban. A terjedési idő ugyanakkora, bármely irányban is indul el a hullám. Egy periódus után, majd ismét egy periódus múlva stb. a húr minden egyes pontja visszatér kiinduló helyzetébe. A rezgés által létrehozott hanghullámoknak ugyanígy kell ismétlődniük. Most tehát látjuk, hogy egy megpendített húr miért ad zenei hangot.

50.2 Fourier-sorok

A 49. fejezetben más szempontból vizsgáltuk a rezgő rendszerek mozgását. Láttuk, hogy egy húrnak több sajátrezgése is van, és bármely rezgését, amit a kezdeti feltételek lehetővé tesznek, néhány egyszerre fellépő sajátrezgés megfelelő arányokban vett összegeként képzelhetjük el. Azt találtuk, hogy a húr sajátrezgésének frekvenciái: $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$. A megpendített húr legáltalánosabb rezgése tehát olyan szinuszos rezgések összegéből áll, amelyek frekvenciája az ω_0 alaphangfrekvencia, a $2\omega_0$ második harmonikus, a $3\omega_0$ harmadik harmonikus stb. Az alaphang $T_1 = 2\pi/\omega_0$ időnként ismétlődik; a második harmonikus $T_2 = 2\pi/2\omega_0$ időnként, de minden két periódus után, $T_1 = 2T_2$ időnként is megismétlődik stb. Így keletkezik a zenei hang.

Eddig mindig valamilyen húr rezgéseiről beszéltünk. A hang azonban tulajdonképpen a levegő mozgása, amely a húr rezgése folytán jött létre. A levegő rezgéseinek a húréval azonos harmonikusokból kell állnia. Az egyes harmonikusok egymáshoz viszonyított erőssége eltérő lehet a levegőben és a húron, mivel a levegőhöz való csatolás határfoka az egyes harmonikusokra nézve különbözhet (a húr a levegővel egy rezonanciadobozon keresztül van „csatolva”).

Ha a zenei hangra vonatkozó légnyomás-változást (50.1b ábra) mint az idő függvényét, valamilyen $f(t)$ függvénnyel jelöljük, akkor azt várjuk, hogy $f(t)$ az idő egyszerű harmonikus függvényeinek — pl. a $\cos \omega t$ függvénynek — minden egyes harmonikus frekvenciát tartalmazó összegeként írható fel. Ha a rezgés periódusa T , akkor az alappfrekvencia $\omega = 2\pi/T$, a felharmonikusok pedig $2\omega, 3\omega$ stb. lesznek.

Ezzel kapcsolatban némi komplikáció merül fel, ui. nem várhatjuk, hogy minden egyes frekvenciájú rezgés kezdeti fázisa szükségképpen azonos legyen, tehát $\cos(\omega t + \varphi)$ alakú függvényekkel kellene számolni. Egyszerűbb azonban helyettük minden egyes frekvencián mind a koszinusz-, mind a szinuszfüggvényeket együttesen használni. Emlékezzünk, hogy

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t, \quad (50.1)$$

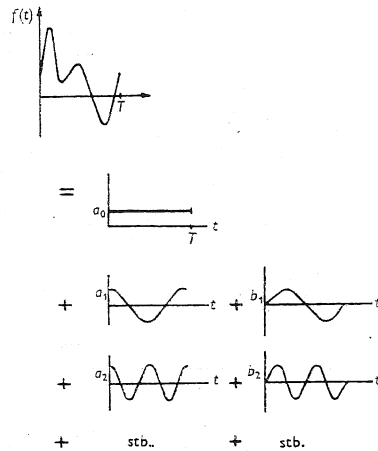
és mivel φ állandó, ezért bármely ω frekvenciájú szinuszrezgést felírhatunk $\sin \omega t$ -ket és $\cos \omega t$ -ket tartalmazó tagok összegeként.

Végső soron tehát megállapíthatjuk, hogy bármely $f(t)$ függvény, amelynek periódusa T , matematikailag a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 + \\ & + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \\ & + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \\ & + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \\ & + \dots + \dots, \end{aligned} \quad (50.2)$$

ahol $\omega = 2\pi/T$, az a és b együtthatók pedig azt mutatják meg, hogy az egyes komponen-

sek milyen arányban vesznek részt az eredő $f(t)$ rezgés kialakításában. Az általánosság kedvéért a függvényhez egy zérus frekvenciájú a_0 tagot is hozzáadhatunk. Ez a tag a hangnyomás átlagértékének (tehát a „zérus” szintnek) az eltolását jelenti. Ezzel képzetünk bármely esetre érvényes. Az (50.2) egyenletet vázlatosan az 50.2 ábra szemlélteti. (A harmonikus függvények a_n, b_n együtthatóit alkalmasan kell választani. Ezek az együtthatók az 50.2 ábrán csak vázlatosan, a léptékek figyelembevétel nélkül láthatók!) Az 50.2 sort az $f(t)$ függvény *Fourier-sorának* nevezzük.



50.2 ábra. Tetszőleges periodikus $f(t)$ függvény egyszerű harmonikus függvények összegével egyenlő

Az előbbieket során azt mondtuk, hogy bármely periodikus függvény felírható ilyen alakban. Ez pontosabban úgy is fogalmazható, hogy ilyen sorba fejthető minden olyan függvény, amelyet a fizikában használunk. A matematikusok ki tudnak agyalni olyan függvényeket is, amelyek nem állíthatók elő egyszerű harmonikus rezgések szuperpozíciójaként — például olyan „visszacsavarodó” függvényeket, amelyek t egyes értékeinél több értékűek! Az ilyen függvények azonban nem igen fordulnak elő a mi tanulmányainkban!

50.3 Hangszín és összhang

Most már tudjuk, hogy a zenei hang „színezetét” — a hangszínt — a különböző harmonikusok egymáshoz viszonyított erőssége, — az a és b együtthatók értéke határozza meg. Az a hang, amelyben csak alapharmonikus hallható, az ún. tiszta hang, az viszont, amelyben több erős hangzású felharmonikus van, „gazdag” hang. Egy hegedű például a harmonikusoknak egész más arányát hozza létre, mint egy oboa.

Mi is „előállíthatunk” zenei hangokat pl. úgy, hogy egy hangszóróra több „oszillátort” kapcsolunk. (Egy oszcillátor rendszerint közel tiszta, egyszerű harmonikus rezgést kelt.) Az oszcillátorok frekvenciáit $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ stb. értékűre választjuk. Ha minden oszcillátorra hangerősség-szabályozót teszünk, hogy a harmonikusokat tetszőleges arányban keverhesük, akkor különböző színezetű hangokat állíthatunk elő. Így működik például az elektromos orgona is. A billentyűk kiválasztják az alaposzcillátor frekvenciáját, a pedálok pedig olyan „kapcsolók”, amelyek a különböző felharmonikusok relatív arányát szabályozzák. E „kapcsolók” segítségével az orgona olyan hangot tud adni, mint a furulya, a hegedű, vagy az oboa.

Érdekes, hogy minden különböző frekvenciájú „mesterséges” hang keltéséhez csak egy oszcillátorra van szükség: ugyanaz az oszcillátor szolgáltatja a hang szinuszos és koszinuszos komponensét. Az emberi fül ugyanis nem nagyon érzékeny a harmonikusok fáziskülönbségére, lényegében az egyes frekvenciák szinuszos és koszinuszos részének összegét észleli. Analízisünk tehát pontosabb annál, mint ami a zene szubjektív értékeléséhez feltétlenül szükséges lenne. A mikrofon és más műszerek azonban érzékelik a fázist is, ilyen esetekben tehát szükségünk lehet a teljes analízisre.

A beszédhang „színezete” határozza meg a magánhangzók hangzását is. A száj alakjától függ, hogy a szájban levő levegő sajátrezgéseinek mekkora a frekvenciája. A hangszálak rezgése által keltett hanghullámokhoz szájunk

alakját megváltoztatva, más-más frekvenciájú harmonikusokat adunk hozzá, ill. emelünk ki. Ennek az effektusnak az eredménye pl. az „e” és az „a” hangok közti különbség.

Mindnyájan tudjuk, hogy egy magánhangzó, pl. az „e” egyformán „e”-nek hat akkor is, ha magas vagy mély hangon mondjuk (vagy énekeljük). A fent leírt mechanizmus alapján azt várnánk, hogy azok a meghatározott frekvenciák, amelyeket szájunk formálásával kiemelünk az „e” hang kiejtésénél, nem fognak megváltozni, ha a hang magasságát megváltoztatjuk. Így a fontos felharmonikusok viszonya az alaphanghoz — vagyis a hangszín — megváltozik a hangmagasság változtatásával. Nyilvánvaló, hogy a beszédhangok felismerése nem a különböző harmonikusok viszonyán alapszik.

Mit tudunk ezek alapján Püthagorasz fel-fedezéséről mondani? Azt már értjük, hogy két, egymáshoz hasonló húr esetén, ha hosszúságuk aránya 2 : 3, akkor az alappfrekvenciák aránya 3 : 2 lesz. De miért „kellemes” a két húr együttes hangja. A megoldás kulcsát a felharmonikusok frekvenciáinak vizsgálatá szolgáltatja. A rövidebb húr második harmonikusának frekvenciája azonos lesz a hosszabb húr harmadik harmonikusának frekvenciájával. (Könnyű megmutatni — vagy elhinni —, hogy a megpendített húron a legalacsonyabb néhány harmonikus jelentkezik erősen.)

A következő két szabályt mindenesetre rögzíthetjük. Különböző hangok akkor csengetnek kellemesen, ha vannak azonos frekvenciájú felharmonikusaik, és akkor diszsonánsak, ha magasabb harmonikusaik frekvenciái közel esnek ugyan egymáshoz, de mégis elég távol ahhoz, hogy közöttük gyors lebegés jöjjön létre. Hogy miért kellemetlen a lebegés és miért kellemesebb a magasabb harmonikusok egybehangzása, ezt semmiképp sem tudjuk megindokolni. Éppúgy nem tudjuk megmondani, hogy miért hangzik valami kellemesen, mint ahogy például nem tudjuk megmondani, hogy miért kellemes valaminek az illata. A dolog lényegét csak annyira értjük, hogy meg tudjuk mondani: az egybehangzó

hangok hatása kellemes lesz. Ebből azonban a zenei harmónia tulajdonságain kívül semmire sem tudunk következtetni.

Könnyen ellenőrizhetjük a harmonikusokra az imént leírt összefüggéseinket, ha elvégezzük néhány egyszerű kísérletet a zongorán. Jelöljük a klaviatúra közepén levő három egymás utáni C-t C, C', C''-vel, és ugyanazokból az oktávokból három egymás utáni G-t G, G', G''-vel. Ekkor az alaphangok relatív frekvenciái a következők:

$$\begin{array}{ll} C - 2 & G - 3 \\ C' - 4 & G' - 6 \\ C'' - 8 & G'' - 12 \end{array}$$

E harmonikusok közötti összefüggés szemléltetésére tételezzük fel, hogy a C' billentyűt *lassan* lenyomjuk úgy, hogy a kalapács felemelkedjen, de ne szólaltassa meg a húr. Ha most leütjük a C-t, akkor megszólal annak alaphangja, és a felharmonikusai is. A második harmonikus rezgésbe hozza a C' húrját. Ha most elengedjük a C-t (de C' billentyűt lenyomva tartjuk), akkor a kalapács megszűnteti a C húr rezgését, és hallhatjuk (lágyan) C' elhaló hangját. Hasonló módon C harmadik harmonikus megszólaltatja G'-t, a hatodik harmonikus pedig (amely már sokkal gyöngébben szól) G'' alaphangját tudja gerjeszteni.

Némiképp más lesz az eredmény, ha G-t nyomjuk le *lassan*, és azután rezgésbe hozzuk C'-t. C' harmadik harmonikus G negyedik harmonikusának felel meg, így *csak* G negyedik harmonikus gerjesztődik. Ha nagyon erősen figyelünk, hallhatjuk G'' hangját, mely két oktávval magasabb annál a G-nél, amit lenyomtunk! Könnyen kitalálhatjuk ennek a játéknak még sok más kombinációját is.

Figyeljük meg, hogy a dúr-skálát éppen azzal a feltétellel lehet meghatározni, hogy a három dúr-akkord (F-A-C), (C-E-G) és (G-H-D), olyan hangokat jelent, ahol a frekvenciák aránya (4 : 5 : 6). Ezek az arányok — valamint az a tény, hogy az egymástól egy oktávnnyira levő hangok (C-C'; H-H') frekvenciáinak aránya 1 : 2 — definiálják az egész skálát az „ideális” esetre vonat-

kozóan, amelyet „természetes skálának” nevezünk. A billentyűs hangszereket, mint amilyen a zongora is, rendszerint *nem* így hangolják, hanem egy kicsit „falsul” úgy, hogy a frekvenciák aránya csak *közéltőleg* legyen helyes az összes kezdőhangra. Az ily módon hangolt hangszeren — amelyet „temperálnak” neveznek — az oktáv (amelynek frekvenciaaránya továbbra is 1 : 2) 12 egyenlő részre van osztva, és a két-két szomszédos hang frekvenciaaránya $2^{1/12}$. Kvint hangközben a frekvenciák viszonya többé már nem $3/2$, hanem $2^{7/12} = 1,499$, de ezt a különbséget a legtöbb ember füle nem képes érzékelni.

50.4 Fourier-együtthatók

Emlékeztetünk arra, hogy bármely hang — pontosabban minden *periodikus* hang — a harmonikusok alkalmas kombinációjaként állítható elő. Meg akarjuk mutatni, hogyan lehet kiszámítani az egyes harmonikusok szükséges arányait. Az a és b együtthatók ismeretében és az (50.2) egyenlet alapján ugyanis az $f(t)$ függvény már könnyen előállítható. De hogyan találjuk meg adott $f(t)$ esetén a különböző harmonikusokhoz tartozó együtthatókat? (Könnyű recept szerint tésztát sütni, de vajon ki tudjuk-e találni annak a tésztának a receptjét, amivel megkínáltak bennünket?)

Fourier mutatta meg, hogy ez lényegében nem is nagyon nehéz. Az a_0 tag meghatározása pl. egészen könnyű: ez éppen $f(t)$ -nek egy periódusra ($t = 0$ -tól $t = T$ -ig) vett átlagértékével egyenlő. Könnyen beláthatjuk, hogy ez valóban így van. A szinusz- vagy koszinusz-függvény átlagértéke egy teljes periódusra zérus, tehát két, három vagy tetszőleges számú teljes periódusra szintén. Így az (50.2) egyenlet jobb oldalán minden tag átlagértéke zérus, kivéve a_0 -t. (Emlékezzünk arra, hogy $\omega = 2\pi/T$.)

Másrészt egy összeg átlaga egyenlő az átlagok összegével, ezért $f(t)$ átlaga éppen a_0 átlagával egyenlő. Mivel a_0 *állandó*, így átlaga pontosan ugyanaz, mint értéke. Felhasználva

az átlagérték definícióját

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (50.3)$$

A többi együttható kiszámítása alig nehezebb. Kiszámításukhoz használjunk fel egy Fourier-től származó fogást. Szorozzuk meg az (50.2) egyenlet mindkét oldalát valamely felharmonikussal — mondjuk $\cos 7\omega t$ -vel. Ekkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} f(t) \cos 7\omega t &= \\ &= a_0 \cos 7\omega t + \\ &+ a_1 \cos \omega t \cos 7\omega t + b_1 \sin \omega t \cos 7\omega t + \\ &+ a_2 \cos 2\omega t \cos 7\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cos 7\omega t + \\ &+ \dots + \dots \\ &+ a_7 \cos 7\omega t \cos 7\omega t + b_7 \sin 7\omega t \cos 7\omega t + \\ &+ \dots + \dots \end{aligned} \quad (50.4)$$

Most képezzük mindkét oldal középértékét egy periódusra. Az $a_0 \cos 7\omega t$ -nek a T időre vonatkozó átlaga arányos a koszinusz $7T$ -re vett átlagával. Ez viszont éppen zérus. A megmaradó tagok *csaknem mindegyikének szintén* zérus az átlagértéke. Tekintsük például az a_1 -es tagot. Tudjuk, hogy általában

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cos(A-B). \quad (50.5)$$

Az a_1 -es tag tehát:

$$\frac{1}{2} a_1 (\cos 8\omega t + \cos 6\omega t). \quad (50.6)$$

Itt két koszinuszos tag van, az egyik periódusa 8ω , a másiké 6ω . *Mindkét tag átlaga zérus*, az a_2 -es tag átlagértéke tehát zérus.

Az a_1 -es tagnál $a_2 \cos 9\omega t$ és $a_2 \cos 5\omega t$ tagnál fel, s ezek átlaga szintén zérus. Az a_3 -es tagnál $\cos 16\omega t$, és $\cos(-2\omega t)$ fog adódni. Viszont $\cos(-2\omega t)$ ugyanaz, mint $\cos 2\omega t$, azért mind-

két tag átlaga zérus. Ezek alapján nyilvánvaló, hogy *minden* koszinuszos tag átlaga *egy kivételével* zérus lesz. Ez az egy tag az, melynek együtthatója: a_7 . Erre ugyanis azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} a_7 (\cos 14\omega t + \cos 0). \quad (50.7)$$

Az első koszinuszos tag átlaga zérus, a második pedig természetesen 1, vagyis azt kapjuk, hogy az (50.4) egyenletben az összes koszinuszos tag átlagértéke $\frac{1}{2} a_7$.

A szinuszos tagokkal még könnyebb a dolgunk. Tetszőleges koszinuszos tényezővel — mint amilyen pl. $\cos n\omega t$ — szorozva ugyanígy megmutatható, hogy az *összes* szinuszos tag átlagértéke zérus.

Látjuk, hogy Fourier eljárása olyan, mint egy szűrő. Amikor beszorozunk $\cos 7\omega t$ -vel, és átlagértéket képzünk, akkor az a_7 együtthatóján kívül minden más tag eltűnik, és azt találjuk, hogy:

$$\text{középérték } [f(t) \cos 7\omega t] = a_7/2, \quad (50.8)$$

vagy más alakban

$$a_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos 7\omega t dt. \quad (50.9)$$

Az Olvasóra bízunk annak igazolását, hogy a b_7 együttható meghatározható, ha az (50.2) egyenletet $\sin 7\omega t$ -vel beszorozzuk, és átlagot képzünk mindkét oldalon. Az eredmény:

$$b_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin 7\omega t dt. \quad (50.10)$$

Nyilvánvaló, hogy ami igaz 7 -re, az igaz a többi egész számra is. Ennek alapján bizonyításunkat és a kapott eredményt a következő sokkal elegánsabb matematikai alakban foglalkozhatjuk össze. Ha n és m zérustól különböző

egész számok, és ha $\omega = 2\pi/T$, akkor

$$I. \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt = 0. \quad (50.11)$$

$$II. \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m. \\ T/2, & \text{ha } n = m. \end{cases} \quad (50.12)$$

$$III. \int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t dt = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m. \\ T/2, & \text{ha } n = m. \end{cases}$$

$$IV. f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t. \quad (50.13)$$

$$V. a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (50.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt. \quad (50.15)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt. \quad (50.16)$$

Az előző fejezetekben kényelmes volt az exponenciális írásmód az egyszerű rezgőmozgások leírására. A $\cos \omega t$ helyett az exponenciális függvény valós részét, $\operatorname{Re} e^{i\omega t}$ kifejezést írtunk. Ebben a fejezetben viszont koszinusz- és szinuszfüggvényeket együtt használtunk, mivel így talán kicsit világosabbak levezetéseink. Az (50.13) egyenletben megfogalmazott végeredményünket azonban felírhatjuk tömörebb alakban is:

$$f(t) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n e^{in\omega t}, \quad (50.17)$$

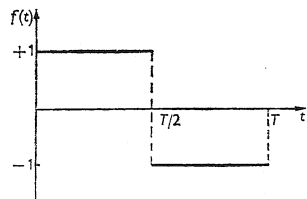
ahol \hat{a}_n egy komplex szám, $a_n - ib_n$ (itt $b_0 = 0$). Ha mindenütt egységes jelölést akarunk használni, akkor felírhatjuk, hogy

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n \geq 1). \quad (50.18)$$

Most már tudjuk, hogy egy periodikus hullámot hogyan „bonthatunk” harmonikus komponensekre. A módszert *Fourier-analízisnek*, az egyes tagokat pedig Fourier-komponenseknek nevezik. Nem mutattuk még azonban meg, hogyha megtaláljuk az összes Fourier-komponenst, és összeadjuk őket, akkor valóban visszakapjuk az $f(t)$ függvényt. A matematikusok a függvények egy széles osztályáról – lényegében a fizikusok számára érdekes összes függvényről – kimutatták, hogy ha ki lehet számítani az integrálokat, visszakapható az $f(t)$ függvény.

Van azonban néhány kivétel. Ha az $f(t)$ függvény nem folytonos, akkor a szakadás helyén a Fourier-sor összege éppen a függvény két értéke közti középső értéket veszi fel. Vizsgáljuk pl. az $f(t) = 0, 0 \leq t < t_0$, ill. $f(t) = 1, t_0 \leq t \leq T$ furcsa függvényt, ekkor a Fourier-sor összege mindenütt a helyes értéket szolgáltatja, kivéve a t_0 helyet, ahol $1/2$ adódik 1 helyett. A fizikától azonban meglehetősen idegenek az ilyen függvények. Adhatunk a fizikusok részére egy „szabályt”, miszerint bármely szakadásos függvényt (mely tulajdonképpen csak leegyszerűsítése egy valódi fizikai függvénynek) úgy kell definiálni, hogy a szakadási helyhez a két nem folytonos függvényérték számtani közepét rendeljük. Ilyen módon bármely függvény, amelyik véges számú ugrást tartalmaz, Fourier-sorral pontosan előállítható.

Javasoljuk, hogy az Olvasó gyakoriásképpen határozza meg az 50.3 ábrán látható függvény Fourier-sorát. Mivel a függvény nem írható explicit algebrai alakba, nem lehet a 0



50.3 ábra. Négyzet hullám-függvény

$$f(t) = +1, \text{ ha } 0 \leq t < T/2;$$

$$f(t) = -1, \text{ ha } T/2 \leq t < T$$

és T közötti integrálást a szokásos módon elvégezni. Az integrálokat mégis könnyű kiszámítani, ha két részre bontjuk őket: a 0-tól $T/2$ -ig [ekkor $f(t) = 1$] és a $T/2$ -től T -ig [itt $f(t) = -1$] vett integrálokra. Az eredmény:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right), \quad (50.19)$$

ahol $\omega = 2\pi/T$. Ily módon azt kaptuk, hogy négyzet hullámunk (melyet speciális fázissal választottunk) csak páratlan harmonikusokat tartalmaz, és amplitúdójuk fordítva arányos a frekvenciájukkal.

Ellenőrizzük néhány t értékre, vajon az (50.19) egyenlet visszaadja-e $f(t)$ -t. Tekintsük a $t = T/4$, vagy másképp az $\omega t = \pi/2$ értéket. Ekkor

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right) = \quad (50.20)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right). \quad (50.21)$$

A zárójelben levő sor összege* $\pi/4$, s így azt kapjuk, hogy $f(t) = 1$.

50.5 Az energiatétel

A hullám energiája az amplitúdó négyzetével arányos, ami összetett hullám esetén egy periódusra $\int_0^T f^2(t) dt$ -vel való arányosságot

* A sor összegét a következő módon számíthatjuk ki. Elöljáróban megjegyezzük, hogy $\int_0^x [dx/(1+x^2)] = \arctg x$. Ezután fejtük sorba az integrandust: $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$. Integráljuk a sort tagonként (zérustól x -ig). Ekkor azt kapjuk, hogy $\arctg x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$. A kívánt eredményt $x = 1$ helyettesítéssel kapjuk meg: $\arctg 1 = \pi/4$.

jelent. Írjuk fel, hogy

$$\int_0^T f^2(t) dt = \int_0^T \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right]^2 dt. \quad (50.22)$$

Ha a zárójelben levő négyzetet kifejtjük, akkor kifejezésünk az összes lehetséges keresztsorzatot tartalmazza (pl. az $a_5 \cos 5\omega t \cdot b_7 \sin 7\omega t$). Már az előbbieken megmutattuk azonban [lásd az (50.11) és (50.12) egyenleteket], hogy ezeknek a tagoknak az egy periódusra vett integrálja zérus. Ily módon csak a négyzetes tagok – mint amilyen az $a_0^2 \cos^2 5\omega t$ – maradnak meg. Mivel bármely koszinusz vagy szinusz tag négyzetének egyperiódusra vett integrálja $T/2$ -vel egyenlő, ezért

$$\int_0^T f^2(t) dt = T a_0^2 + \frac{T}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + b_1^2 + b_2^2 + \dots) = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (50.23)$$

Ez az egyenlet az *energiatétel*, amely kimondja, hogy egy hullám teljes energiája a Fourier-komponensek energiájának összegével egyenlő. A tételt pl. az (50.19) sorra alkalmazva – mivel $[f(t)]^2 = 1$ – kapjuk, hogy

$$T = \frac{T}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right),$$

és ebből megtudhatjuk, hogy a páratlan egész számok reciprokainak négyzetösszege $\pi^2/8$ -cal egyenlő. Hasonló módon először a függvény Fourier-sorának meghatározása, majd az energiatétel segítségével bizonyítani tudjuk, hogy $1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \dots = \pi^4/90$. (Erre az eredményre a 45. fejezetben már szükségünk volt.)

50.6 Nemlineáris reakciók

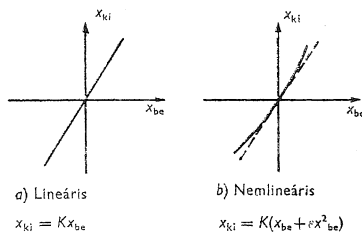
A harmonikusok elméletének egyik területe a nemlineáris effektusok, amelyre fontossága miatt fel kell hívunk a figyelmet. Az összes eddig tárgyalt rendszerről feltételeztük, hogy minden összefüggés lineáris, az erőhatásra fellépő reakciók, pl. a kitérés vagy a gyorsulás mindig arányos az őt létrehozó erővel, az áramkörökben folyó áramok arányosak a rájuk kapcsolt feszültséggel stb. Most azonban olyan eseteket vizsgálunk, amelyekben a mennyiségek nem arányosak egymással. Képzeliünk el egy készüléket, amelynek t időpontban érvényes, x_{ki} -vel jelölt választát (kimenőjelét) az ugyanazon t időpontban érvényes x_{be} bemenőjel határozza meg. Legyen pl. x_{be} az erő, és x_{ki} az elmozdulás, vagy x_{be} az áram, x_{ki} a feszültség. Ha a készülék lineáris, akkor azt kapjuk, hogy

$$x_{ki}(t) = Kx_{be}(t), \quad (50.24)$$

ahol K t -től és x_{be} -től független állandó. Tegyük fel azonban, hogy a készülék csak közelítőleg lineáris. Ekkor azt írhatjuk, hogy

$$x_{ki}(t) = K[x_{be}(t) + \varepsilon x_{be}^2(t)], \quad (50.25)$$

ahol ε az egységhez viszonyítva kicsi. Ilyen lineáris és nemlineáris visszahatás látható az 50.4 ábrán.



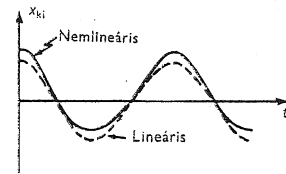
50.4 ábra. Lineáris és nemlineáris reakciók

A nemlinearitásnak több fontos gyakorlati következménye van, néhányat ezek közül most megvizsgálunk.

Először nézzük meg, mi történik, ha bemenőjelként tiszta hangot adunk egy készülékre.

Legyen $x_{be} = \cos \omega t$. Ha az x_{ki} -t az idő függvényében ábrázoljuk, akkor az 50.5 ábra folytonos görbét kapjuk. Összehasonlításképp szaggatott vonallal megrajzoltuk egy lineáris rendszer választát. Látjuk, hogy a kimenőjel már nem koszinuszfüggvény, mert csúcsa hegyesebb, az alja pedig laposabb nála. Azt mondjuk, hogy a kimenőjel *torzított*. Tudjuk, hogy egy ilyen hullám már nem tiszta hang, hanem felharmonikusokat is tartalmaz. Ezeket a felharmonikusokat meg is tudjuk találni. Az (50.25) egyenletbe helyettesítve $x_{be} = \cos \omega t$ -t, azt kapjuk, hogy

$$x_{ki} = K(\cos \omega t + \varepsilon \cos^2 \omega t). \quad (50.26)$$

50.5 ábra. Nemlineáris berendezés reakciója $\cos \omega t$ bemenőjelre

Az összehasonlítás kedvéért a lineáris reakciót is feltüntetjük

Felhasználva a $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ egyenlőséget,

$$x_{ki} = K \left(\cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\omega t \right) \quad (50.27)$$

adódik. A kimenőjel tehát nemcsak az alulfrekvenciát tartalmazza, amelyet a bemenetre adtunk, hanem második harmonikus is. Ezenkívül a kimeneten megjelenik egy konstans tag, $K(\varepsilon/2)$ is, amely az átlagérték eltolásának felel meg (lásd az 50.5 ábrát). A középérték megváltoztatásának folyamatát kiegyenesítésnek (rektifikációnak) hívjuk.

A nemlineáris válasz kiegyenesedik, és megjelennek a bemenetre adott frekvenciák felharmonikusai. Noha feltevésünk szerint a nemlinearitás csak a második harmonikusot állítja elő, a magasabbrendű nemlinearitások — amelyek pl. x_{be}^3 és x_{be}^4 tagokat tartalmaz-

nak — a magasabbrendű felharmonikusokat is előállítják.

A nemlineáris hatás által kiváltott másik effektus a *moduláció*. Ha a bemenő függvény két (vagy több) tiszta hangból áll, akkor a kimeneten nemcsak felharmonikusai jelennek meg, hanem még más frekvenciaösszetevők is. Legyen $x_{be} = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$, ahol ω_1 és ω_2 most nincs egymással harmonikus kapcsolatban. Ekkor a kimeneten a lineáris tagon kívül (amely a bemenet K -szoros) megjelenik egy másik tag is, amelyet a következő kifejezés ad meg:

$$x_{ki} = K\varepsilon(A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t)^2 = \quad (50.28)$$

$$= K\varepsilon(A^2 \cos^2 \omega_1 t + B^2 \cos^2 \omega_2 t + 2AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t). \quad (50.29)$$

Az (50.29) egyenletben a zárójeles kifejezés első két tagja már ismerős. Ezek adták imént az állandó tagot és a második harmonikusot.

A $2AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$ új vegyes tagot kétféleképpen értelmezhetjük. Először is, ha ω_1 és ω_2 nagyon különböznek egymástól (pl. ω_1 sokkal nagyobb, mint ω_2), akkor úgy tekinthetjük, hogy a vegyes tag változó amplitúdója koszinuszos rezgést ír le:

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = C(t) \cos \omega_1 t, \quad (50.30)$$

ahol

$$C(t) = AB \cos \omega_2 t. \quad (50.31)$$

Azt mondjuk, hogy a $\cos \omega_1 t$ amplitúdójú rezgést ω_2 frekvencia *modulálja*.

A vegyes tagot más alakban is felírhatjuk:

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{AB}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]. \quad (50.32)$$

Azt mondhatjuk tehát, hogy két új komponens keletkezett, az egyik a frekvenciák *összegével* ($\omega_1 + \omega_2$)-vel, a másik a frekvenciák *különbségével* ($\omega_1 - \omega_2$)-vel rezeg.

Ugyanazt a jelenséget két különböző, de egymással egyenértékű módon szemléltük.

Abban a speciális esetben, amikor $\omega_1 \gg \omega_2$, a két különböző nézőpontot összekapcsolhatjuk: mivel $(\omega_1 + \omega_2)$ és $(\omega_1 - \omega_2)$ értéke egymás közelébe esik, lebegés várható. Ez a lebegés azonban éppen az ω_1 *átlagfrekvenciájú rezgés amplitúdómodulációját* jelenti a $2\omega_2$ különbségi frekvencia fele szerint. Ezek alapján belátjuk, hogy a két felírási mód egymással egyenértékű.

Azt találjuk tehát, hogy a lineáris reakciók kiegyenesítést és modulációt okoznak, harmonikusokat keltenek, ill. összeg- és különbségrekvenciával rezgő komponenseket állítanak elő.

Figyeljük meg, hogy mindezek [az (50.29) egyenlet] nemcsak az ε nemlinearitási tényezővel arányosak, hanem két amplitúdó szorzatával is — A^2 -tel, B^2 -tel, vagy AB -vel — ezért ezek a hatások *erős* jelek esetében sokkal jelentősebbek, mint gyengéknél.

Az effektusoknak számos gyakorlati alkalmazása van. Azt hiszik pl., hogy az emberi fül nemlineáris „műszer”. Ez a hiedelem azon alapszik, hogy erős hangok esetén az az érzésünk, hogy a felső harmonikusokat, valamint az összeg- és különbségrekvenciákat is *halljuk*, még akkor is, ha a hanghullámok csak tiszta hangokat tartalmaznak.

A hangkeltő berendezések szerkezeti elemeinek — erősítők, hangszórók stb. — mindig van némi nemlinearitásuk. Ezek a berendezések olyan torzításokat okoznak — vagyis pl. olyan felharmonikusokat keltenek —, amelyek nem szerepeltek az eredeti hangban. Ezek az új komponensek a fül által érzékelhetők, de jelenlétük nyilvánvalóan nem kívánatos. Éppen ezért a Hi-Fi berendezéseket pl. úgy tervezik, hogy annyira lineárisak legyenek, amennyire csak lehetséges. Az, hogy a fül nemlinearitása miatt *nem* kellemtelen ugyanígy, és milyen nemlinearitás van a *hangszóróban*, milyen a *fülben*, még nincs tisztázva!

A nemlinearitás teljesen *szükségszerű*, és ténylegesen, például a rádióadó és -vevő berendezések egyes részeiben szándékosan nagyra választják. Egy amplitúdómodulált rádióadónál a hangjelet (amelynek a frekvenciája néhány MHz) a *modulátornak* nevezett

nemlineáris áramkörben összegezik, és így jön létre a kisugárzott, modulált rezgés. A vevőkészülékben a felfogott jel komponensei egy másik nemlineáris áramkörbe kerülnek, amely a modulált vivőhullám összeg- és különbségfrekvenciáinak kombinálásával visszaalakítja a hangjelet.

Mikor a fény anyagon való áthaladását vizsgáltuk, feltételeztük, hogy a töltések indukált rezgése arányos a fény elektromos teré-

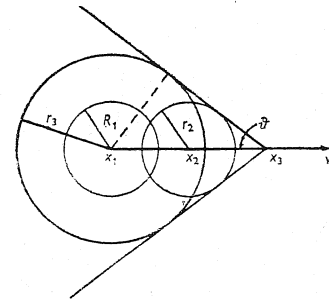
vel — azaz a reakció lineáris. Ez valójában csak igen jó közelítés. Az utóbbi években sikerült olyan fényforrásokat — a lézereket — előállítani, amelyek elég erős fényintenzitást adnak ahhoz, hogy a nemlineáris effektusok is észlelhetők legyenek: pl. ha erős vörös fény halad keresztül egy üvegdarabon, akkor az átbocsátott fényben egy nagyon kis kék — a vörös második harmonikusa — is megjelenik!

51 Hullámok

51.1 Fejhullámok

Miután a hullámokat mennyiségi szempontból már megvizsgáltuk, most rátérünk néhány bonyolultabb jelenség tárgyalására. Ezeket azonban csak bemutatjuk, mert túl bonyolultak ahhoz, hogy részletesen elemezhessük őket.

Első témaként vizsgáljuk meg, mi történik, ha a hullámforrás gyorsabban mozog a hullám terjedési sebességénél, vagyis a fázissebességénél. Tekintsünk először meghatározott állandó sebességű hullámokat, mint pl. a hang- és a fényhullámok.



51.1 ábra. Fejhullám kúp alakú hullámfrontja

A kúp hegye a hullámforrásnál van. A kúp félnyílásszöge = $\arcsin(v_h/c)$.

Tételezzük fel, hogy a forrás egy adott időpillanatban az x_1 pontban hanghullámot kelt (51.1 ábra), majd a következő időpillanatban elmozdul az x_2 helyre. Mire odaér, addigra az x_1 -ből kiindult hullám már az r_1 sugarú gömbfelületre terjed ki, ahol megállapodásunk szerint az r_1 sugarú kisebb, mint a forrás

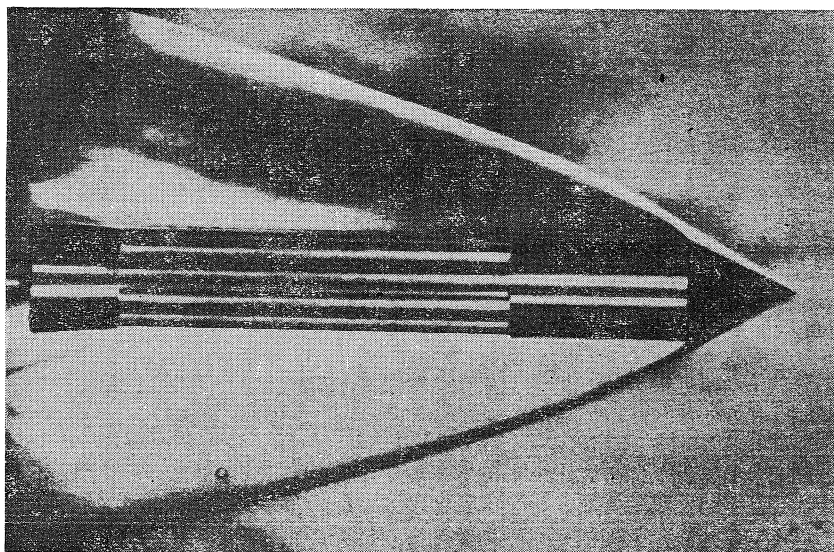
$(x_2 - x_1)$ elmozdulása. Természetesen x_2 -ből egy másik hullám is elindul. Amikor a hangforrás már x_3 -ban van, és onnan is elindul egy hullám, akkorra az x_2 -ből elindult hullám már r_2 , az x_1 -ből indult pedig r_3 távolságra terjed ki. A folyamat nem lépésenként, hanem folytonosan megy végbe, és így a körhullámoknak egy közös egyenessel mint érintővel határolt sorozatát kapjuk. A burkolóegyenes a hangforráson megy keresztül. Látjuk tehát, hogy a hangforrás gömbhullámok keltése helyett — melyeket álló helyzetében hozna létre — olyan hullámfrontot kelt, amelyet térben egy kúpfelület, kétdimenziós esetben pedig egy egymást metsző egyenespár határol. A kúp nyílásszögét az 51.1 ábra alapján könnyen megkaphatjuk. Adott idő alatt a forrás megtesz valamilyen $x_3 - x_1$ távolságot, amely a hullámforrás v sebességével arányos. Ez alatt a hullámfront r_3 távolsáig terjed, amely a hullám c_h terjedési sebességével arányos. Nyilvánvaló, hogy a félnyílásszög szinusza egyenlő a hullám és forrás sebességének hánydosásával:

$$\sin \phi = \frac{c_h}{v} \quad (51.1)$$

Látszik, hogy ez a szinusz csak akkor van értelmezve, ha c_h kisebb, mint v , tehát ha a test sebessége nagyobb, mint a hullám terjedési sebessége.

Megjegyezzük a következőt: *nem szükséges* külön kikötnünk, hogy hangforrásról van szó. Ha ugyanis egy test a hangsebességnél gyorsabban mozog, akkor ő maga *hangjelenséget*

hoz létre. A hangkeltéshez a tárgynak egyáltalán nem kell rezegnie. Ha egy test valamely közegben gyorsabban mozog, a hullámoknak e közegben való terjedési sebességénél a test mozgása miatt annak minden oldalán hullámok keletkeznek. Ezt hang esetében egyszerű megérteni, sőt ugyanez a helyzet a fényvel is. Első pillanatra azt gondoljuk: semmi sem mozog gyorsabban a fénynél! A fény azonban pl. üvegben a vákuumbeli fénysebességnél kisebb fázissebességgel terjed. Valamely nagyenergiájú töltött részecskét átbocsáthatunk az üvegben úgy, hogy sebessége közel lesz a vákuumbeli fénysebesség értékéhez, s ugyanakkor a fény fázissebessége az üvegben esetleg ennek csak 2/3-a lesz. Ekkor a részecske, amely a közegben a fénynél gyorsabban mozog, olyan kúpszerű fényhullámot kelt, melynek csúcsa a forrás lesz, és a hullám olyan lesz, mint a hajók által keltett víz hullám (amely — mint kimutatható — hasonló hatástól származik). A kúp nyílásszögét megmérve meg lehet határozni a részecske sebességét.



51.2 ábra. A hangnál gyorsabban mozgó lövedék által keltett lökeshullám valamely gázban

A nagyenergiájú részecskék fizikájában ez a jelenség a részecskesebesség meghatározásának egyik módszere. Az egyetlen adat, amit mérni kell, a fény kisugárzási iránya!

A részecske által fényt — a jelenség első megfigyelőjéről — Cserenkov-sugárzásnak nevezik. Frank és Tamm elméleti úton elemezték azt a problémát, hogy ennek mekkora intenzitásúnak kell lennie. Munkájukért 1958-ban mindhárman Nobel-díjat kaptak.

Az 51.2 ábra fényképfelvételt mutat egy olyan testről, amely valamilyen gázban gyorsabban mozog a hangsebességnél. A nyomásváltozás megváltoztatja a törésmutatót és így speciális optikai rendszerrel láthatóvá lehet tenni a hullámfrontot. Alaposabban megvizsgálva azonban a képet észrevesszük, hogy a hullámfront határa csak aszimptotikusan egyenes, a csúcs közelében elhajlik. A felület tehát ténylegesen görbült. A következőkben azt tekintjük feladatunknak, hogy ennek a görbületnek az eredetét megvizsgáljuk.

51.2 Lökeshullámok

Gyakran előfordul, hogy a hullám sebessége függ az amplitúdótól. Hang esetén pl. a következőképpen érthetjük meg ezt a függést. A levegőben mozgó bármely testnek az útjában álló levegőt el kell mozdítania. Ily módon valamilyen nyomáslépcső keletkezik; a nyomás a hullámfront mögött nagyobb lesz, mint a (normális sebességgel terjedő) hullám által el nem ért zavarásmentes rétegben. A hullámfront mögötti levegő adiabatikusan komprimált állapotba kerül, ezért hőmérséklete megnő. A hőmérséklet növekedésével a hangsebesség is megnő, így a nyomáslépcső mögötti rétegben a hangsebesség nagyobb, mint a hullámfront előtt.

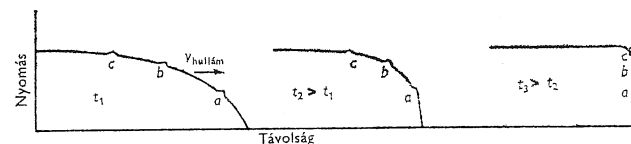
Ez azt jelenti, hogy a nyomáslépcső mögött keletkezett valamely más zavar — amelyet akár a mozgó test által okozott állandó nyomás, akár más rendellenesség hoz létre — gyorsabban fog terjedni, mint maga a hullámfront: nagyobb nyomás hatására a sebesség megnő. Ezt illusztrálja az 51.3 ábra, amelyen a járulékos zavarokat a nyomásgörbéhez hozzáadódó kis nyomáscsúcsok szemléltetik. Látjuk, hogy idővel a nagyobb nyomású részek utólérik a hullámfrontot, míg „végülis” a kompressziós hullámfront meredek formát ölt. Ha a hullámerősség nagyon nagy, akkor a „végülis” azt jelenti, hogy azonnal; ha pedig kisebb, akkor a jelenség hosszabb idő alatt megy végbe. Lehetséges az is, hogy a zavar gyakorlatilag szétterjed és mielőtt elérné a hullámfrontot, elhal.

A beszédhang erőssége a légköri nyomáshoz képest igen kicsi, annak kb. egymilliomod része. Ha a nyomásváltozás 1 bar nagyságrendű, a hullám sebessége mintegy 20%-kal

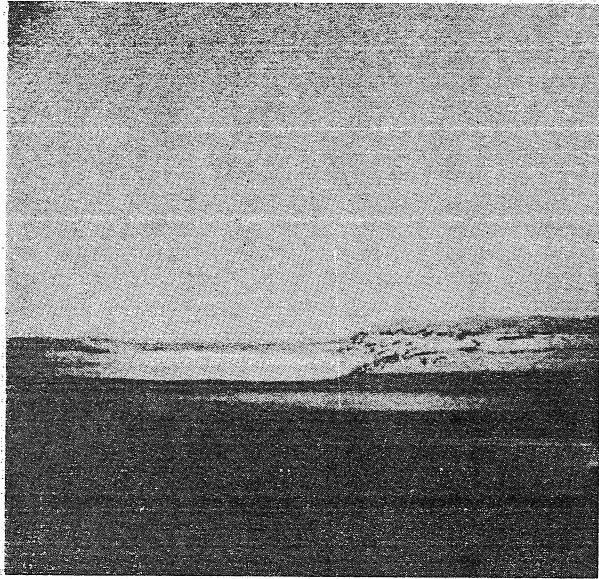
nő meg, és a hullámfront megfelelő mértékben meredekebb lesz. Mivel a természetben semmi sem megy *végtelen* gyorsan végbe, ezért amit mi „éles” frontnak nevezünk, az sem végtelenül meredek, csak igen kicsiny a vastagsága. Azok a távolságok, amelyekre e változások végbemennek, a molekulák átlagos szabad úthosszának nagyságrendjébe esnek; ilyen kis távolságokra nézve a hullámegyenlet már érvényét veszti, mivel felírásakor a gáz szerkezetét figyelmen kívül hagytuk.

Térjünk vissza ismét a 51.2 ábrára. A görbületet tehát meg tudjuk magyarázni, ha figyelembe vesszük, hogy a nyomás a csúcstól hátrafelé távolodva csökken; ezért a csúcsnál a θ szög nagyobb. A görbület tehát annak a ténynek a következménye, hogy a sebesség függ a hullám erősségétől. Ez az oka annak, hogy az atombomba robbanásakor keletkező nyomáshullám a hangsebességnél sokkal gyorsabban terjed, egészen addig, míg olyan messzire nem jut, hogy a szétterjedés következtében legyengült nyomáslépcső a légköri nyomáshoz képest elenyészővé válik. A hullámfront terjedési sebessége ekkor az illető gázban mért hangsebesség értékéhez tart. (A lökeshullám terjedési sebessége, a gázban mért hangsebesség értékénél a front előtt mindig nagyobb, a front mögött pedig kisebb. Ez azt jelenti, hogy a hátulról jövő impulzusok elérik a frontot, amely azonban a közegben gyorsabban terjed, mint maga a jelsebesség. Ezért nem lehet pusztán akusztikai úton előre megmondani, hogy lökeshullám közeledik csak akkor, amikor már késő. Először a bombarobbanás fénye érzékel meg, de hogy lökeshullám is jön-e, azt nem tudjuk, mert előtte semmilyen hangjel sincs!)

A hullámok összetorlódása nagyon érdekes.



51.3 ábra. „Hullámfront-pillanatképek” egymás utáni időpillanatokban



51.4 ábra. Vízlépcső

jelenség. Lényege az, hogy valamely kialakult hullám sebességénél a következő hullám sebessége már nagyobb.

E jelenség megértése érdekében vizsgáljunk egy hosszú, de véges szélességű és mélységű csatornában folyó vizet. Ha a csatorna hosszában elég gyorsan mozgathatunk egy dugattyút, a víz összetorlódik éppúgy, mint a hó a hóéke előtt. Tegyük fel, hogy valahol a csatornában az 51.4 ábrán látható meredek vízlépcső alakul ki. Kimutatható, hogy a mélyebb vízrétegekben a hosszú hullámok gyorsabban terjednek, mint a sekély vízben, ezért bármely, a dugattyú által okozott nyomáslépcső vagy energiarendellenesség „előrerohan”, és a frontnál összetorlódik. Végző soron elméleti úton is azt kapjuk, hogy a vízfront meredek lesz. A vízfelületen a leelő vízrészecskék nagy kavargást okoznak, mi azonban csak meredek „vízfalat” látunk, amely előtt a víz teljesen nyugodt.

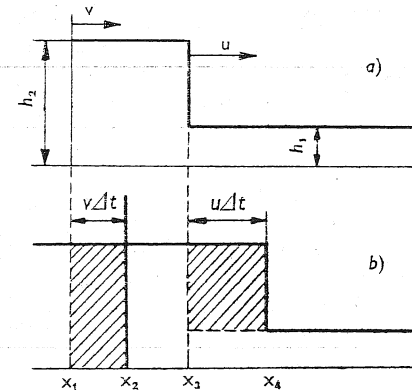
A valóságban a víz hullám sokkal komplikáltabb a hangnál. Ennek bizonyítására most megpróbáljuk egy ilyen csatornában mester-

segesen létrehozott ún. *szökőár* sebességét analizálni. Ezzel csak azt illusztráljuk, hogy a mechanika — már ismert — törvényeinek segítségével az ilyen típusú jelenségnek megmagyarázhatók.

Képzünk el egy pillanatra, hogy a víz felületének olyan alakja van, mint azt az 51.5a ábra mutatja; a h_2 -vel jelölt magasabb víz állású rész v sebességgel mozog, a front pedig a nyugalomban levő vízben h_1 magasságú u sebességgel.

Szeretnénk meghatározni a front u mozgási sebességét. Az x_1 helyen felvett függőleges sík Δt idő alatt $v\Delta t$ távolsággal mozdul el, és az x_2 helyre kerül. Ezalatt a hullámfront $u\Delta t$ távolsággal mozdul el.

Alkalmazzuk a tömeg- és impulzusmegmaradás törvényét. Az első szerint: látható hogy x_1 -en keresztül egységnyi csatornaszélességenként elmozdult $h_2v\Delta t$ tömeget (az 51.5b ábrán bevonalkázott terület) kompenzálja a $(h_2-h_1)u\Delta t$ tömeget (a másik bevonalkázott réteg). Ha Δt -vel egyszerűsítünk, azt kapjuk, hogy $vh_2 = u(h_2-h_1)$. Ez azonban még nem



51.5 ábra. Csatornában létesített szökőár metszetei

A b) metszet az a) helyzetnél Δt időintervallummal későbbi helyzetet tünteti fel

elég, mert bár a h_1 -et és h_2 -t ismerjük, mind a v , mind az u ismeretlen.

Alkalmazzuk az impulzusmegmaradás törvényét is. Az eddigiek során nem beszéltünk a víznyomás problémáiról, s nem érintettünk más hidrodinamikai kérdéseket sem, de azt tudjuk, hogy egy adott helyen a nyomásnak elegendőnek kell lennie ahhoz, hogy a fölötte levő vízszlopot megtartsa. A nyomást megkapjuk, ha a ρ vízsűrűséget megszorozzuk g -vel és a folyadék felszínétől mért távolsággal. Mivel a nyomás lineárisan változik a mélységgel, az x_1 helyen felvett függőleges síkon az átlagos nyomás $(1/2)\rho gh_2$ lesz. Ez ugyanakkor azzal az átlagos erővel is egyenlő, amely a csatorna egységnyi szélességű és egységnyi mélységű metszetét az x_2 felé nyomja. Ha h_2 -vel megszorozzuk, akkor megkapjuk a vízre balról ható egész erőt: $(1/2)\rho gh_2^2$. A víz jobb oldalról is nyomást fejt ki, amely ellenkező irányú erővel hat a szőben forgó rétegre. Ennek nagysága (az előzőhöz hasonló módon számolva): $(1/2)\rho gh_1^2$. Az erőknek egyensúlyban kell lenniük az impulzusmegváltozás sebességével. Ki kell tehát számolnunk, hogy mennyivel nagyobb az impulzus az 51.5b ábrán feltüntetett helyzetben, mint az 51.5a ábra szerintiben volt. Látjuk, hogy a v sebes-

segre szert tett többlettömeg (szélességegységként) $\rho u h_2 \Delta t - \rho v h_2 \Delta t$. Ezt megszorozva v -vel azt a többletimpulzust kapjuk, amely egyenlő az $F\Delta t$ impulzusváltozással:

$$(\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t) v = \\ = \left(\frac{1}{2} \rho g h_2^2 - \frac{1}{2} \rho g h_1^2 \right) \Delta t.$$

Ha az egyenletekből a már előbb levezetett $vh_2 = u(h_2-h_1)$ egyenlőség behelyettesítésével kiküszöböljük v -t, majd egyszerűsítünk, eredményként azt kapjuk, hogy

$$u^2 = \frac{g h_2 (h_1 + h_2)}{2 h_1}.$$

Ha a magasságkülönbség nagyon kicsi, tehát h_1 és h_2 közel egyenlők, akkor a sebesség: \sqrt{hg} . Ez — mint később látni fogjuk — csak akkor igaz, ha a hullámhossz sokkal nagyobb, mint a csatorna mélysége. Hasonló számítást lehetne elvégezni a hanghullámokra vonatkozólag is, csak az egyenletet ki kell bővíteni az energia megmaradásának figyelembevételével. Ha valaki a szökőárproblémát vizsgálja, azt találja, hogy a belső energia nem marad meg. Mennél nagyobb a magasságkülönbség, annál nagyobb energiavesztés lép fel. Ez nyilvánul meg — mint ahogy az 51.4 ábra is mutatja — a visszaeső vízben és az örvényekben.

Az adiabatikus lökeshullámoknál szintén megtalálható ez a látszólagos energiavesztés. A hanghullámok energiája a hullámfront mögött a gáz felmelegítésére fordítódik, ami szökőár esetén megfelel a vízvörvények kialakulásának. A probléma kidolgozása folyamán a hang esetében három egyenletet kell megoldani, annak figyelembevételével, hogy a hullámfront mögött és előtt — mint ahogy ezt már láttuk — a hőmérséklet nem egyenlő.

Ha sikerül olyan szökőárt létrehozni, amelyben az ugrás ellenkező irányú ($h_2 < h_1$), akkor azt találjuk, hogy az energiavesztés negatív. Mivel a szökőár nem tud honnan energiát nyerni, nem tudja fenntartani önmagát; instabil lesz. Az ilyenfajta hullám fokozatosan

kisimulna, mivel a sebességnek a magasságkülönbségtől való függése a hullámfront meredekebbé tétele helyett éppen azzal ellentétes effektust hozna létre.

51.3 Hullámok szilárd testekben

Eddig a hanghullámokat gázban és folyadékban vizsgáltuk. Köztük és a szilárd testben fellépő hanghullámok között közvetlen analógia van. Ha valamely szilárd testet megütünk, az összenyomódik. A test ellenáll a nyomásnak, vissza akarja nyerni alakját, és hanghoz hasonló hullám keletkezik, éspedig olyan, amely folyadékban nem létezik. Éppen ez az, ami definíció szerint megkülönbözteti a folyadékot a szilárd testtől! Ha valamely folyadékot deformálunk és rövid ideig így tartjuk, amíg lecsillapodik, majd magára hagyjuk, akkor deformáltsága megmarad. Ha azonban valamely szilárd testet megnyomunk és magára hagyjuk, az — hasonlóan egy megremegtetett kocsonyadarabhoz — visszatér eredeti helyzetébe, és benne pl. nyíróerő hatására *nyíróhullám* indul el. A nyíróhullám ugyanúgy terjed, mint a nyomáshullámok; sebességük minden esetben kisebb, mint a longitudinális hullámoké. A nyíróhullámok bizonyos vonatkozásban — legalábbis polarizációjukat illetően — leginkább a fényhullámhoz hasonlítanak. A hang csak nyomáshullám, polarizációval nem rendelkezik. A fény viszont transzverzális hullám.

A szilárd testekben mindkét hullámtípus előfordul. Ugyanúgy megtalálható bennük a hanghoz hasonló, állandó sebességű nyomáshullám, mint a nyíróhullám. Ha a szilárd test nem kristályos szerkezetű, akkor benne a polarizált nyíróhullám minden irányban a szilárd testre jellemző sebességgel terjed. (Természetesen minden szilárd test kristályos szerkezetű, de ha olyan testet veszünk, amely a legkülönbözőbb orientációjú mikrokrisztályokból áll, a kristályanizotropiák kiátlagolódnak.)

Érdekes kérdés: mi történik, ha a hullámhossz mind kisebb és kisebb lesz? Mennyire

lehet rövid a hullámhossz a szilárd testben? A hullám fogalmából következik, hogy az atomok távolságánál rövidebb hullámhossz nem lehetséges. A rezgések vagy longitudinálisok vagy transzverzálisak, másrészt hosszú- vagy rövidhullámok. Ha az atomok közti távolsággal összemérhető hullámhosszakat vizsgálunk, a sebességek többé már nem állandóak; diszperziós jelenség lép fel, és a sebesség nem független a hullámszámtól. A transzverzális hullámok legmagasabb felharmonikusa végső sorban akkor jelentkezik, mikor minden atom a szomszédjával ellentétesen rezeg.

Atomai szempontból olyan a helyzet, mint — a már ismertetett — két csatolt inga esetén. A szilárd testekben fellépő hullámokat tehát elemezhetjük csatolt, harmonikus oszcillátorok rendszereként is. A rendszer igen nagy számú csatolt ingához hasonlatos, amelyben a legmagasabb felharmonikus akkor jön létre, amikor az ingák ellentétesen lengenek, az alacsonyabb felharmonikusokat pedig a különböző fázisviszonyok határozzák meg.

A legrövidebb hullámhosszú hullámokolyan kicsik, hogy technikailag általában előállíthatatlanok. Mégis nagy figyelmet érdemelnek, mivel a szilárd test termodinamikájának elméletében a szilárd test harmonikus tulajdonságait — például a fajhőt — a rövid hanghullámok tulajdonságain keresztül is lehet vizsgálni.

A szilárd testekben fellépő hanghullámokra — mind a longitudinális, mind a transzverzális hullámokra — nagyon érdekes példát szolgáltatnak a Földben fellépő hullámok. A Föld belsejében időről-időre rengések vannak. Az egyes talajrétegek egymáshoz viszonyítva elmozdulnak. A jelenség a nagyon mély hanghoz hasonlít. A rengéshullámok úgy indulnak a forrásból, mint a hanghullámok. Bár hullámhosszuk sokkal nagyobb, mint amelyet általában hanghullámoknak tekintenek, azért még ezek is hanghullámok. A Föld nem homogén; tulajdonságai — pl. a nyomás a sűrűség, a rugalmasság stb. — a mélységgel változnak, ezért a rengéshullámok terjedési sebessége is függ a mélységtől. Következős-

képpen létezik egy a törésmutatóhoz hasonló számmal jellemezhető tulajdonság, s ezért a hullámok nem egyenesek, hanem görbe vonalak mentén haladnak. A longitudinális és transzverzális hullámok különböző sebességgel terjednek, így leírásukra más és más megoldások lehetségesek. Ez okozza azt, hogy ha valahol földrengés keletkezik, a szeizmográf mutatója nem jelez azonnal. Azt tapasztaljuk, hogy távoli rengéskor az írószerkezet először rezegni kezd, majd megnyugszik és aztán ismét rezeg. A szeizmográf által regisztrált egész folyamat a műszer helyétől függ. Ha elég közel van a földrengés epicentrumához, akkor először a hamarabb beérkező longitudinális hullámokat rögzíti, majd néhány pillanattal később a transzverzális hullámokat, mivel azok lassabban terjednek. Ha elég pontosan ismerjük a hullámok sebességét, és a föld alatti rétegek összetételét, a kétfajta hullám beérkezése közötti időkülönbség mérésével meg lehet állapítani, milyen messze történt a földrengés.

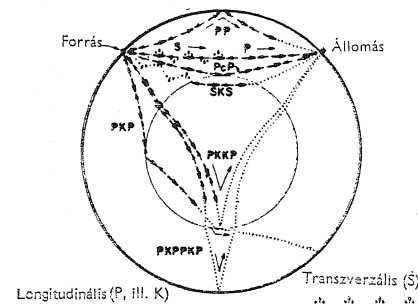
Az 51.6 ábrán példán mutatjuk be a hullámok viselkedését a Föld belsejében. A kétféle hullámot különböző módon jelöltük. Ha pl. földrengés keletkezik a „forrással” jelölt helyen, a transzverzális és longitudinális hullámok a legközvetlenebb úton, más és más időtartamok alatt érkeznek a megfigyelési helyre. (Előfordulnak persze egyes, szerkezeti diszkontinuitásokon történő visszaverődések is, amelyek más utakat és időtartamokat hoznak létre). A részletes vizsgálatok azt mutatták,

hogy a Földnek van egy, a transzverzális hullámokat át nem eresztő magja. Ha az állomás szemben van a forrással, a transzverzális hullámok még megérkeznek ugyan, de már nem azonos fázisban. Ez azért van, mert ha valamely transzverzális hullám nem merőlegesen érkezik két anyag határfelületére, akkor két új hullám keletkezik: egy transzverzális és egy longitudinális. A Föld magjában transzverzális hullám nem terjed (legalábbis eddig csak longitudinális hullám terjedését figyelték meg). A mag határán (a longitudinális hullám hatására) azonban mindkét fajta hullám ismét megjelenik, és eljut az észlelőhelyre.

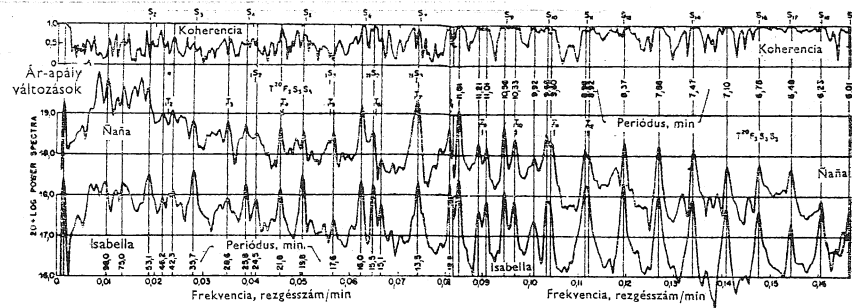
Éppen a Föld rengéshullámainak tulajdonságaiból határozták meg, hogy a transzverzális hullámok nem tudnak terjedni a belső gömbben. Ilyen értelemben a Föld központja folyékony. A Föld belsejére vonatkozó részletes ismereteinket a földrengés-megfigyelő állomások egymástól független megfigyelése eredményeképpen szereztük; ma már a sebességek, a terjedési görbék stb. mind ismertek. A különböző fajta hullámok sebességét minden mélységben ismerjük. Ennek ismeretében ki lehet számolni a Föld sajátrezgéseit, mivel ismerjük a hanghullámok terjedési sebességét, ill. mindkét hullámforma rugalmas tulajdonságait.

Tételezzük fel, hogy a Földet ellipszoiddá nyomtuk össze, s aztán elengedtük. Ekkor a rezgések periódusa és alakja egyszerűen meghatározható az ellipszoidban haladó hullámok szuperpozíciójával. Ennek alapján kiszámolták, hogy valamely adott zavar esetén sok ilyen harmonikus jön létre, kezdve a legalacsonyabbtól — amely jelen esetben ellipszoidszerű — az összetettebb struktúrájú legmagasabbakig.

1960. májusában a chilei földrengés hullámai többször is körbementek a Földön. Éppen akkorra készültek el az új, nagyérzékenységű szeizmográfok, s így meg lehetett határozni a Föld alapharmonikusainak a frekvenciáit, és össze lehetett hasonlítani őket az előző földrengések során mért és a hanghullámok elmélete alapján számított értékekkel. Az új földrengésjelző berendezésekkel végzett



51.6 ábra. Longitudinális és transzverzális rengéshullámok útja a Föld belsejében



51.7 ábra. Földrengés ereje a frekvencia függvényében

A rengést a Naña (Peru) és az Isabella (California) állomásokon levő szeizmográfok észlelték. A koherencia (egyezés) az állomások által regisztrált jelek kapcsolatának mértéke. [Benioff, Press and Smith, Journ. Geoph. Research 66, (1961) 605.]

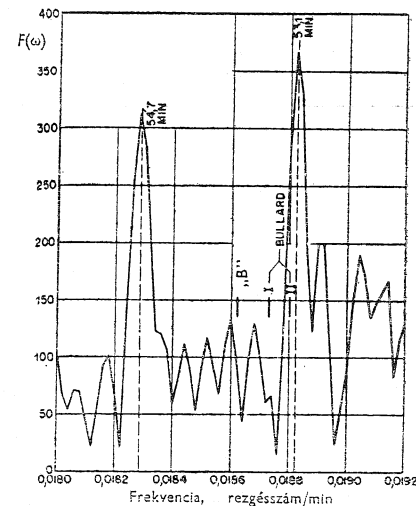
kísérlet eredménye az 51.7 ábrán látható, amely a jelerősséget ábrázolja a rezgés frekvenciájának függvényében (a Fourier-analízis eredményét). Figyeljük meg, hogy bizonyos speciális frekvenciákon sokkal nagyobb a jelerősség, mint a többinél; jól meghatározott éles maximumok lépnek fel. Ezek a Föld sajátfrekvenciái, azok a fő frekvenciák, amelyek a Föld rezegni képes. Más szavakkal, ha a Föld teljes rezgése sok különböző rezgés szuperpozíciójából áll, azt lehet remélni, hogy bármely állomáson regisztrált rendszertelen kilengések a sok különböző frekvencia egy és ugyanazon szuperpozícióját reprezentálják. Ha tehát a kapott jelet a frekvenciák kifejezésekként analizáljuk, megtalálhatjuk a Föld karakterisztikus frekvenciáit. Az ábrán a függőleges vékony vonalak a számított frekvenciák, amelyek a regisztrált rezgések analíziséből adódó frekvenciákkal elég jól egyeznek. Ez azt mutatja, hogy a hanghullámok elmélete a Föld belsejében is érvényes.

Az 51.8 ábráról — amely a legalacsonyabb felharmonikusoknak, az ellipszoid alakú hullámalaknak nagy felbontással, nagyon gondosan elvégzett méréseredményeit mutatja — nagyon érdekes tény lehet leolvasni. Megfigyelhetjük, hogy a görbének nem egy, hanem két, egymástól némileg eltérő maximuma van: az egyik 54,7 min, a másik 53,1 min periódusidőnél. Amikor a jelenséget mérték, a kettős

maximum oka ismeretlen volt. Magyarazatára két lehetséges feltevés is kínálkozik:

Elképzelhető, hogy a Föld anyagának eloszlásában valami aszimmetria van, amely két hasonló harmonikus eredményez.

Ennél érdekesebb azonban a másik lehetőség. Tegyük fel, hogy a forrástól elindult hullámok két irányban terjednek a Földön. Ha a



51.8 ábra. Az Isabella állomáson levő szeizmográf észleléseinek nagy felbontású Fourier-analízise. Jól látható az ún. spektrál dublet

Föld forgása miatt fellépő — a mozgásegyenletekben az eddigiek során elhanyagolt — effektusokat figyelembe vesszük, kimutatható, hogy a hullámok terjedési sebességei nem egyenlők. Forgó rendszerben a mozgást a Coriolis-erők is befolyásolják, és így ezek okozhatják a megfigyelt felhasadást.

Beszéljünk most röviden a rengésvizsgálat módszeréről. A szeizmográf nem az amplitúdó-görbét regisztrálja a frekvencia függvényében, hanem a kitérést az idő függvényeként, s ez mindig nagyon szabálytalan görbe. Ebből az összes frekvenciára vonatkozóan a különböző frekvenciájú szinusz-hullámok részarányát — mint már ismeretes — a következő trükkös módszerrel tudjuk meghatározni: az adatokat megszorozzuk egy adott frekvenciájú szinusz-hullámmal és integrálunk. Más szóval: átlagot kell képeznünk, és ez az átlag a szorzó hullám frekvenciáján kívül minden más frekvencián eltűnik. Az 51.7 és 51.8 ábrán azokat az integrálokat tüntettük fel, amelyeket oly módon kaptunk, hogy az adatokat megszoroztuk különböző percnkénti rezgésszámú szinusz-hullámokkal, és a szorzatokat kiintegráltuk.

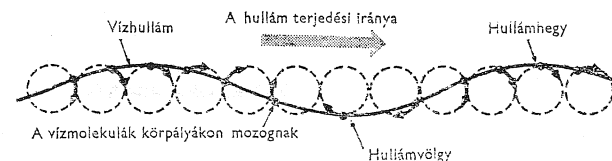
51.4 Felületi hullámok

A tárgyalásunkban most következő hullám-típust már mindenki látta és ismeri, az alapfokú oktatásban is a hullámok legáltalánosabb példájaként szokták említeni: ezek a vízfelületen levő hullámok. Rövidesen meglátjuk, hogy nehéz lenne ennél rosszabb példát találni. A víz-hullám ugyanis sem a hanghoz, sem a fényhez nem hasonlít, ez egy különlegesen összetett hullámjelenség.

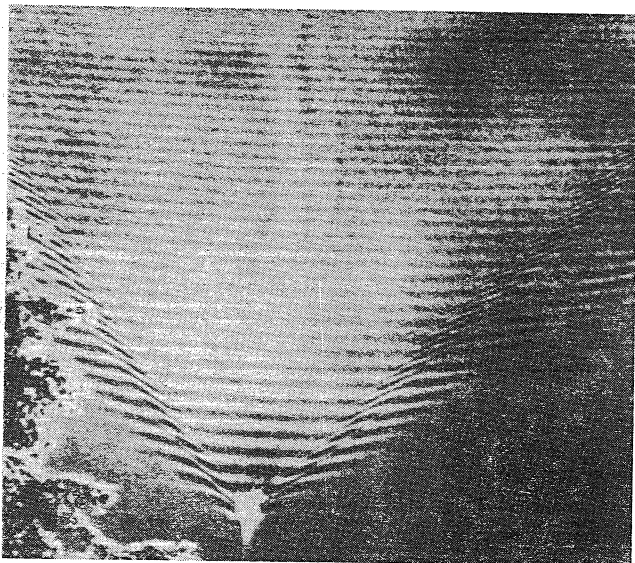
A víz-hullámok tulajdonságainak vizsgálatát kezdjük a mély vízben kialakuló hosszú hullámok elemzésével. Ha a végtelen mélynek

tekintett óceán nyugodt felületét megzavarjuk, akkor hullámok keletkeznek. Ekkor mindenféle szabálytalan mozgás felléphet, de a szinuszos típusú mozgás nagyon kis zavar esetén olyan hullámokat kelt, amelyek az óceán partnak tartó sima hullámjaihoz hasonlóak. A víz természetesen átlagosan nyugalomban, a helyén van, de a hullám mozog. Milyen is ez a mozgás: transzverzális-e vagy longitudinális? Egyik fajta sem lehet! Bár a víz minden adott helyen váltakozva, hol hullámhegyen, hol hullámvölgyben van, a „víz megmaradás” miatt nem lehetséges, hogy egyszerűen csak emelkedjen és süllyedjen. Ha egy vízcsepecske lefelé megy, hova kerül akkor arról a helyről a többi? Hiszen a víz gyakorlatilag összenyomhatatlan! Nyilvánvalóan mivel a víz összenyomhatatlan, a víznek eredeti helyéről oldalra kell elmozdulnia, mikor egy hullámhegy lezuhan. A valóságban az történik, hogy a felülethez közeli vízcsepecskék közelítőleg körmozgást végeznek. Egy úszó gumitömlőn fekvő ember meg tudná figyelni, hogy a közeli tárgyak kör mentén mozognak. Ez azt jelenti, hogy longitudinális és transzverzális hullámok keverékével állunk szemben! Nagyobb mélységekben a mozgások kisebb körökön mennek végbe, míg elég nagy mélységben a körmozgásokból már semmi sem marad (51.9 ábra).

Az ilyenfajta hullámok sebességének meghatározása érdekes probléma. A sebesség valamilyen függvénye lesz a víz sűrűségének, a nehézségi erőnek — amely jelen esetben a hullámokat kialakító visszatérítő erő —, esetleg a hullámhossznak és a vízmélységnek. Ha a mélység tart a végtelen felé, akkor a sebesség már nem függ a mélységtől. Bármilyen formulát is vezetünk le a hullámok fázis-sebességére, a különböző faktorokat úgy kell kombinálnunk, hogy azok megfelelő dimen-



51.9 ábra. A mélyvízi hullámok körök mentén mozgó részecskékből jönnek létre. Figyeljük meg, a körről-körre változó fáziseltolódást



51.10 ábra. Hajót kísérő hullámkép

ziókat adjanak.* Egy módja a sűrűség, a g és a λ olyan kombinálásának, mely sebességet ad, a sűrűségtől teljesen független $\sqrt{g\lambda}$ mennyiség. Mint azt a kérdés teljes dinamikai elemzése kimutatja, a valóságban a fázissebességre kapott képletünk egy $\sqrt{1/2\pi}$ faktortól eltekintve, helyes. A pontos összefüggés:

$$v_{\text{fázis}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (\text{„gravitációs” hullámokra vonatkozóan}).$$

Érdekes, hogy a hosszúhullámok gyorsabban terjednek, mint a röviddek. Ily módon, ha egy távolban elhúzó motorcsónak nagy hullámokat kelt, bizonyos idő után a hullámok először lassú, majd mind gyorsabb hullámveréssel érik el a partot. A parthoz érkező első hullámok ugyanis hosszúak, majd egyre rövideb-

* Az itt alkalmazott *dimenzióanalízis* módszerére és érvényességi körére vonatkozóan l. pl. *Gitterman – Halpem*: Fizikai problémák kvantitatív vizsgálata (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.) című könyvét. (Szerkesztő)

bekek és rövidebbekeké válnak, mivel a sebesség a hullámhossz négyzetgyökével változik.

„Ez nem helyes” — vetheti föl valaki —, „hiszen, ilyen megállapításhoz a csoportsebességet kell megvizsgálunk”. Természetesen ez igaz! A fázissebesség képletéből nem lehet megtudni, hogy melyik hullám érkezik elsőnek, erről csak a csoportsebesség tájékoztat. A csoportsebességről kimutatható, hogy a fázissebesség felével egyenlő. Most arra kell emlékeznünk, hogy a fázissebesség a hullámhossz négyzetgyökével arányos, és látjuk, hogy a csoportsebesség is.

Hogyan lehetséges, hogy a csoportsebesség fele a fázissebességnek? Ha valaki figyel egy mozgó hajó által keletkezett hullámcsoportot és követ egy kiválasztott hullámtarét, azt találja, hogy az a hullámtaréj a csoporton belül előre mozog, de fokozatosan gyengébb és gyengébb lesz, míg végül a frontban elhal. Majd valami titokzatos és rejtélyes módon a frontból helyette gyenge hullám jön ki, mely előre haladva egyre erősebbé és erősebbé válik. A hullámok tehát keresztülhaladnak a

csoporton, mialatt a csoport a hullámsebesség felével halad.

Mivel a csoport- és fázissebességek nem egyenlők, ezért valamilyen vízben mozgó test által keltett hullámok többé nem egyszerűen kúp, hanem sokkal bonyolultabb és érdekesebb. Ezt láthatjuk az 51.10 ábrán, amely egy hajó által keltett hullámokat mutat. Láthatjuk, hogy egészen más a víz hullámtere, mint a hangé, ahol a sebesség független a hullámhossztól, és hullámfrontok csak a kifelé mozgó kúp mentén vannak. Helyette a hajó mögött, annak mozgására merőleges hullámfrontokat, és oldalt, más szögek alatt mozgó kis hullámokat is látunk. Ez a teljes hullámkép kizárólag annak ismeretében is elemezhető, hogy a fázissebesség arányos a hullámhossz négyzetgyökével. A lényeg: a hullámkép az — állandó sebességgel mozgó hajóhoz képest — stacioner; bármely másféle hullámkép ui. „leszakad” a hajóról.

A víz hullámok, melyekkel eddig foglalkoztunk, hosszúhullámok voltak. Ezeknek visszatérítő ereje a gravitációs erő volt. Amikor azonban a víz hullámok nagyon rövidekké válnak, akkor a visszatérítő erő túlnyomórészt a kapillaris vonzástól, azaz a felületi feszültség energiájától származik. A felületi feszültség — vagy kapillaris hullámok a következő fázissebességgel terjednek:

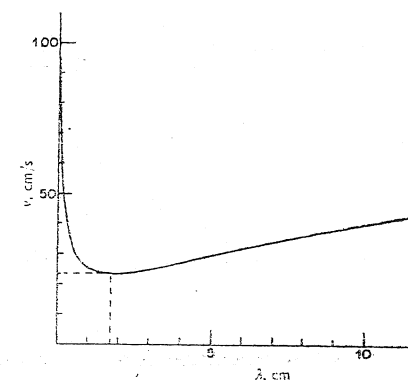
$$v_{\text{fázis}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}$$

ahol σ a felületi feszültség, ρ pedig a sűrűség. Az előbbi esethez képest itt pontosan fordított a helyzet: a fázissebesség *nő* a hullámhossz csökkenésével. Ha mind a gravitációs, mind a kapillaris erő jelentős — mint ahogy az általában lenni szokott —, akkor a két képlet együttes kombinációját kapjuk:

$$v_{\text{fázis}} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k}}$$

ahol $k = 2\pi/\lambda$ a hullámszám.

A víz hullámok sebessége — mint látjuk — valóban összetett. Az 51.11 ábrán látható a fázissebesség a hullámhossz függvényében; a nagyon rövid és a nagyon hosszú hullámok

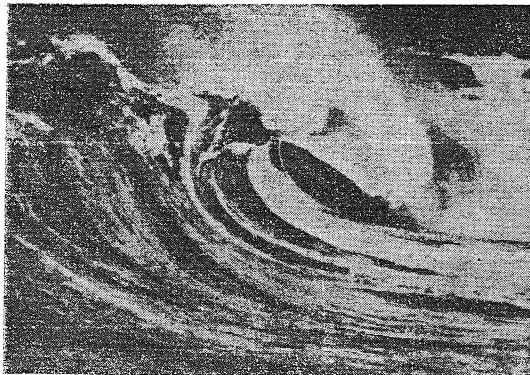


51.11 ábra. Fázissebesség a hullámhossz függvényében, vízben

gyorsak és létezik egy minimális hullámterjedési sebesség. A képletből ehhez a csoportsebesség is kiszámítható: ez a fázissebesség $3/2$ -edszerese a kapillaris, és $1/2$ -szerese a gravitációs hullámok esetén. A minimumtól balra a csoportsebesség nagyobb a fázissebességnél, jobbra pedig kisebb.

Ehhez a tényhez néhány érdekes jelenség kapcsolódik. Mindenekelőtt, mivel a csoportsebesség a hullámhossz csökkenésével gyorsan növekszik, ha valamilyen zavart hozunk létre, akkor fellépnek olyan hosszúságú hullámok, amelyek minimális sebességgel terjednek (ez a zavar leglassabb része), és lesznek előttük — főleg a frontban — nagyobb sebességgel haladó nagyon rövid és nagyon hosszú hullámok. A hosszúhullámokat nagyon nehéz megfigyelni, de a rövideket könnyen szemléltethetjük vízzel telt tartályban.

A víz hullámban a főhullámnak kis, előre-szaladó hullámfodrai vannak. A diszperzió miatt valamilyen, a vízfelületet megbontó „éles zavar” nem hoz létre meredek fronttal rendelkező hullámokat; a zavar felől először a nagyon finom, kis hullámok jönnek. Ha egy test bizonyos sebességgel mozog a vízben, meglehetősen bonyolult hullámkép alakul ki, mivel a különböző hullámok különböző sebességgel mozognak. Egy vízzel telt kád segítségével szemléltethetjük, hogy a leg-



51.12 ábra. Víz hullám

gyorsabb hullámok a finom, kapillaris hullámok, és ezek mögött haladnak a lassúbb hullámok. Lejtős meder esetén azt tapasztaljuk, hogy ahol a mélység kisebb, ott a hullámok sebessége is kisebb lesz. Ha egy hullám valamilyen szög alatt érkezik a maximális lejtés vonalához, akkor azon elhajlik, a vonalat igyekszik követni. A kísérleti kád segítségével különböző jelenségeket mutathatunk meg, és azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a víz-hullámok sokkal bonyolultabbak, mint a levegőhullámok.

A hosszúhullámok sebessége a felszínhez közelebb kisebb, mint mély vízben. Ily módon, amikor a hullámok a sekélyebb vízű part felé haladnak, lelassulnak. Ahol azonban a mélység nagyobb, a hullámok gyorsabbak, és így újra lökéshullám-jelenséggel találkozunk. Ekkor azonban, mivel a víz hullám meglehetősen összetett, a lökéshullám frontvonala egyre jobban eltorzul és az 51.12 ábrán láthatóan, „átbukik” önmagán. Ezt láthatjuk akkor is, amikor a hullám eléri a partot; a partra csapódó hullámokat vizsgálva élénk tárul a természet minden bonyolultsága. Még senki sem tudta kiszámítani a megtörő hullám alakját.

A kapillaris hullámok érdekes sajátosságát figyelhetjük meg a vízben mozgó tárgy keltette felszíni „zavarokban”. A tárgy szempontjából a víz mellette folyik és a tárgy mellett mindig azok a hullámok maradnak, melyeknek sebessége azzal egyenlő. Az áramló folya-

dékba helyezett test körül kialakuló hullámkép stationer lesz, és a hullámkép éppen azokat a megfelelő hullámhosszakot tartalmazza, amelyek a hullámképnek a folyadékkal azonos mozgásához szükségesek. Ha a csoportsebesség kisebb, mint a fázissebesség, akkor a zavarok az áramlatban *visszafelé* haladnak, mivel a csoportsebesség nem elégséges ahhoz, hogy lépést tartson az árammal. Ha pedig nagyobb annál, akkor a hullámkép a tárgy előtt jelenik meg. Ha valaki alaposabban megvizsgál valamely áramló folyadékban levő tárgyat, láthatja, hogy előtte rövid hullámfodrok, mögötte pedig hosszúhullámok vannak.

Kiömlő folyadék esetében hasonló érdekes jelenséget figyelhetünk meg. Ha pl. egy palackból elég gyorsan ömlik ki a tej, a kijövő „tej-áramban” mindkét irányban nagyszámú, egymást keresztező vonulatot látunk. Ezek a hullámok a palack peremének „zavarain” keletkeznek; igen hasonlóan azokhoz a hullámokhoz, melyeket valamely áramlatba helyezett tárgy hoz létre. Az effektus azonban most mindkét oldalról fellép és ezért kapunk keresztező vonalakból álló hullámképet.

Megismerkedtünk tehát a hullámok néhány érdekes tulajdonságával, különböző bonyolultságú esetekkel. Megvizsgáltuk a fázissebesség hullámhossztól való függését, a hullámok sebességének a mélységtől való függését stb. Ezek a természet összetett és kétségkívül érdekes jelenségei.

52 A fizikai törvények szimmetriái

52.1 Szimmetriaműveletek

Vizsgáljuk megmost részletesebben a *fizikai törvények szimmetriatulajdonságait*, melyeknek néhány vonását már a vektoranalízissel (1. kötet, 11. fejezet), a relativitáselmélettel (2. kötet, 16. fejezet) és a forgatással (2. kötet 20. fejezet) kapcsolatban megtárgyaltuk.

Miért kell foglalkoznunk a szimmetriával? A szimmetria az emberi gondolkodás számára vonzó valami. Mindenki szereti az olyan tárgyakat és alakzatokat, amelyek valamilyen módon szimmetrikusak. Érdekes tény, hogy a természet gyakran mutat különböző szimmetriákat. Talán az elképzelhető legszimmetrikusabb alakzat a gömb, a természet pedig tele van gömbökkel: csillagokkal, bolygókkal, ködben levő vízcseppekkel. A kőzetek kristályai is különféle szimmetriát mutatnak, amelyeknek tanulmányozása számos érdekességet tár fel a szilárd testek szerkezetéről. Még az állat- és növényvilágban is számos szimmetriatulajdonsággal találkozhatunk, bár egy virág vagy egy méhecske szimmetriája korántsem olyan tökéletes és alapvető, mint amilyen egy kristályé.

A *tárgyak* szimmetriája is érdekes probléma, de minket sokkal fontosabb kérdés foglalkoztat: a fizikai világ működését szabályozó *törvények* szimmetriája.

Mi is a szimmetria? Hogyan értsük azt, hogy egy fizikai *törvény* „szimmetrikus”? A szimmetria meghatározása alapvető probléma. Már említettük Weyl egy jó megfogalmazását, amelynek a lényege az, hogy akkor szimmetrikus valami, ha meghatározott műveletnek alávetve, változást nem tapasztalunk. Egy szimmetrikus vázát pl. tükrözhetünk vagy

elfordíthatunk anélkül, hogy bármilyen változást is észrevehetnénk rajta. Avval a kérdéssel szeretnénk foglalkozni tehát, hogy milyen hatást gyakorolhatunk egy fizikai jelenségre úgy, hogy a kísérlet során létrejött fizikai állapot ne változzon. Ezeket a fizikai jelenségeket változatlanul hagyó ismert műveleteket az 52.1 táblázatban foglaltuk össze.

52.1 táblázat

Szimmetriaműveletek

Térbeli eltolás
Időbeli eltolás
Adott szöggel való elforgatás
Egyenes vonalú egyenletes sebesség (Lorentz-transzformáció)
Időtükrözés
Tértükrözés
Azonos atomok vagy azonos részecskék felcserélése
Kvantummechanikai fázis megváltozása
Anyag – antianyag felcserélése (töltéstükrözés)

52.2 Szimmetria térben és időben

Az első, legegyszerűbb művelet: a fizikai jelenségek térbeli *eltolása* (transzláció). Ha a tér egy bizonyos helyén kísérletet végzünk és azután a tér egy másik helyén másik kísérleti berendezést építünk fel (vagy az eredetit oda eltoljuk), akkor ami az egyik berendezésben egy bizonyos időrendben lejátszódott, a másikban ugyanúgy megismétlődik, természetesen csak ugyanazon – az előzőre vonatkozó

mazik*. Léteznek tehát hasonló típusú atomok. Egy adott típusú oxigénatom, és egy ugyanolyan típusú másik oxigénatom ugyanúgy fog viselkedni.

Azt mondhatná valaki: „nevetséges, hiszen ez az azonos típus *definíciója*.” Lehet, hogy ez csupán definíció, de akkor még mindig nem tudjuk, hogy vajon valóban vannak-e „azonos típusú atomok”. A *tény* az, hogy nagyon-nagyon sok azonos típusú atom van. Az a kijelentésünk tehát, hogy nem okoz semmi különbséget, ha egy atomot egy vele azonos típusúval felcserélünk, már lényeges. A fenti értelemben az atomokat alkotó ún. elemi részecskék azonosak; minden elektron azonos minden proton azonos, az összes pozitív π -mezőn azonos stb.

52.3 Szimmetria és a megmaradási törvények

A fizikai törvények szimmetriái ezen a szinten is nagyon érdekesek, de talán még izgalmasabbak a kvantummechanikában. Nagyon érdekes tény — amelyet a legtöbb fizikus még ma is elég mehökkentőnek tart — az, hogy a kvantummechanikában *minden egyes szimmetriának egy megmaradási törvény felel meg*. Meghatározott kapcsolat van a megmaradási törvények és a fizikai törvények szimmetriái között. Ezt azonban jelenlegi tárgyalásunk színvonalán még nem tudjuk kellően megvilágítani. Ezért állításunkat most csupán ki-mondjuk, anélkül, hogy bizonyítanánk.

Például az a tény, hogy a fizika törvényei a térbeli (egyenletes sebességű) eltolással szemben szimmetrikusak, egyenértékű az impulzus-megmaradás törvényével.

A fizika törvényeinek az időeltolással szemben szimmetrikus volta az *energiamegmaradás*hoz vezet, a térbeli forgatás esetén *érvényes invariancia* pedig az *impulzusmomentum megmaradásának* felel meg. A fenti kapcsola-

* Ez az ún. permutációs szimmetria. (Ford. megj.)

tok a fizika legszebb és legalapvetőbb kérdései közé tartoznak.

Vannak azonban a kvantummechanikában olyan szimmetriák is, amelyeknek nincs klasszikus megfelelője, s amelyeket a klasszikus fizika módszereivel nem is lehet leírni. Ilyen például a következő: ha ψ valamilyen folyamat hullámfüggvényének amplitúdóját jelenti, akkor ψ *abszolút értékének négyzete* a folyamat bekövetkezésének valószínűségét adja meg. Ha most valaki nem ezzel a ψ -vel, hanem egy ettől csupán fázisban különböző ψ' -vel (Δ legyen valamilyen állandó, és a régi ψ -t szorozzuk meg $e^{i\Delta}$ -val) végeznél el a számítást, akkor az esemény bekövetkezésének valószínűsége, azaz ψ' abszolút értékének négyzete ψ abszolút értékének négyzetével lenne egyenlő:

$$\psi' = \psi e^{i\Delta}, \quad |\psi'|^2 = |\psi|^2. \quad (52.1)$$

A fizikai törvény tehát változatlan, ha a hullámfüggvény fázisát egy önkényesen megadott állandóval eltoljuk. Látjuk, hogy ez az eddigiektől eltérő szimmetria. A kvantummechanikai fázissal kapcsolatos megmaradási törvény az *elektromos töltés megmaradásának* felel meg.

52.4 Tükrözési szimmetria

Most áttérünk a *térbeli tükrözési szimmetriára*. A probléma a következő: szimmetrikusak-e a fizikai törvények tükrözés esetén? Ezt másféleképpen is megfogalmazhatjuk: Tételezzük fel, hogy valamilyen mérőberendezést építünk, mondjuk egy órát: sok keréssel, mutatóval és számmal. Az óra ketyeg, belsejében a működését biztosító szerkezeti elemek vannak. Nézzünk most az órára a tükröben. Készítsünk egy másik órát, amely tökéletesen ugyanolyan, amilyenek az első óra látszik a tükröben. Mindenütt, ahol az első órában jobbmennetű csavar található, a másik óra megfelelő helyén balmennetű csavart használunk. Az egyik számlapján levő 2-est a másikon „S”-essel jelöljük. Minden, valamely irányban hajlított spirálrugót a „tükrökép órában” fordítva hajlítunk, s í. †

Mikor mindezt befejeztük, kétfajta óránk lesz, melyek egymással egy tárgy és a tükröképe között fennálló kapcsolatban állnak. Hangsúlyozzuk, hogy mindkettő valódi anyagi tárgy! Felmerül a következő kérdés: ha a két órát ugyanolyan körülmények között elindítjuk (a két rugót egyforma feszesre húzzuk fel), vajon ezután a két óra örökké egymás tükröképeként működik és ketyeg majd? (Ez tisztán fizikai, és nem filozófiai kérdés!) A fizika törvényei azt sugallják, hogy *igen*.

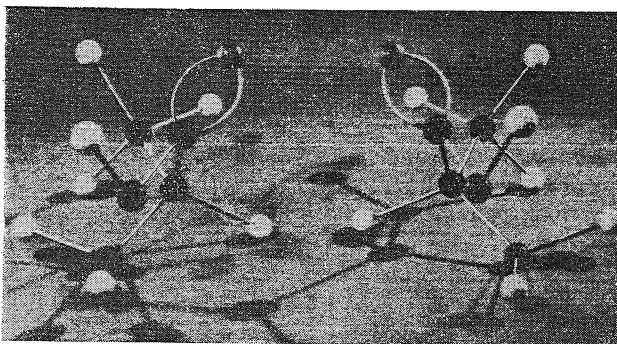
Úgy gondoljuk, hogy — a térbeli tükrözés a fizikai törvények egyik szimmetriájának tekinthető, azaz, ha mindent „jobbról” „balra” változtatunk, egyébként azonban minden mást (pl. óráink esetében a rugók feszeségét stb.) változtatlanul hagyunk, nem tudunk különbséget megállapítani. Tételezzük fel ezután, hogy amit gyanítunk, igaz. Ekkor semmilyen fizikai jelenséggel sem lehet a „jobb”-ot a „bal”-tól megkülönböztetni éppúgy, mint ahogyan például semmilyen fizikai jelenség segítségével sem lehet valamely mozgás abszolút sebességét meghatározni. Ilyenkor tehát lehetetlennek kell lennie annak, hogy valamely adott fizikai jelenség segítségével abszolút módon meghatározzuk: mit értünk a „bal”-lal ellentétben „jobb”-on, mivel az összes fizikai törvény — feltevésünk szerint — szimmetrikus.

Természetesen, az anyagi világnak *nem kell* általában tükröszimmetrikusnak lennie. Földrajzi ismereteink alapján nyilvánvalóan meg lehet határozni pl. a „jobbot”: New Orleansban Chicago felé tekintve Florida jobb kezünk felé esik (természetesen, ha lábunkkal állunk a talajon!). A földrajzban meg tudjuk határozni merre van a „jobb” és merre a „bal”. A kérdés azonban az: hogy vajon a fizikai törvények szimmetrikusak-e? A kérdést úgy is megfogalmazhatjuk: vajon ellentmondának-e a fizikai törvények egy, a Földhöz hasonló „bal oldalas” felülettel rendelkező gömb létezésének.

Nyilvánvaló, hogy ez a helyzet nem tűnik lehetetlennek. A fizikai törvényeknek ugyanis nem mond ellent az, hogy minden balról jobbra változzon.

Meg kell próbálnunk valamilyen jelenséget találni, amellyel a kítettetett „jobb oldal” alapvető módon kapcsolatos. Tekintsük a következő lehetőséget: ismeretes, hogy a poláros fény polarizációs síkja a fénynek cukoroldaton való áthaladása során jobbra fordul (3. kötet, 33. fejezet). Úgy látszik, módot találunk a „jobb oldal” definiálására, mivel vízben bizonyos mennyiségű cukrot feloldva, a fény polarizációs síkját jobbra tudjuk elforgatni. A cukrot organizmusok építik föl, de ha mesterségesen próbáljuk előállítani, azt találjuk, hogy ekkor *nem forgatja el* a polarizáció síkját! Ha azonban ebbe a polarizáció síkját nem elforgató mesterséges cukorba baktériumokat teszünk (amelyek bizonyos mennyiségű cukrot elfogyasztanak), majd kiszűrjük őket, azt tapasztaljuk, hogy még maradt cukor (körülbelül a kezdeti mennyiség fele) és ez már elforgatja a polarizáció síkját, de éppen *ellenkező* irányban! Ez a tény ugyan nagyon zavarbaejtő, de azért könnyen megmagyarázható!

Nézzünk meg ezért egy másik példát. Minden élőlény egyik közös alkotórésze, az élet alapanyaga: a fehérje. A fehérjék aminosav-láncokból állnak. Az 52.1 ábrán egy élő fehérjéből származó aminosav vázlatos képe látható. Ezt az aminosavat „alanin”-nak nevezik, molekuláris szerkezetét az 52.1a ábra mutatja. Ha az alanint széndioxidból, etánból és ammóniából állítjuk elő, azt tapasztaljuk, hogy ilyen típusú molekulából és abból a fajtából, ami az 52.1b ábrán látható, egyenlő mennyiség adódik! Az első típusú molekulát, amely élő anyagból származik *L-alaninnak* nevezik. A másik típus, amely kémiaiilag ezzel azonos — hiszen ugyanolyan atomok és az atomok között ugyanolyan kémiai kötések szerepelnek benne, de elrendezése az előbbi tükröképe: *D-alaninnak* hívják. Az élő szervezet ezzel szemben általában csak az L-alanint használja fel. Előfordul azonban élőlényekben is itt-ott D-alanin. Ezek az esetek azonban nagyon ritkák. Ha mindkét fajtából készítünk bizonyos mennyiséget, és a keverékkel állatokat táplálunk, amelyek alanint „szeregetnek enni” vagy felhasználni, kiderül, hogy



52.1 ábra. a) L-alanin; b) D-alanin

azok a D-alanint nem tudják felhasználni, csak az L-alanint. Pontosan ugyanaz a helyzet a cukoroldatunkkal: miután a baktériumok megették azt a fajta cukrot, amelyik nekik „ízlik”, csak a nekik nem ízlő „rossz” cukor marad meg!

Úgy tűnik, mintha az életjelenségek vagy a kémia lehetővé tennék a „jobb” és a „bal” megkülönböztetését, mivel a két molekula kémiailag különböző! De nem, nincs így! Ameddig fizikai méréseket végzünk, mint pl. a kémiai reakciók energiáját, sebességét stb. mérjük, ez a kétfajta molekula — ha minden egyéb tükrözve is van — teljesen hasonlóképpen viselkedik. Az első típusú molekulák a fényt jobbra forgatják, a másik típusúak pedig — ugyanannyi oldaton keresztül — pontosan ugyanolyan mértékben balra. Ami a fizikát illeti, a két aminosav azonos mérési eredményre vezet. A Schrödinger-egyenlet már tartalmazza, hogy a két molekulának tökéletesen hasonlóan kell viselkednie, annak ellenére, hogy az egyik „jobb oldalas”, a másik pedig „balos”. Mindemellett, az élővilág mégiscsak egyfajta módon van felépítve!

A feltételezések szerint ennek oka a következő: képzeljük el például, hogy valamilyen időpontban olyan körülmények jönnének létre, hogy az élőlények összes fehérjéi csak bal oldalas aminosavakat tartalmaznának. Ez arra vezetne, hogy élőlényekben minden alapanyag „eltorzulna”, vagyis az összes enzim

„eltorzulna” — minden aszimmetrikussá válna. Tehát amikor az emésztő enzimek a táplálékban levő vegyi anyagokat megpróbálnak másfajta vegyi anyagokká átalakítani, akkor egyfajta vegyi anyag „megfelelne” az enzimeknek, a másik nem (mint Hamupipőkének a táncpíró, azzal a különbséggel, hogy most azt a „bal lábra” próbáljuk). Hogy jobban megvilágítsuk a mondottakat, tekintsük a következő esetet: mai tudásunk szerint elvben készíthető például egy olyan béka, amelyben minden molekula fordított, vagyis olyan, mint egy valódi béka „bal oldalas” tükörképe. Ez a bal oldalas béka egy darabig egészen rendben érezné magát, de nem tudna találni magának semmi táplálékot, mivel ha bekapna egy legyet, az enzimek nem lennének képesek azt megemésztetni. A „valódi” légy ugyanis számára „rossz” aminosavakból állna (magától értetődik, életben tartásához adhatnánk a békának „bal oldalas” legyet is). Tehát mai tudásunk szerint a vegyi és életfolyamatok, ha *mindent* megfordítanánk, ugyanolyan módon folytatódna, mint ahogy eddig lezajlottak.

Ha az élet teljesen fiziko-kémiai jelenség lenne, akkor azt a tényt, hogy minden fehérjében ugyanaz a „jobb oldalas” szerkezet szerepel, azon elképzelés alapján lehetne megérteni, hogy az élet kialakulásakor különböző élő molekulák indultak a „nagy versenyen” és csak egyik fajtának sikerült győznie. Valahol

tehát egyszerűen csak aszimmetrikus szerves molekulák jöttek létre, és e különleges esemény folytán különleges körülmények között a „jobb” indult fejlődésnek. Azóta a torzulás magától terjedt. Elérkezve abba az állapotba, amelyben most van, így is folytatódik. Ha bármely új fajta vírus, vagy élő dolog későbbi időpontban keletkezik, csak úgy tud fennmaradni ha a már megévő élő anyagokkal „táplálkozik”. Azaz magának is ugyanilyen fajta anyagból kell lennie.

A jobb oldalas molekulák számának megmaradására nincs törvény. Miután már egyszer így indult el az élet, az csak fenntarthatja a jobb oldalas molekulák számának növekedését. Ily módon tehát az a feltevés, hogy az életjelenségek megsértik a fizikai törvények szimmetriáját nem igaz, sőt ellenkezőleg: az előzőekben elmondottak is a természet egyetemességéről és a Földön levő minden élő anyag végső közös eredetéről tanúskodnak.

52.5 Poláris és axiálvektorok

Menjünk most tovább. Megfigyelhetjük, hogy a fizikában egész sor helyen szerepelnek jobbkéz- és balkéz-szabályok. Ténylegesen, amikor a vektoranalízisről tanultunk, megismertük a jobbkéz-szabályt, amelynek segítségével helyesen kaphatjuk meg az impulzusmomentumot, a forgatónyomatékat, a mágneses teret stb. Valamely mágneses térben mozgó töltésre ható erő például: $F = qv \times B$. Felmerül a következő kérdés: adott körülmények között, amikor ismerjük F , v és B mennyiségeket, vajon nem elégséges-e ez az egyenlet a „jobb” definiálására? Ténylegesen, ha visszatekintünk, és megnézzük, honnan is származnak a vektorok, akkor azt látjuk, hogy a jobbkéz-szabály pusztán megállapodás kérdése. Az impulzusmomentum, szögsebesség stb. hasonló mennyiségek voltak. Valamilyen módon azonban mindegyik kapcsolatban van egy adott síkkal és így — a tér három dimenziója miatt — kapcsolatba hozhatók egy iránnyal, amely az adott síkra merőleges. Mi a két lehetséges irány közül a „jobb”-ot

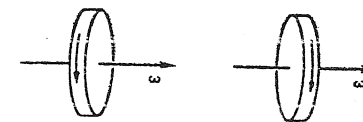


52.2 ábra. Térbeli szakasz és tükörképe

választjuk ki. Ha valamilyen démon beosonna az összes fizikai laboratóriumba, gondolatainkba, valamint az összes könyvbe, és ahol csak jobbkézszabály található, a „jobb” szót mindenütt „bal”-lal helyettesítené, akkor mindannyian egységesen „balkéz-szabályt” használnánk. Ha a fizika törvényei valóban szimmetrikusak, semmilyen különbséget sem szabadna észrevennünk.

Mutassuk be ezt egy példán! Kétfajta vektor létezik. Vannak „rendes” vektorok, mint például egy térbeli Δr távolságdarab (52.2 ábra). Berendezésünknek tükrözött megfelelőjében is megtalálhatjuk a választott pontokat, és ha a tükörképen is egy vektort húzunk közöttük, azt látjuk, hogy az egyik vektor tükörképe lesz a másiknak (52.2 ábra). A vektor megváltoztatja irányítását, éppúgy mint ahogyan az egész tér is „kifordítja belsejét”. Az ilyen vektorokat *poláris vektoroknak* nevezzük.

A vektorok másik, forgatásokkal kapcsolatos fajtájának azonban teljesen más a természete. Tételezzük fel például, hogy egy test térbeli forgást végez (52.3 ábra). Ha tükörből nézünk a forgó tárgyra, a forgás az eredeti forgás tükörképeként látszik. A „tükörforgás” reprezentálására ugyanazt a szabályt alkalmazzuk, mint amiben már korábban megállapodtunk: egy „vektor”, amely — a poláris vektorral ellentétben — tükrözés esetén *nem* változik, hanem a polárisvektorhoz és a tér geo-



52.3 ábra. Forgó kerék és tükörképe

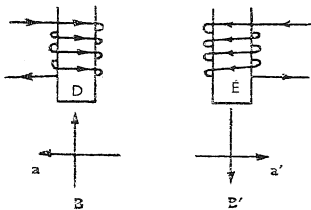
Figyeljük meg, hogy a „szögsebesség-vektor” irányát nem változtatja meg!

metriájához képest fordított irányítású. Az ilyen vektorokat *axiálevektoroknak* nevezzük.

Ha a tükrözési szimmetria törvénye helyes, akkor az egyenleteknek olyan alakúaknak kell lenniük, hogy ha minden egyes axiálevektor, minden egyes vektorszorzat előjelét megváltoztatjuk (ami a tükrözésnek felel meg), az egyenlőség fennáll. Az impulzusmomentumra vonatkozó $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ képlet leírásakor például minden rendben van, mivel ha balsodrású koordináta-rendszerre térünk át, megváltoztatjuk \mathbf{N} előjelét, de \mathbf{p} és \mathbf{r} nem változik. A vektorszorzat előjele ugyanis megváltozik, mivel a jobbkezes szabályt balkézes szabállyal kell helyettesítenünk.

Vegyünk egy másik példát. Ismeretes, hogy valamely mágneses térben mozgó töltésre $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ erő hat, de ha egy jobbsodrású koordináta-rendszerrel, egy balsodrásúra térünk át, mivel – mint ismeretes – \mathbf{F} és \mathbf{v} poláris vektorok, a vektorszorzat által megkövetelt előjelváltozást kompenzálnia kell \mathbf{B} előjel-változásának, amely azt jelenti, hogy \mathbf{B} -nek axiálevektornak kell lennie. Más szavakkal, ilyen tükrözés esetén, \mathbf{B} -nek $-\mathbf{B}$ -be kell átmennie. Ha tehát jobbsodrásúról balsodrásúra változtatjuk koordináta-rendszerünket, egyidejűleg a mágnespólusokat is északiról délire kell megváltoztatnunk.

Vizsgáljuk meg egy konkrét esetben, hogy is adódik ez. Tétélezzük fel, hogy van két, az 52.4 ábrán látható mágnesünk. Legyen az egyik mágnes tekercselése és a benne folyó áram iránya valamely adott módon rögzített. A másik mágnes legyen az elsőnek tükrösképe – tekercselése tehát más irányítású lesz. Minden ami a tekercs belsejében történik, tökéle-



52.4 ábra. Elektromágnes és tükrösképe

tesen fordított irányban megy végbe; úgy ahogy azt az ábrán feltüntetettük. A mágneses terek keltésére vonatkozó törvények alapján az adódik, hogy a mágneses terek olyan irányúak, mint ahogyan azok az ábrán láthatók. Ahol az egyik mágnesnél a déli pólus van, ott van a másiknál – mivel ennél az áram másik irányban folyik – az északi pólus, és a mágneses tér fordított. Látható tehát, hogy amikor jobbsodrású rendszerről balsodrásúra térünk át, az északi pólust ténylegesen déli pólusra kell átváltoztatnunk!

A pólusok felcserélése azonban még semmit sem jelent: az „északi pólus” és „déli pólus” elnevezések pusztán csak konvenciók. Beszéljünk inkább magáról a *jelenségről*. Tétélezzük fel, hogy az elektron a mágneses térben a papír síkjára merőleges irányban, tőlünk eltávolodva halad keresztül. Ekkor, ha felhasználjuk az erőre vonatkozó $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ képletet (ne feledkezzünk meg arról, hogy az elektron töltése negatív!), azt találjuk, hogy $-e$ fizikai törvényeknek megfelelően – az elektron a megjelölt irányban, útból *kitérül*. S ez a lényeg, ez a *fizika*!

Most végezzük el ugyanazt a kísérletet a tükrözött mágnessel, küldjünk elektront a mágneses téren keresztül a megfelelő irányban. Az elektronra ekkor fordított irányú erő hat. Az erőt ugyanazon törvény alapján számolva, a helyes eredményt kapjuk: a *mozgás* ugyanis az előzőnek tükrösképe lesz!

52.6 Melyik is a jobb kéz?

Érdekes tény, hogy bármely jelenség vizsgálata során mindig létezik két (ill. általában páros számú) jobbkezes szabály, és végeredményben a jelenségek mindig szimmetrikusnak látszanak. Ezért van az, hogy nem vagyunk képesek megkülönböztetni az északi pólust a délitől, és ugyanígy nem tudjuk megkülönböztetni a „jobb”-ot sem a „bal”-tól. Úgy tűnhet azonban, hogy valamely mágnes északi pólusát mégiscsak *meg tudjuk határozni*. Egy iránytű északi pólusa olyan valami például, amely Észak felé mutat. Természetesen

azonban ez ismét csak helyi tulajdonság, amely a Föld geográfiájával kapcsolatos, tehát nem lényeges. Valószínűleg mindannyian megfigyelték már, hogy az iránytűk északi vége valamilyen kékes színűre van befestve. Mindez azonban megállapodás dolga. Ha a mágnesnek olyan tulajdonsága volna, hogy elég alaposan megvizsgálva pl. „szakállt” látnánk nőni az északi póluson, de a délin nem, és ez általános szabály lenne, azaz ha a mágnes északi pólusának a délitől való megkülönböztetésére *valamilyen* egyedülálló mód állna rendelkezésre, akkor meg tudnánk mondani, hogy a két lehetséges eset közül melyikkel is állunk szemben. Ez egyúttal azt is jelentené, hogy a *tükrözési szimmetria törvénye nem érvényes*.

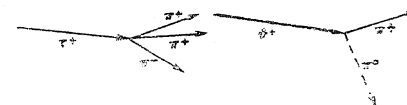
Hogy az egész problémát még világosabban illusztráljuk, képzeljük el, hogy egy „marlakóval” vagy valamilyen más, igen távol levő személlyel beszélgetünk rádióan, akinek semmilyen földi dolog mintáját nem tudjuk elküldeni, hogy azt megvizsgálja. Ha például el tudnánk juttatni hozzá egy fénynyalábot azt mondhatnánk: „Ez jobbra polarizált fény – figyelj meg a polarizáció forgásának az irányát”. Elküldeni azonban nem tudunk neki semmit, csak beszélni tudunk vele! Partnerünk ugyanis nagyon-nagyon távol van, valamely ismeretlen világban, s semmi olyat nem láthat, amit mi látunk. Nem mondhatunk például neki ilyesmit: „Nézz a Nagy Medvére; látod, hogyan rendeződnek el a csillagképet alkotó csillagok. „Jobb” fogalmán azt értjük, hogy...” Csak rádió segítségével beszélhetünk partnerünkkel.

Tétélezzük fel, hogy szeretnénk neki mindent elmesélni magunkról. Ezt először is a számok definiálásával célszerű kezdenünk, és azt mondjuk: „Tik, tik, *kettő*, tik, tik, tik, *három*...”. Ilyen módszerrel szavakat és fogalmakat is meg tudunk értetni vele. Bizonyos idő elteltével, amikor már jól megismerjük barátunkat, tétélezzük fel, hogy a következőt kérdezi: „Hogyan néztek ki?” Erre így kezdenénk személyleírásunkat: „1,75 m magasak vagyunk”. „Várj egy kicsit” – mondaná ő –, „mi az az 1,75 m?” Vajon meg

lehet-e magyarázni neki, hogy mit jelent ez? Természetesen meg! Azt mondjuk ugyanis: „A hidrogénatom átmérőjét ismered, nos hát a magasságunk 17 · 10⁹-szerese a hidrogénatom átmérőjének! Ez lehetséges, meg tudjuk határozni testmagasságunkat, le tudjuk írni alakunkat; elmesélhetjük neki, hogy végtagjaink vannak, végeiken öt „nyúlvánnyal” stb. Leírás alapján ismerősünk talán még modell is készíthet rólunk és azt mondja: „Ejha, egész csinos fickók lehettek. De mi van a belsőtökbelen?” Erre elmondanánk belső szerveink működését, alakját, s a szívhez érve így szólunk: „Most helyezd el a szíved a mell bal oldalába!” Mire ő elcsodálkozva azt mondja: „Hova, hova? A bal oldalba? Mi az?” Hogyan közölhetnénk tehát vele, hogy melyik a bal oldal ilyen lehetőségek között, anélkül, hogy valaha is küldtünk volna neki valamit, ami lehetővé tette volna számára megállapítani, hol is van tulajdonképpen a bal oldal?

52.7 A paritás nem marad meg!

A gravitációs törvények, az elektromosság és a mágnesség törvényei, a magerők mind ki-elégítik a tükrözési szimmetria elvét, tehát sem ezek a törvények, sem a belőlük levezethető összefüggések erre nem alkalmasak! Felfedeztek azonban egy jelenséget a természetben, amely sok részecske részvételével zajlik le, és amelyet *béta-* vagy *gyenge bomlásnak* neveznek. A gyenge bomlások egy 1954-ben felfedezett részecskével kapcsolatos jelensége furcsa talányt vetett fel. Volt egy három π -mezonra bomló töltött részecske, amit az 52.5 ábra vázol. A részecskét kezdetben bizonyos ideig τ -mezonnak nevezték. Ugyanezen az ábrán egy másik részecske is látható, amely



52.5 ábra. A τ^+ és a θ^+ részecske bomlásának sémája

két π -mezőre bomlik. A töltésmegmaradás törvénye miatt az egyik π -mezőnek semlegesnek kell lennie. Ezt a részecskét θ -mezőnek nevezték. Volt tehát egy három π -mezőre bomló τ - és egy két π -mezőre bomló θ -mező. Nemsokára azonban azt is felfedezték, hogy a τ - és a θ -részecske tömege csaknem egyenlő; pontosabban a két tömeg a kísérleti hibán belül egyenlő. Ezen kívül azt is megállapították, hogy a két részecske bomlási ideje is csaknem pontosan azonos, továbbá, hogy ezek a részecskék bármely reakcióban mindig ugyanolyan arányban keletkeznek, mondjuk 14%-ban τ - és 86%-ban θ -részecske jön létre.

Bárki józan ésszel nyomban felismeri, hogy ezeknek ugyanazon részecskéknek kell lenniük, s nem két különböző részecske keletkezik, hanem csak egy, amelynek kétfajta bomlási módja van. Ezért ennek a kétfajta módon elbomlani tudó részecskének ugyanaz az élet-tartama, és ugyanaz a keletkezési aránya (ez a mennyiség ugyanis egyszerűen a kétfajta bomlási mód arányával egyenlő).

A kvantummechanikai tükrözési szimmetria elvének segítségével be tudták azonban bizonyítani (hogy *milyen módon*, sajnos most nem tudjuk megmagyarázni), hogy a kétfajta bomlásnak *lehetetlen* egy és ugyanazon részecskétől származnia — egy részecske *nem képes* kétfajta módon elbomlani. A tükrözési szimmetria elvének megfelelő megmaradási törvénynek nincs klasszikus fizikai megfelelője. Ezt a specifikus kvantummechanikai megmaradási törvényt *paritásmegmaradásnak* nevezték. A paritásmegmaradás egyik eredménye vagy pontosabban a gyenge bomlások kvantummechanikai egyenleteinek tükrözéssel szemben mutatott szimmetriájából következik, hogy egy és ugyanazon részecske nem képes kétfajta módon elbomlani, úgyhogy itt valamilyen furcsa tömeg, élettartam stb. mennyiségek véletlen egybeesésével találkozunk. Mennél jobban vizsgálták azonban ezt a jelenséget, annál furcsábbnak tűnt az egybeesés, s fokozatosan erősödött az a gyanú, hogy a természet tükrözési szimmetriájának alapvető törvénye feltehetően nem igaz.

Lee és Yang más rokonbomlásokkal elvégzendő kísérleteket javasoltak annak eldöntésére, vajon ezekben az esetekben a paritásmegmaradás törvénye helyes marad-e? Az első ilyen kísérletet Wu kisasszony végezte el a Columbia egyetemen a következőképpen: a kobaltnak, amely mágneses anyag, van egy izotópja, amely elektronkibocsátással bomlik. Ennek az anyagnak az atomi „mágnesei” nagyon erős mágneses térben, igen alacsony hőmérséklet esetén (hogy a hőrezgések ne nagyon tudják mozgatni őket) „beállnak” a mágneses tér irányába. A kobaltatomok ebben az erős térben ily módon, mindannyian egy irányban állnak. Ezután elektronokat kibocsátva elbomlanak. Wu és munkatársai azt találták, hogy amikor az atomok mind beálltak a tér felfelé mutató **B** vektorának irányába, a legtöbb elektron lefelé repült ki.

Ha valaki nem nagyon járatos a fizika világában, annak egy ilyen megjegyzés nem sokat jelent. Akit azonban izgatnak a természet titkai, látja, hogy ez korunk egyik legdrámaibb felfedezése: amikor kobaltatomokat extrém erős mágneses térbe helyezünk, több bomlási elektron megy lefele, mint felfele. Ha elvégeznék a megfelelő „tükrözött kísérletet”, amelyben a kobaltatomok ellentétes irányba állnának be, akkor az elektronok *felfelé és nem lefelé* bocsátódnának ki; a *szimmetria eltűnne*.

Íme, a mágnesnek szakálla nőtt! Valamely mágnes déli pólusa tehát olyan, hogy a β -bomlásból származó elektronok inkább elirányulnak tőle, mint az északitól; azaz fizikai lehetőség nyílt arra, hogy a déli pólust megkülönböztessük az északitól.

Ezután sok más kísérletet is végeztek: megvizsgálták a π -mező μ -mezőre és neutrínóra, a μ -mezőnek elektronra és két neutrínóra, a Λ -hiperonnak protonra és π -mezőre való bomlását, a Σ -hiperonok bomlását és sok más bomlást. Csaknem mindazon esetben, ahol várni lehetett, azt találták, hogy a tükrözési szimmetria elve *nem érvényesül!* A tükrözési szimmetria törvénye, tehát a fizikában — ezen a szinten — alapvetően helytelen.

Röviden szólva, kozmoszbeli ismerősünk-

nek igenis meg tudjuk mondani, hova kell a szívét heyeznie! Azt mondjuk ugyanis neki: „Figyelj ide! Készíts mágneset, tegyél rá tekercset, és bocsáss áramot keresztül rajta. Ezután végy bizonyos mennyiségű kobaltot és hűtsd le igen alacsony hőmérsékletre. A berendezést állítsd be úgy, hogy az elektronok a mi modellünk lábától a feje felé mutató irányba haladjanak, ekkor a tekercsen átfolyó áram iránya megmondja neked, hogy melyik oldalt nevezük mi jobbnek és melyiket balnak.”

A kutatók egész sor más tulajdonságot is megjósoltak. Kiderült például, hogy a kobalt-atom spinje (impulzusmomentuma) a bomlás előtt \hbar egységekben öt egységnyi, míg bomlás után négy. Ennek a hiányzó impulzusmomentumnak a felét elviszi az elektron, a másik felét — a neutrino! Nem nehéz belátni, hogy az elektron spinjének az elektronmozgásirányába kell mutatnia, hasonlóképpen a neutrino spinjének szintén a saját mozgásirányába. Úgy tűnt tehát, mintha az elektron jobbról-balra pörögne. Ezt szintén igazolták, mégpedig épp Caltechen. Boehm és Wapstra kísérletileg bebizonyították, hogy az elektron valóban főleg balra forog. (Mások több, ennek ellentmondó kísérletet is végeztek, de ezek rosszaknak bizonyultak!)

A következő feladat a paritásértés törvényének a megtalálása volt. Van-e valamilyen szabály, amely megmondja, hogy ennek milyen erősnek kell lennie? Van, s ez a következő: a paritásmegmaradás törvénye csak a nagyon lassú, gyenge bomlásoknak nevezett reakciókban sérül meg, s ekkor a szabály az, hogy a spinnel rendelkező részecskék, mint az elektron, neutrino stb. túlnyomórészt balra forogva bocsátódnak ki. Ez mintha az előbb említett „torzítás” törvénye lenne: összekapcsolja a sebesség poláris vektorát az impulzusmomentum axiálevktorával, és azt mondja ki, hogy az impulzusmomentum vektora sokkal valószínűbben mutat a sebességvektor irányával ellenkező, mint azzal megegyező irányba.

Nos ház ez a törvény! Valójában ma még nem értjük a „miértjeit” és „azértjeit”. Miért éppen ez a helyes törvény, mi az alapvető oka és milyen kapcsolatban van más jelenségek-

kel? A természet aszimmetrikus volta annyira meglepő, hogy nem is tudtuk hozzászokni a gondolathoz, és nem is értjük az összes többi szabályra vonatkozó jelentőségét. A probléma azonban érdekes, modern és megoldatlan, ezért most látszik a legalkalmasabbnak, hogy néhány vele kapcsolatos kérdést megtárgyaljunk.

52.8 Antianyag

Miután látjuk, hogy egy szimmetria megsérül, az első teendőnk az, hogy nyomban visszalapozzunk, és áttekintjük az ismert vagy feltételezett szimmetriák táblázatát és megnezzük, vajon megsérülhet-e valamely más szimmetria is. A táblázatban feltüntetett műveletek közül még nem említettünk egyet, pedig kérdésünk elsősorban erre vonatkozik, s ez az anyag és az antianyag közötti összefüggés. Dirac megjósolta, hogy az elektronon kívül egy másik részecskének, a pozitronnak is léteznie kell (amelyet a Caltechen Anderson fedezett fel), amely szükségképpen az elektronnal kapcsolatos. A két részecske összes tulajdonsága bizonyos korrespondencia szabályoknak tesz eleget, az energiák és a tömegek egyenlők, a töltések ellentétesek, de mind egyiknél fontosabb, hogy ha egymással összeütköznek, megsemmisíthetik egymást (anni hialódnak) és össztömegük energia — mondjuk γ -sugarak formájában — felszabadul. A pozitront az elektron *antirészecskéjének* nevezik, és a felsorolt tulajdonságok valamely részecskének és antirészecskéjének a jellegzetességei. Dirac megfontolásaiból nyilvánvaló, hogy a világ összes többi részecskéjének is kell, hogy antirészecskéje legyen. Például, a protonnak antiprotonja van, amelyet \bar{p} -sal szimbolizálunk. A \bar{p} -nak negatív elektromos töltésűnek és ugyanakkora tömegűnek kell lennie, mint a protonnak stb. A legfontosabb tulajdonság azonban az, hogy ha a proton és az antiproton összeütköznek, megsemmisíthetik egymást. Ezt azért hangsúlyozzuk, mert sokan nem értik meg a következő kijelentésünket: létezik a neutron antirészecskéje — az anti-

neutron — is. Azt mondhatják: „A neutron semleges, *hogyan* lehet akkor ellentétes töltése?” Az „anti”-szabály nem jelenti feltétlenül azt, hogy a részecskéknél ellentétes töltésük van, hanem azt, hogy egész sor olyan tulajdonsága, amelyek közül néhány ellentétessé válik. Az antineutront a következőképpen lehet a neutrontól megkülönböztetni: ha két neutron összeütközik, az ütközés után is megmarad a két neutron, de ha egy neutron antineutronnal ütközik, akkor megsemmisítik egymást, miközben nagy mennyiségű energia szabadul fel és különböző π -mezonok, γ -kvantumok keletkeznek.

Ha antineutronok, antiprotonok és antielektronok léteznek, akkor elvben antiatomokat is létre lehet hozni. Ezt ugyan eddig még nem csinálták*, de elvben lehetséges. Például, egy hidrogénatom közepén egy proton helyezkedik el, körülötte pedig egy elektron kering. Képzeljük most el, hogy egy antiprotonot hozunk létre egy körülötte keringő pozitronnal. Kérdés: vajon fog-e ez keringeni? Természetesen, mivel — az antiproton elektromosan negatív, az antielektron viszont elektromosan pozitív, úgyhogy a proton—elektron esetnek megfelelő módon fogják egymást vonzani — a tömegek ugyanazok. A fizika szimmetriáinak egyik alapelve éppen ebben áll: az egyenletek láthatóan azt mutatják, hogy ha lenne, mondjuk egy rendes anyagból készült óra, és egy ugyanolyan, de antianyagból készült másik óra, akkor azok teljesen egyformán járnának. (Ha a két órát összeírtenénk, természetesen megsemmisítenék egymást; ez azonban már egy teljesen más kérdés.)

Nyomban felvetődik a következő kérdés: rendes anyagból is készíthetünk órát — egy „jobbos” és egy „balos”. Például készíthetünk valamilyen szerkezetet, amelyik kobaltot, mágneseket és elektrondetektort tartalmaz, amely jelzi és számolja a β -bomlásból származó elektronokat. Mindannyiszor, ami-

* A könyv megírása óta azonban a hidrogén két antizotópját — az antideutériumot és az antitriciumot — már létrehozták. (Megjegyzés a szovjet kiadásból.)

kor a berendezés egy elektront regisztrál, a másodpercmutató tovább mozog. Mivel a tükörkép-óra kevesebb elektront kap, nem jár majd ugyanolyan sebességgel. Így nyilvánvalóan tudunk készíteni két órát úgy, hogy a „balos” óra ne egyezzen meg a „jobbos”-sal. Készítsünk tehát normál anyagból egy órát, amelyet standard, vagy „jobbos” órának nevezünk, és készítsünk ugyanilyen anyagból egy „balos” órát is. Általában, mint ezt épp az előbb állapítottuk meg, a két óra *nem* fog egyformán járni; az említett híres fizikai felfedezés előtt viszont azt gondolták, hogy igen. Azt is feltételezték, hogy az anyag és az antianyag szintén egyenértékű. Azaz, ha antianyagból, a rendes anyagból készült „jobbos” órával megegyező alakú „jobbos” órát készítenénk, akkor a két óra egyformán járna. Ha pedig „balos” órát készítenénk, akkor az a „balos” rendes anyagból készült órával járna egyformán. Kezdetben tehát azt gondolták, hogy *mind a négy* óra egyformán működik majd. Ma már természetesen tudjuk, hogy a normál anyagból készült „jobbos” és „balos” óra nem ugyanaz és feltehetően ezért az antianyagból készített „jobbos” és „balos” óra ugyancsak nem az.

Ezek után nyilvánvalóan adódik az a kérdés, hogy melyik órapár — ha egyáltalán van ilyen — jár egyformán? β -bomlási kísérletek, amelyekben pozitronok vannak elektronok helyett, arra utalnak, hogy a kapcsolat éppen a következő: a „jobbos” anyag pontosan ugyanúgy viselkedik, mint a „balos” antianyag.

Azért végső soron a jobb-bal szimmetria ténylegesen továbbra is fennáll! Ha egy „balos” órát készítenék, de anyag helyett antianyagból, akkor ugyanúgy jár, mint a rendes anyagból készült „jobbos” óra. Lényegében tehát ahelyett, hogy két független szabályt tüntetnénk fel a szimmetriatáblázatunkban, egy új kombinált szabályt kapunk, amely azt mondja ki, hogy a „jobbos” anyag szimmetrikus a „balos” antianyaggal.

Ily módon, ha kozmoszbeli ismerősünk antianyagból lenne, és mi tanácsokat közölnénk vele „jobbos” modellünk elkészítéséhez,

akkor ő magától értetődően mindent fordítva készítené! Kérdés, mi lenne, ha a sok-sok üzenetváltás után mi, és távoli barátunk azt gondolnánk, hogy úrhajót építünk, és találkozzunk valahol félúton a világűrben? Természetesen, miután már egymást előzetesen kioktattuk szokásainkról stb. egymás felé sietnénk, hogy kezét rázzunk. De ha ő a bal kezét nyújtaná felénk — nagyon kellene vigyáznunk!*

52.9 Sértett szimmetriák

Most áttérünk arra a kérdésre, hogy hogy vélekedjünk azokról a törvényekről, amelyek csak *közéltőleg* szimmetrikusak? A csodálatos dolog, hogy a legfontosabb „erős” fizikai jelenségek széles tartományában, továbbá a „gyengékében”, mint pl. a gravitáció, e jelenségekre vonatkozó összes törvény szimmetrikusnak bizonyul. Másrésztől azonban egy kis gyengécske effektus ezt tagadja, és azt mondja: „Nem, nem minden törvény szimmetrikus!” De hogyan lehet az, hogy a természet csaknem teljesen, de azért mégsem tökéletesen szimmetrikus? Mít lehet ezzel tenni? Először is nézzük meg, létezik-e más hasonló természetű példa? Igen, méghozzá nem is egy. Például a proton-proton, a neutron-neutron és a neutron-proton közötti erő nukleáris része tökéletesen azonos. Ez egy újfajta szimmetria — a *magerők szimmetriája*: mag-kölcsönhatásokban a proton és a neutron egymást teljesen helyettesíthetik. Nyilvánvaló azonban, hogy ez nem általános szimmetria, hiszen két proton között bizonyos távolságon elektromos taszítás lép fel, ami neutronok között nem létezik.

* Ma már tudjuk, hogy a „jobbos” anyag és a „balos” antianyag között *nem minden esetben áll fenn szimmetria*. A kombinált szimmetria szintén csak közéltő szimmetriának bizonyult. Ma még nem tudjuk, *hogyan és miért* történik ez így, egyelőre csak feltevéseink vannak. Teljesen lehetséges azonban az, hogy amikor távoli barátunkkal találkozunk, addigra már kideríthetnénk, vajon olyan anyagból való-e, mint mi, vagy antianyagból. (Megjegyzés a szovjet kiadásból.)

Ezért általában nem érvényes az, hogy a proton *mindig* helyettesíthető neutronnal; ez csak egy jó közelítés. Miért *jó*? Azért, mert a magerők sokkal erősebbek az elektromos erőknél! Ez tehát szintén „közéltő” szimmetria. Hasonló példák vannak más területeken is.

Gondolkodásunk mindig hajlik arra, hogy a szimmetriát tökéletesnek tekintsük. Ez emlékeztet a görögöknek a kör tökéletességéről való elképzelésére. Számukra valósággal szörnyűnek tűnt az az elképzelés, hogy bolygók pályái esetleg nem kör alakúak, hanem csak „majdnem” körök.

Egy kör és egy közelítő kör közötti különbség azonban nem csekély, hanem — legalábbis, ami a gondolkodást illeti — lényegbevágó. A tökéletességet és a szimmetriát mintegy a kör jelképezi, s abban a pillanatban, ahogy a kör a legcsekélyebb mértékben is deformálódik, vége a szimmetriának és a tökéletességnek. Megkérdezhetjük azonban, hogy a bolygók pályái miért csak *közéltőleg körök*? Ez már nehezebb kérdés! A bolygók valódi pályájának — általában — ellipszisnek kell lenniük, de az évmilliók alatt a dagályt keltő erők stb. miatt csaknem szimmetrikussá alakultak. Csak az a kérdés, vajon esetünkben is hasonló-e a probléma? Ha a bolygópályák tökéletesen kör alakúak lennének, akkor semmit sem kellene megmagyarázni — a dolog egyszerű lenne. Mivel azonban ezek csak közéltőleg körök, egy sor kérdés magyarázatra szorul. A probléma nagy dinamikai feladattá alakul át, u. i. azt kell megmagyarázni, hogy a pályák miért válnak közéltőleg szimmetrikussá a dagályt keltő erők stb. hatására.

Célunk tehát annak megmagyarázása, honnan származik a szimmetria? Miért csak közéltőleg szimmetrikus a természet? Senki-nek sincs ezekről a kérdésekről halvány fogalma sem. Az egyetlen dolog, amelyet e problémánkkal kapcsolatban javasolni tudunk a következő: Japán Neiko városában van egy kapu, amelyet a japánok az ország legszebb kapujának tartanak. Ezt abban az időben építették, amikor a kínai művészet nagy befolyást gyakorolt a japán művészetre. A kapu rendkívül kidolgozott, oromzatok, gyönyörű

faragások, nagyszámú oszlop, sárkányfej és hercegek pillérekbe vésett alakjai láthatók rajta. Ha azonban valaki figyelmesen megvizsgálja, azt látja, hogy az egyik pillér mentén a finom és bonyolult díszek között néhány kis díszítőelem fordítva van kifaragva, különben a díszítés teljesen szimmetrikus. Ha valaki megkérdezi, miért van ez így, válaszként a hagyományt idézik: azért van az a néhány díszítőelem fordítva kifaragva, nehogy az iste-

nek féltékenyek legyenek az ember tökéletességére. A hibákat tehát céltudatosan csinálták, nehogy kihívják az emberi lényekre az istenek féltékenységét és haragját.

Mi szeretnénk megfordítani ezt a gondolatot, és azt mondjuk, hogy a természet közelítő szimmetriájának az igazi magyarázata a következő: a természeti törvények csak közelítően szimmetrikusak, nehogy féltékenyek legyenek a természet tökéletességére!

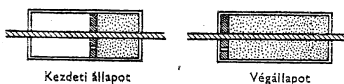
Példatár

39. fejezet

39.1 Ideális gáz adiabatikus összenyomása folyamán: $pV^\kappa = \text{konst.}$ (39.14 egyenlet). Másrészt ismeretes, hogy bármely feltétel mellett igaz a $pV/T = \text{konst.}$ összefüggés. Ezeket az összefüggéseket felhasználva vezessük le, hogy adiabatikus összenyomás esetén p és T , valamint V és T milyen kapcsolatban vannak.

39.2 Egy kerékpárgumi belsejében 20°C (293 K) hőmérséklet és 1 bar nyomás van. Egy pumpa segítségével felpumpájuk a gumit, amelyben ekkor $3,5\text{ bar}$ nyomás lesz. Ha κ értéke levegőre $1,40$, mekkora lesz a levegő hőmérséklete, amikor az a pumpából kiáramlik? A pumpa falának átadott hőveszteségek elhanyagolhatók.

39.3 Két azonos méretű tartály félig héliumgázzal van megtöltve, a tartályok másik felében viszont légüres tér van. Az egyes tartályokban a



két féltért dugattyúk választják el, amelyekben kis zárócsap van (lásd az ábrát). Két kísérletet végzünk el:

- Kinyitjuk az egyik tartály dugattyújának csapját, így a gáz a másik oldalra is beáramolhat. Ez addig tart, amíg csak ki nem alakul az egyensúly. A dugattyút ekkor nagyon lassan a tartály egyik végébe toljuk.
- A másik tartály dugattyúját nagyon lassan a tartály légüres vége felé toljuk, s ezután nyitjuk ki a csapot.

Hasonlítsuk össze a két tartályban levő gáz végállapotait. (Hanyagoljuk el a hőveszteségeket és a sűrűlőást.)

39.4 a) Képzeljünk el valamely függőleges gáz- vagy folyadékoszlopot, amelynek sűrűsége a magassággal változik. Mutassuk meg, hogy a nyomás mint a magasság függvénye a $dp/dh = -\rho(h)g$ alakú differenciálegyenletet követi.

b) Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet M moláris tömegű gázatmoszféra esetére, amelyben a hőmérséklet h függvényében állandó.

39.5 Azt az atmoszférát, amelyben a nyomás és a sűrűség a magasság függvényében eleget tesz a $p\rho^{-\kappa} = \text{konst.}$ összefüggésnek, adiabatikus atmoszférának nevezik.

a) Mutassuk meg, hogy egy ilyen atmoszféra hőmérséklete a magassággal lineárisan csökken, és határozzuk meg az arányossági tényezőt. Ezt a hőmérsékleti gradienst *adiabatikus léghőmérsékleti gradiensnek* nevezik. Számítsuk ki értékét a földi atmoszférára vonatkozóan.

b) Az energiával kapcsolatos megfontolásokon alapuló érveléssel mutassuk meg, hogy az adiabatikus léghőmérsékleti gradiensnél kisebb, ill. nagyobb hőmérsékleti gradienssel rendelkező atmoszféra konvekcióval szemben stabil, ill. instabil lesz.

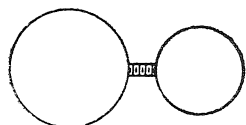
39.6 Egy lyukmentes, sűrűlőás nélküli dugattyúval rendelkező henger $1,01 \cdot 10^5\text{ Nm}^{-2}$ nyomáson 1 m^3 egyatomos gázt ($\kappa = 5/3$) tartalmaz $1,01 \cdot 10^6$. A hőmérsékletet állandónak tartva a gázt lassan

nyomjuk össze, míg végső térfogata $0,4 \text{ m}^3$ nem lesz. Mennyi munkát kell végezni az összenyomás folyamán?

39.7 Az ugyanolyan kezdeti V_0 térfogatú és ugyanolyan kezdeti p_0 abszolút nyomású A és B gázmintát hirtelen, adiabatikusan a kezdeti térfogat felére nyomjuk össze. Hogyan függ össze a gázminták végállapotbeli nyomása a kezdeti nyomásértékkel, ha $\kappa_A = 5/3$ (egyatomos gáz) és $\kappa_B = 7/5$ (kétatomos gáz)?

39.8 Számítsuk ki a két gázminta összenyomásához szükséges munkák arányát!

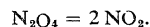
39.9 Két 200 cm^3 , ill. 100 cm^3 térfogatú gömb alakú edényt rövid cső köt össze, amelyben félig áteresztő anyagból készült fal van. A két edény közötti fal lehetővé teszi ugyan a nyomáskiegyenlítődést, de a hőmérséklet-kiegyenlítődést nem. Amikor a rendszer 27°C -os, $1,01 \text{ bar}$ ($= 1,01 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^{-2}$) nyomású oxigént tartalmaz, lezárjuk.



Ezután a kisebb edényt 0°C -os jégfürdőbe, a nagyobb pedig 100°C -os gőzfürdőbe helyezük. Mekkora lesz a végső nyomás a rendszer belsejében? Hanyagoljuk el az edények hőmérsékleti tájolását.

39.10 Legyen egy 50 l -es és egy 15 l -es tartály rövid nyomáskiegyenlítő szeleppel ellátott csövön át összekötve. A szelep csak akkor teszi lehetővé, hogy a gáz a nagyobb tartályból a kisebbbe áramoljon, ha a nagyobb tartályban a nyomás $1,17$ barral nagyobb, mint a kisebb tartályban. 17°C hőmérsékleten a nagyobb tartály légköri nyomású gázt tartalmaz, a kisebbben viszont légüres tér van. Mekkora a nyomás a kisebb tartályban, ha mindkét tartály hőmérséklete egyaránt 162°C ?

39.11 Normális hőmérsékleten a nitrogéntetroxid a következő módon parciálisan disszociál nitrogén-dioxidá:



Egy 250 cm^3 térfogatú, légüres palackba 0°C -on $0,90 \text{ g}$ folyékony N_2O_4 -et töltünk. Amikor a palack-

ban a hőmérséklet 27°C -ra emelkedik, a folyadék teljesen gőzzé válik, és a nyomás $1,38 \text{ bar}$ lesz. Számítsuk ki, hogy a nitrogéntetroxidnak hány százaléka disszociált!

39.12 Valamely mozgatható dugattyúval lezárt, szigetetlen tartályban levő egy molnyi ideális egyatomos gáz nyomása és térfogata kezdetben, azaz $-T_1 = 27^\circ\text{C}$ -on: p_1 és V_1 . Lassú melegítés során $8,31 \text{ Wh}$ energiát közlünk vele, és ugyanakkor lehetővé tesszük, hogy állandó nyomáson kiterjedjen. Eközben tehát a gáz az új p_2 , V_2 és T_2 -vel jellemzett állapotba megy át. A gáz új energiataralma, valamint a kiterjedés során végzett munka kiszámítása révén határozzuk meg

- T_2 , és a
- V_2/V_1 mennyiségeket.

40. fejezet

40.1 Termikus egyensúlyban levő gázban, egy adott felületnek ütköző molekulák mekkora hányadának lesz

- az átlagosnál nagyobb,
- az átlagosnál háromszor nagyobb kinetikus energiája?

40.2 Valamely anyagnak állandó térfogaton vett hőkapacitása molonként C_V . Ez az az energiamennyiség, amely egy molnyi anyag hőmérsékletének egy fokkal való emeléséhez szükséges, miközben a térfogatot állandónak tartjuk. Mekkora az állandó térfogaton vett moláris hőkapacitás, ha

- ideális egyatomos gázt és
- ideális kétatomos gázt vizsgálunk?

40.3 Vékony, állandó A keresztmetszetű csövön v sebességgel normál hőmérsékletű és nyomású levegő áramlik át. Amint egy elhanyagolható ellenállást jelentő dróthálón keresztülhalad, felmelegszik. Az energiabetáplálás $W \text{ Ws}$. A levegő a csövet v sebességgel hagyja el. Írjuk fel a tömeg-, az energia- és az impulzusmegmaradásra vonatkozó egyenleteket, és segítségével határozzuk meg:

- v -t,
- a végső T hőmérsékletet.
- az F tolóerőt.

40.4 Az előbbi példa tanulságai alapján „tervezzük meg” repülőgép motorját, ha a motor másodpercenként 100 kg levegőt, és $2,00 \text{ kg}$ petróleumot fogyaszt. A petróleum égéshője kb. $4,65 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$. Mi teheti megbízhatatlanná számításunk eredményét?

40.5 A Maxwell-féle eloszlási törvény általános alakja; $dN/dv = A v^2 e^{-bv^2}$, amelyet $v = x^2 e^{-x^2}$ alakba lehet átranzformálni.

- Ábrázoljuk ezt az egyenletet a $0 \leq x \leq 3,0$ intervallumban, hogy megmutassuk, milyen mértékben nyomja el az exponenciális függvény a növekvő $y = x^2$ görbét!
- Határozzuk meg a maximum ordinátáját!
- Vizsgáljuk meg, hogy a görbénk alatti terület mennyire közelíti meg az

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

integrált.

40.6 Az $n = n_0 e^{-mgh/kT}$ „barometrikus magasságformulában” a $kT/mg = RT/Mg = h^0$ mennyiség (ahol M a moláris tömeg) „skalámagasságnak” nevezzük. Számítsuk ki ennek a mennyiségnek az értékét a Föld és a Nap atmoszférájára vonatkozóan, ha adottak a következő mennyiségek: $M_{\oplus} = 29$, $T_{\oplus} = 300 \text{ K}$, $u_{\odot} = 1,5$, $T_{\odot} = 5500 \text{ K}$, $g_{\odot} = 2,7 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-2}$.

41. fejezet

41.1 Számoljuk ki és jegyezzük meg

- azt a T hőmérsékletet, amelyen $kT = 1 \text{ eV}$,
- kT értékét szobahőmérsékleten, eV-ban,
- 1 eV kvantumugrásnak megfelelő foton hullámhosszát.

41.2 A feketetest-sugárzásra vonatkozó eloszlási törvény:

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}.$$

ω helyett az $x = \hbar\omega/kT$ változót használva mutassuk meg, hogy

- az összes frekvenciára integrált teljes sugárzási intenzitás arányos az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával;

b) az az ω_m frekvencia, amelynél $I(\omega)$ maximum, arányos az abszolút hőmérséklettel.

41.3 Számítsuk ki valamely 2000 K , ill. 4000 K hőmérsékletű feketetest által kibocsátott $0,31 \mu\text{m}$ hullámhosszú fény relatív intenzitását.

42. fejezet

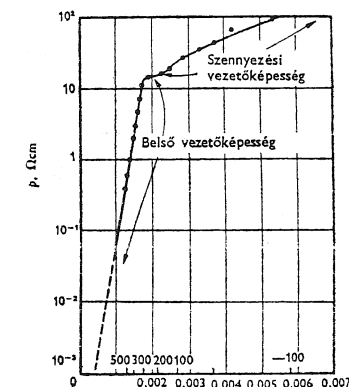
42.1 Aktiválási energiákat, párolgási, keletkezési ill. bomlási hőket stb. általában J/g mol vagy eV/atom egységekben szokás megadni. Hány J/g mol egyenlő 1 eV/atom mal?

42.2 Ábrázoljuk a vízgőz sűrűségét $1/T$ függvényében féllogaritmus papíron. (Az adatok pl. a Pattantyús kézikönyvben találhatóak meg.) A grafikon alapján határozzuk meg a víz párolgási hőjét. Eredményünket ellenőrizzük a táblázatban közölt értékkel.

42.3 A $0 \dots 300^\circ\text{C}$ tartományban a higany párolgási hője csak 3% -kal változik és átlagos értéke kb. $0,61 \text{ eV/atom}$. Mekkora hibát vétünk a 0°C -os higany gőzsűrűségének kiszámítása során, ha a párolgási hőnek helyesen 0°C -nál vett értéké helyett a 300°C -on vett értékével számolunk?

Véssük emlékeztünkbe: ha a kitevő értéke nagy, akkor a kitevőben néhány százaléki eltérés is nagy hibát okozhat!

42.4 Az ábrán a csaknem tiszta szilikon ellenállást a hőmérséklet függvényében ábrázoltuk. Vé-



gezzünk kvantitatív számítást az ebben az anyagban 300 °C hőmérséklet felett és alatt folyó áramot illetően.

43. fejezet

43.1 Egy oxigénmolekula „átmérője” durván 0,3 nm. Becsüljük meg normál hőmérsékletű és nyomású oxigénre vonatkozóan a közepes ütközési szabad úthosszt és az ütközések közötti átlagos időt.

43.2 Valamely tartályban 10^{24} molekula van olyan gázból, amelynek közepes szabad úthossza l . A tartályban levő bármelyik molekulára vonatkozóan, mekkora L' úthossznál lesz 50%-nál kisebb valószínűsége annak, hogy a molekula L -nél nagyobb távolságot tegyen meg, anélkül, hogy a következő ütközését elszenvedné?

43.3 Ha valamely anyagban a hőmérsékleti gradiens zérustól különbözik, akkor a hőmérsékleti gradienssel arányos energiaáram lép fel. (A konvektív áramot elhanyagoljuk.) Az egységnyi felületre és egységnyi hőmérsékleti gradiensre redukált a arányossági tényezőt hővezetőképességnek nevezik. $dW/dt = aA dT/dx$. Mutassuk meg, hogy ha konvektív áram nem lép fel, akkor az illető gáz hővezetőképessége:

$$a = kn_0v/(\kappa - 1) = kv/(\kappa - 1)\sigma.$$

Tanácsunk: értelmezzük a hővezetést valamely síktól egy közepes szabad úthosszra eső U belső energiának a sík egyik oldaláról a másikra való átvitelékként, mint ahogyan azt a diffúzióanalízis tettük.

43.4 Amikor valamely folyadékban sebességgradiens lép fel oly módon, hogy a sebesség az áramlás irányára merőlegesen, a távolsággal változik, viszkózus áramlásról beszélünk. Gázban ez a jelenség valamely síktól kb. egy közepes szabad úthosszra eső impulzusnak a síkon keresztüli átviteléből származik. Ha az áramlás x irányú és y irányban a v_x -nek van gradiense, akkor az egységnyi felületre eső viszkozitási erő az y -ra merőleges síkban:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv_x}{dy}.$$

Mutassuk meg, hogy valamely gázra vonatkozó viszkozitási együttható közelítőleg:

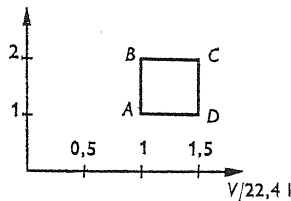
$$\eta = n_0 v m l = v m / \sigma.$$

43.5 Figyeljük meg, hogy valamely gáz hővezetése és viszkozitása egyaránt független a nyomástól. Okoskodjunk ki a két, egymástól D távolságra levő T és $T + \Delta T$ hőmérsékletű felület közötti energiaátadásra vonatkozó képletek megfelelő módosítását, ha $l \gg D$. Tegyük meg ugyanezt két ugyanilyen, egymáshoz képest u és $u + \Delta u$ sebességgel mozgó felületek közötti impulzusátadásra vonatkozóan is.

43.6 Legyen az A és B gáz hőmérséklete T_0 , sűrűségük pedig ρ_A , ill. ρ_B . Jelölje egy adott ion A gázban megfigyelt mozgékonyaságát μ_A , a B gázban való mozgékonyaságát pedig μ_B . Az ionok mekkora mozgékonyaságát várnánk ezen gázok keverékében $\rho_A + \rho_B$ sűrűség és T_0 hőmérséklet esetén?

44. fejezet

44.1 Ideális gázt, melyre $\kappa = 4/3$, egymás után két úton viszünk az A állapotból (300 K, 2 bar, 22,4 l térfogat) a C állapotba (900 K, 2 bar, 33,6 l térfogat). A két utat ABC , ill. ADC jelöli (l. az ábrát).



- a) Mutassuk meg, hogy az entrópia megváltozása mindkét úton ugyanakkora.
b) Számítsuk ki ezt a megváltozást.

44.2 A p - V diagramon ábrázolt T_1 és T_2 , valamint (p_a, V_a) (p_b, V_b) közötti ideális $abcd$ Carnot-ciklust ábrázoljuk a megfelelő $ABCD$ pontokkal

egy hőmérséklet-entrópia diagramon (l. a 44.6 ábrát).

44.3 Egy modern hőerőműben túlhevített gőzt használnak. A gőzgenerátorban a hőmérséklet 600 °C. A gőzkondenzátor hűtésére használt folyóvíz hőmérséklete 20 °C. Mekkora egy ilyen erőmű maximális hatásfoka?

44.4 Egy figyelmetlen kísérletező a hét végén nyitva felejt a héliumtartály csapját. A kezdetben 200 bar nyomású, 20 °C-os gáz lassan, izotermikusan áramlik ki a tartályból. Mekkora a gáz kg-onkénti entrópiaváltozása?

45. fejezet

45.1 A Nap közelítőleg egy 5700 K hőmérsékletű feketetesthez hasonlóan sugárzik. A Naptól egy csillagászati egység távolságban egy tökéletesen befektetett rézgolyót napfény sugárzásnak tesszünk ki. Milyen lesz a golyó egyensúlyi hőmérséklete? (A napátmérő a Földről 0° 50' szög alatt látszik.)

45.2 A napsugarak merőlegesen esnek egy nagy, fekete kövekkel borított területre az egyenlítő környékén. Ha e felület feketetestként sugároz, milyen hőmérséklet alakul ki rajta? (A napállandó: 1395 W/m².)

45.3 r sugarú, T hőmérsékletű testet R sugarú, mindkét oldalon fekete vékony gömbhéj övez. Számítsuk ki, hogy ez a sugárzásvédő burok mekkora F fényerővel csökkenti a test lehűlési sebességét. (A gömbhéjon belüli teret légüresnek tekintjük, s így hővezetési veszteségek nincsenek.)

45.4 A Nap középpontjának a sűrűsége kb. 80 g/cm³, hőmérséklete kb. $13 \cdot 10^6$ K; anyaga csaknem teljesen protonokból és elektronokból áll. Számítsuk ki, mekkora a gáznyomás és a sugárzási nyomás a Nap középpontjában.

45.5 A víz párolgáshője kb. $2,44 \cdot 10^8$ J/kg, és a gőzsűrűség 100 °C-on 0,598 kg/m³. Határozzuk meg a Clausius – Clapeyron-egyenletből, hogy mi-

lyen sebességgel változik a forrási hőmérséklet a magasság növekedésével, tengerszinthez közeli magasságokban °C/km egységekben. Tételezzük fel, hogy a levegő hőmérséklete 300 K.

45.6 Mutassuk meg az ideális gázra vonatkozóan, amelynek a belső energiája csak T -től függ, hogy az állandó nyomás és állandó térfogat esetén vett moláris fajhők közötti különbség egyenlő az R gázállandóval: $C_p - C_v = R$.

45.7 0 °C-on a telített vízgőz fajlagos térfogata 206 m³/kg. Mekkora a párolgáshő értéke ezen a hőmérsékleten J/kg egységekben? (A dp/dT -t táblázatok alapján határozzuk meg, majd számítsuk ki L -t, és hasonlítsuk össze a táblázatban megadott értékkel.)

45.8 Egy tárgy a felületére eső összes sugárzás bizonyos A hányadát elnyeli, a többit pedig visszaveri. Mutassuk meg, hogy T hőmérséklet esetén a tárgy felületegységenként $A\sigma T^4$ mennyiségű sugárzást bocsát ki.

- 45.9 a) Termodinamikai megfontolás alapján mutassuk meg, hogy ha valamely anyag fagyás közben kiterjed, fagyási hőmérsékletének növekvő nyomás esetén csökkennie kell.
b) Becsüljük meg, hogy milyen alacsony a jégpálya jegének a hőmérséklete, amelyen még korcsolyázni lehet.

47. fejezet

47.1 Határozzuk meg a hang azonos hőmérsékletű héliumban és a hidrogénben mért sebességének arányát.

- 47.2 Két egyforma hosszú sípot
a) a folyékony levegő hőmérsékletére (–180 °C) hűtött levegővel, és
b) meleg levegővel

működtetünk. Az egyik éppen egy oktávval ad magasabb hangot, mint a másik (a frekvencia kétszeres). Mekkora annak a levegőnek a hőmérséklete, amellyel a b) sípot működtetjük?

47.3 Ha valaki héliumot lélegzik be és beszél, hangja természetellenesnek és igen magasnak tű-

nik. Vizsgáljuk meg, hogy ha a kedves Olvasó összes rezonáló ürege („az Önök fejének az üres része”) levegő helyett héliummal volna töltve, kb. milyen tényezővel növekedne az összes rezonáns frekvencia? Egy dallamot énekelve, a hélium milyen hatást gyakorolna arra a hangnemre, amelyben énekel? Elemezzük a feladatot!

47.4 Tekintsünk egy állandó, egyenletes, 1000/s frekvenciájú hanghullámot, amelyben a nyomás-csúcsok az 1 bar légköri nyomástól $\pm 10^{-6}$ bar értékkel különböznek.

- Mekkora a sűrűségváltozás kísér egy ilyen hullámot?
- Mekkora lesz a részecske maximális x_m elmozdulása?
- Milyen intenzitása lesz a hangnak?
(A hangsebesség értékét 340 m/s-nak vegyük.)

47.5 Fogjuk meg egy kb. 5 cm hosszú gumiszál két végét, pengessük meg és figyeljük meg a hang magasságát. Ezután – *anélkül, hogy az újjaink közt tartott szál tömegét megváltoztatnánk* – feszítsük ki eredeti hosszának két-, három-, négy-, ötszörösére, és sorban pengessük meg a különböző hosszúságú szálakat. Vonjuk le a következtetéseket! Vajon egy hegedűhúr miért nem viselkedik ugyanígy?

47.6 Egy állandó vastagságú, tökéletesen hajlékony, ρ kg/cm fajlagos tömegű hűrt T feszültséggel feszítünk meg. Vezessük le az y laterális elmozdulást leíró hullámegyenletet és határozzuk meg a húr mentén terjedő „zavar” terjedési sebességét. Tételezzük fel, hogy minden pontban és időpillanatban $\partial y/\partial x \ll 1$, és vizsgáljuk a rezgés komponensét csak egy kiválasztott síkban. Megjegyezzük, hogy a húr feszültségének laterális irányú komponense elég jó közelítéssel $T(\partial y/\partial x)$ kifejezéssel egyenlő.

47.7 Mutassuk meg, hogy az $u = Ae^{i(\omega t - kx)}$ elegyet tesz a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (1/v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

hullámegyenletnek, feltéve, hogy ω és k eleget tesz az $\omega = vk$ összefüggésnek.

48. fejezet

48.1 λ hullámhosszúságú vízihullám fázissebessége – a felületi feszültséget és a véges mélységből származó hatásokat elhanyagolva –

$$v_t = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Mutassuk meg, hogy a csoportsebesség a fázissebesség felével egyenlő. Mekkora az 1000 m hullámhosszúságú hullám csoport- és fázissebessége?

48.2 Ha a felületi feszültséget is beleszámítjuk, valamely ρ sűrűségű és σ felületi feszültségű folyadék felületi hullámának fázissebessége, elég nagy mélység esetén:

$$v_t = \left(\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho} + \frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2}$$

Számítsuk ki egy ilyen hullám csoportsebességét.

48.3 Számítsuk ki az 1 cm hullámhosszúságú hullámfodrok fázissebességét

- vízben (felületi feszültség 70 mN/m) és
- alkoholban (felületi feszültség 26 mN/m).

48.4 Határozzuk meg a víz *minimális* sebességgel terjedő hullámfodrainak hullámhosszát és frekvenciáját.

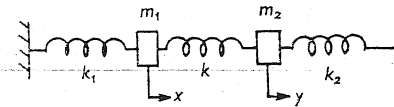
48.5 Egy dieselvontatású hosszú tehervonat egyenes pályán, lejtőn felfelé 5,0 m/s sebességgel halad. Amint egy teljesen függőleges falba épített alagúthoz ér, a gépész hosszú egyenletes kürtjelet ad, amelynek alapfrekvenciája 340 Hz. Mind a kürtjelet magát, mind pedig a falról visszavert visszhangját hallja

- a gépész
- és egy, a földön, a fékezőkocsi közelében levő személy.

Másodpercenként hány lebegést hallanak az egyes emberek?

49. fejezet

49.1 Két súrlódásmentesen elmozduló m_1 , ill. m_2 tömeg k_1 , ill. k_2 rugalmassági állandójú rugóval, két szemben álló falhoz van erősítve.



Ugyanakkor a tömegek egy k rugalmassági állandójú rugóval egymással is össze vannak kapcsolva (l. az ábrát). Írjuk fel a két tömeg mozgásegyenletét. Legyen

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \omega_0^2$$

49.2 A fenti egyenletekbe helyettesítsünk $x = Ae^{i\omega t}$ és $y = Be^{i\omega t}$ -t és határozzuk meg a rezgések alapharmonikusának frekvenciáját és amplitúdóját.

49.3 Mutassuk meg, hogy az

$$f(x, y, z, t) = Ae^{i\omega t} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c}$$

kifejezés, ahol

$$\omega^2 = v^2\pi^2(l^2/a^2 + m^2/b^2 + n^2/c^2)$$

és l, m, n , 1-nél nagyobb, vagy azzal egyenlő egész számok,

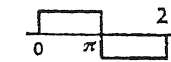
- kielégíti a háromdimenziós hullámegyenletet (v terjedési sebesség esetén);
- zérussal egyenlő az $x = 0$ és $x = a$, $y = 0$ és $y = b$, valamint $z = 0$ és $z = c$ helyeken;
- időben szinuszosan rezeg.

49.4 Ha az előző feladatban $a : b : c = 1 : 2 : 3$, számítsuk ki az ω_0 alapharmonikus kifejezésekként a legalacsonyabb tíz frekvenciát. Állítsuk őket a növekvő frekvencia szerint sorrendbe és ábrázoljuk őket közelítően egy függőleges skálán.

49.5 Használjuk fel a végtelen hosszú, ellentétes irányban mozgó periodikus hullámvonulatok elvét ahhoz, hogy levezessük, mi történik akkor, ha egy állandó vastagságú és L hosszúságú megfeszített hűrt közepén A távolságra kihúzzunk, majd elengedünk. Ábrázoljuk vázlatosan a húr megjelenésének néhány reprezentatív nézetét a mozgás félperiodusa alatt, különböző időpillanatokban.

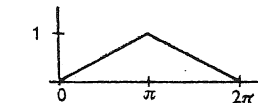
50. fejezet

50.1 A négyszöghullám Fourier-analíziséből: $f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$ kiindulva mutassuk meg, hogy



- $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \pi/4$;
- $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \pi^2/8$;
- $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = 4/3 \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \right) = \pi^2/6$.

50.2 Végezzük el az ábrán látható $g(x)$ függvény Fourier-analízisét és hasonlítsuk össze az előbbi



feladatban szereplő függvény kiintegrálásából kapott eredménnyel.

50.3 Az előbbi feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy

- $1 + 1/3^4 + 1/5^4 + 1/7^4 + \dots = \pi^4/96$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \frac{2^4}{2^4-1} (1 + 1/3^4 + 1/5^4 + \dots) = \pi^4/90$.

50.4 A 45. fejezetben ki kellett számolnunk a következő integrált:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$$

Könnyen elvégezhetjük a számítást, ha a számlálót és a nevezőt megszorozzuk e^{-x} -szel, és elvégez-

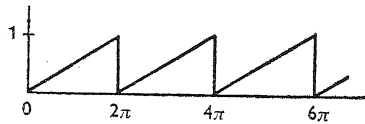
zük az alábbi sorfejtést

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = (1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots),$$

majd tagonként integrálunk. Így azt kell kapnunk, hogy

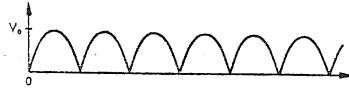
$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du [1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \dots] = 6\pi^4/90 = \pi^4/15.$$

50.5 Számoljuk ki az oszcilloszkóp vízszintes elterítő „kipp” áramkörében használt „fűrészfog” függvényt (l. az ábrán) előállító Fourier-sort.



50.6 Hullám-egyenirányító olyan készülék, amely valamilyen U_0 amplitúdójú szinusz hullámot az ábrán látható hullámmá alakítja.

- Számítsuk ki $U(t)$ átlagértékét, ami az egyenáramú kimeneti feszültséggel egyenlő.
- Határozzuk meg a kimeneti feszültség második harmonikusának amplitúdóját.



50.7 Egy transzformátor a kimenetén a következő alakú feszültséget szoigáztatja:

$$U_{ki} = U_{be} + e(U_{be})^3.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a köbös tag milyen hatást gyakorol:

- egy bemenő szinusz hullámra;
- két vagy több, különböző frekvenciájú, bemenő szinusz hullámra.

Megoldások

39. fejezet

$$39.1 \quad p^{\kappa-1}/T^{\kappa} = \text{konst.}$$

$$TV^{\kappa-1} = \text{konst.}$$

$$39.2 \quad 173 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$39.4 \quad p = p_0 e^{-\mu g h / RT}$$

$$39.6 \quad 1,82 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$39.7 \quad p_A = 3,17 p_0 \quad p_B = 2,64 p_0$$

$$39.9 \quad 1,12 \text{ bar}$$

$$39.10 \quad 0,266 \text{ bar}$$

$$39.11 \quad 31\%$$

$$39.12 \quad a) \quad 1740 \text{ K}$$

$$b) \quad 5,8$$

40. fejezet

$$40.1 \quad 0,366; 0,050$$

$$40.2 \quad a) \quad (3/2)R$$

$$b) \quad (7/2)R$$

$$40.5 \quad b) \quad 0,368$$

$$c) \quad \sqrt{\pi/4}$$

41. fejezet

$$41.1 \quad a) \quad 11600 \text{ K}$$

$$b) \quad 1/40 \text{ eV}$$

$$c) \quad 1,24 \text{ } \mu\text{m}$$

$$41.3 \quad R \approx e^{-11,6} \approx 10^{-5}$$

42. fejezet

$$42.1 \quad 1 \text{ eV/atom} = 96520 \text{ J/gmol}$$

$$42.3 \quad \text{Kb. 2 faktornyt}$$

43. fejezet

$$43.1 \quad l = 10^{-7} \text{ m}$$

$$\tau = 10^{-9} \text{ s}$$

$$43.2 \quad L' = 56 \text{ l} (= l \ln 2N)$$

$$43.5 \quad dW/dt = n_0 v k \Delta T / (\kappa - 1)$$

$$F/A = n_0 v m \Delta u$$

44. fejezet

$$44.3 \quad \eta = 66,3\%$$

$$44.4 \quad 11 \cdot 10^8 \text{ J/K}$$

45. fejezet

$$45.1 \quad T \approx 270 \text{ K}$$

$$45.2 \quad 122 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$45.3 \quad F = R^2 / (R^2 + r^2)$$

$$45.4 \quad p_g = 1,7 \cdot 10^{16} \text{ N/m}^2$$

$$p_s = 7,2 \cdot 10^{12} \text{ N/m}^2$$

$$45.5 \quad dT/dh = 3,1 \text{ } ^\circ\text{C/km}$$

$$45.7 \quad 2490 \cdot 10^8 \text{ J/kg}$$

47. fejezet

$$47.1 \quad 0,78$$

$$47.2 \quad 99 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$47.3 \quad 2,9; \text{ (A hangnemre nincs hatással; a hangszint erősen befolyásolja).}$$

$$47.6 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (\rho/T) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

ahonnan $v^2 = T/\rho$

$$49.2 \omega^2 = \omega_0^2: A/B = +1;$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k/m_1 + k/m_2;$$

$$A/B = -m_2/m_1$$

49. fejezet

$$49.1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + k(x-y)/m_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y + k(y-x)/m_2 = 0$$

50. fejezet

$$50.5 h(x) = 1/2 - (1/\pi) [\sin x + (1/2) \sin 2x +$$

$$+ (1/3) \sin 3x + \dots]$$



B 110759

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Fischer Herbert igazgató



1984/1946 Franklin Nyomda, Budapest
Felelős vezető: Mátyás Miklós igazgató
Műszaki vezető: Kőrösi Károly — Műszaki szerkesztő: Veress Károly
A borítót tervezte: Kolozsvári Bálint — A könyv ábráit rajzolta: Mészáros Éva.
A könyv formátuma: B5, Ívterjedelme: 15 (A5), Ábrák száma: 133, Példányszám: 6600
Papír-minősége: 80 g hazai ofszet
Betűcsalád és -méret: Times monó 6g/gm
Azonosítási szám: 61385
MŰ: 3658—i—8587
Ez a könyv az 1968-ban megjelent kiadvány 3., javított kiadása
Készült az MSZ 5601 és 5602 szerint

